МАТЕМАТИКА • ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ

А. Х. Шахмейстер

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Практикум
Тренинг
Контроль

А. Х. Шахмейстер

Тригонометрия

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

УНИВЕРСИТЕТ
книжный дом
ПЕТРОГЛИФ
МЦНМО

С.-Петербург
Москва
2014

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6
Ш 32

Редактор:

Кандидат пед. наук, доцент кафедры
математики МИОО А. В. Семенов.

Рекомендовано:

Московским институтом открытого образования (МИОО) и Московским центром непрерывного математического образования (МЦНМО) в качестве пособия для школьников, абитуриентов и преподавателей.

Шахмейстер А.Х.

Ш 32 Тригонометрия : Учеб. пособие. — 4-е изд. — СПб.: «Петроглиф» : М.: Изд-во МЦНМО : ИД КДУ, 2014. — 750с.: илл.— ISBN 978-5-98712-042-2, ISBN 978-5-4439-0050-6, ISBN 978-5-906226-15-0.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах.

Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

ISBN 978-5-98712-042-2 («Петроглиф»)
ISBN 978-5-4439-0050-6 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-906226-15-0 (ИД КДУ)

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Посвящается памяти
Заслуженных учителей России:

Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Таисии Ивановны Курсиш
Владимира Леонидовича Ильина

Предисловие редактора.

Перед вами энциклопедическая по своей сути книга по тригонометрии из серии «Элективные курсы». Четкая структура книги позволяет быстро найти материал по интересующему вас разделу. Удивительно разнообразный и разноуровневый подбор примеров и задач является уникальной кладовой педагогического и методического опыта преподавания сложных тем курса тригонометрии в школе. Особенно хотелось бы выделить тщательность и аккуратность разработки следующих трудных тем: периодичности, обратных тригонометрических функций и их графиков, тригонометрических уравнений и неравенств.

Это прекрасный самоучитель для тех кто только начинает или хочет глубже разобраться в курсе тригонометрии. Наличие большого количества разноплановых примеров и графиков позволит учащемуся «прочувствовать» сложные понятия и нестандартные идеи, «увидеть» их естественное применение.

Ценность книги заключается в том, что с рассмотренными заданиями приходит понимание трудных для восприятия математических понятий и идей тригонометрии. Естественно, многие идеи, заложенные в систему примеров, тренировочных самостоятельных, карточек заданий, безусловно, могут быть использованы для подготовки к экзаменам и олимпиадам.

Желательно, чтобы подготовительная работа к изучению тригонометрии началась уже в 8 классе с изучения книги этой же серии «Геометрические задачи на экзаменах. Часть 1. Планиметрия».

А. В. Семенов.

Предисловие автора

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Программа элективного курса №1
для учащихся 9–11 классов (30 уроков).

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1–8	**Определения основных тригонометрических функций. Вычисление значений тригонометрических функций любого угла (стр. 7–68)** Практикум 1 (1.1, 1.2, 3.2, 5.2, 5.3, 7.1, 7.3, 7.5, 7.8) Практикум 2 (1 – выборочно, 3 – выборочно, 6 – выборочно) Тренировочная работа 1 (2, 4, 6 – выборочно) Практикум 3 (1.1, 1.3, 2.2, 2.3, 3.2, 4.1, 4.2, 4.4, 4.5) Тренировочная работа 2 (1.1, 1.3, 2.3, 3.2, 4.1, 4.3) Практикум 4 (1.3, 2.1, 2.2, 2.3, 3.3) Тренировочная работа 4 (1.3, 1.5, 2.2, 2.4, 3.2, 4.1, 4.4)
9–13	**Решение простейших уравнений (стр. 69–88)** Практикум 5 (2.3, 3.3, 3.5, 3.6, 4.2, 4.4, 4.7, 4.8)
14–18	**Формулы приведения (стр. 89–105)** Практикум 6 (1.1, 1.3, 2.1, 2.4, 2.6, 2.11, 2.14, 2.17, 2.18, 3.1, 3.4)
19–23	**Теоремы сложения (стр. 116–134)** Практикум 7 (1.1, 1.3, 2.1, 2.3, 2.4, 3.2, 3.4, 5.1, 5.2, 5.5) Тренировочная работа 6 (1.2, 1.3, 2.2, 2.4, 3.3, 3.4, 4.2, 5.2, 5.5)
24–30	**Тригонометрические функции двойного и половинного угла (стр. 135–162)** Практикум 8 (1.2, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9, 2.2, 2.3, 3.1, 4.1, 4.3, 4.6) Тренировочная работа 7 (1.3, 1.4, 1.7, 2.2, 2.3, 3.1, 4.1, 4.3, 4.5) Тренировочная работа 8 (1.3, 1.5, 1.7, 2.3, 2.4) Тренировочная 9 (1, 6, 8, 11, 12)

Программа элективного курса №2
для учащихся 9–11 классов (40 уроков).

№№ уроков	**Название темы** В скобках указаны номера заданий
1–4	**Основные тригонометрические формулы (стр. 163–211)** Тренировочная работа 10 (8, 9, 10, 15) Тренировочная работа 11 (4, 7, 13, 17, 18) Тренировочная работа 12 (6, 8, 9, 10) Тренировочная работа 15 (2.1, 3.1, 3.2, 3.3)
5–6	**Периодические функции (стр. 263–285)** Практикум 11 (3.1, 3.2, 3.7, 3.10, 4)
7–12	**Обратные тригонометрические функции (стр. 286–321)** Практикум 12 (1, 3, 4, 5, 6) Практикум 13 (1.2, 1.6, 2.1, 2.2) Практикум 14 (1, 2, 3, 5, 7, 8) Тренировочная работа 17 (6, 8, 11)
13–20	**Свойства arc-функций. Графики arc-функций (стр. 322–389)** Практикум 15 (1.1, 1.3, 1.6, 2, 3, 5) Тренировочная работа 18 (1.2, 1.4, 2.1, 2.2, 2.5, 2.8, 2.10, 2.12) Практикум 16 (2.1, 2.3, 2.4, 2.5) Тренировочная работа 19 (1.1, 1.4, 1.8, 2.1, 2.5, 2.7, 3.1, 3.2)
21–24	**Системы тригонометрических уравнений (стр. 390–405)** Практикум 17 (1, 3, 6, 8) Практикум 18 (1, 3, 4, 6, 8)

Программы разработаны по материалам книги и апробированы на практике Заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

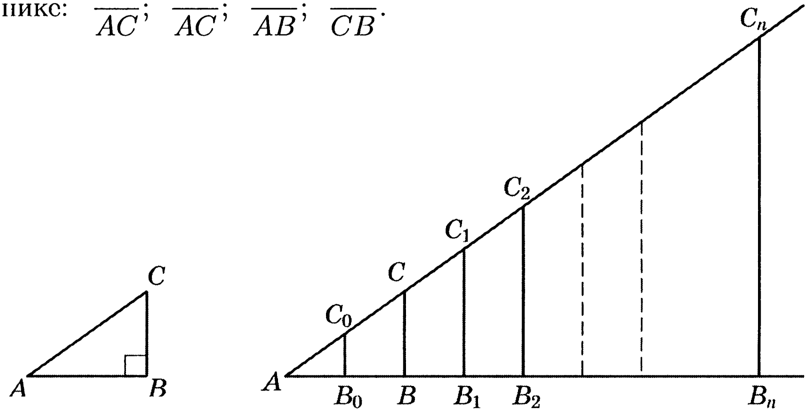
1
Определение основных тригонометрических функций

Введение

Тригонометрия — слово греческое, в переводе означает измерение треугольников. Термин этот ввел еще в 1595 г. немецкий богослов-математик Варфоломей Питиск, автор учебника и тригонометрических таблиц. Но первые сведения по тригонометрии были известны еще из клинописных таблиц Древнего Вавилона. Более серьезные результаты получил Гиппарх из Никеи (II в. до н.э.). Эти сведения вошли в «Альмагест» — 13 книг по математике Клавдия Птолемея (II в. до н.э.). Термины «синус» и «косинус» пришли к нам от индийских математиков XI в.

Наибольшее влияние на развитие тригонометрии оказал «Трактат о полном четырехугольнике» Насирэддина ат-Туси, азербайджанского астронома-математика (1201–1274). Далее — это работы Иоганна Мюллера (Региомонтан) (1436–1476), сыгравшие в этом вопросе в европейской математике решающую роль. Затем — работы Франсуа Виета (1540–1603) с теорией косинусов и формулами кратных углов, Исаака Ньютона (1643–1727) с представлением тригонометрических функций в виде рядов. И, наконец, работы Леонарда Эйлера (1707–1783), обнаружившего связь между тригонометрическими функциями и комплексными числами.

Обычно знакомство с тригонометрическими функциями начинается с определения отношений в прямоугольном треугольнике: $\dfrac{AB}{AC}$; $\dfrac{CB}{AC}$; $\dfrac{CB}{AB}$; $\dfrac{AB}{CB}$.



Учитывая подобие треугольников, имеем

$$\triangle ABC \sim \triangle AB_0C_0 \sim \triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2 \sim \ldots \sim \triangle AB_nC_n.$$

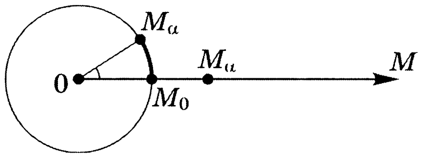
Оказывается, эти отношения не зависят от линейных размеров сторон треугольника. Значит, эти отношения — какая-то очень существенная количественная характеристика, в данном случае — угла. Итак, данному углу мы будем сопоставлять конкретное число, выраженное отношением сторон прямоугольного треугольника:

$$\sin(\angle A) = \frac{CB}{AC}; \quad \cos(\angle A) = \frac{AB}{AC};$$

$$\operatorname{tg}(\angle A) = \frac{BC}{AB}; \quad \operatorname{ctg}(\angle A) = \frac{AB}{BC}.$$

Далее произошло расширение тригонометрической характеристики не только острого угла прямоугольного треугольника, но и характеристики острого угла произвольного треугольника, а затем характеристики угла в пределах $0^\circ \leqslant \angle A \leqslant 360^\circ$ и, наконец, рассмотрение тригонометрических отношений любого угла.

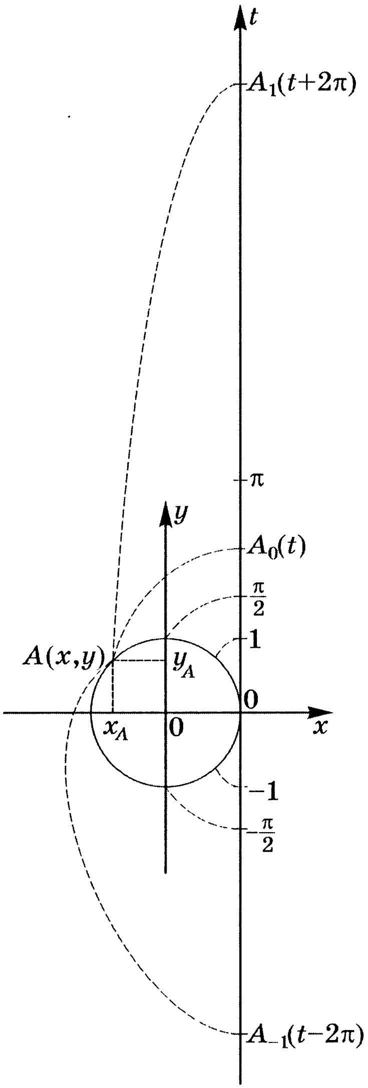
Рассмотрим единичную окружность и на ней фиксированную точку M_0 (радианное измерение), причем $\smile M_0M_\alpha = \alpha R$.



Длина дуги, образованной углом в α радиан на окружности радиусом R, равна αR, и для единичной окружности длина дуги и величина угла в радианах совпадают. Отображение луча на окружность против часовой стрелки (положительные углы) называют «намоткой». Таким образом, мы сопоставили значение отрезка M_0M_α углу α, а значит можем дать определение тригонометрических отношений любого угла.

Примечание (тригонометрические функции числового аргумента). Традиционно аргументами тригонометрических функций рассматривались именованные величины – углы (дуги), измеренные в градусах или радианах. Значения тригонометрических функций как отношения отрезков являются абстрактными величинами — числами. При изучении тригонометрических функций необходимо сравнивать изменения функции в связи с изменением аргумента. Сравнивать же можно только однородные или, что точнее, абстрактные величины — числа. Поэтому введение тригонометрических функций числового аргумента даст возможность применять эти функции в математике, технике, физике и т. д. Понятие тригонометрической функции числового аргумента можно ввести следующим способом.

В координатной плоскости $x0y$ построим единичную окружность, а числовую ось t расположим так, чтобы она касалась единичной окружности в точке ее пересечения с положительной полуосью абсцисс $(1;0)$. За начало оси t возьмем точку касания, а масштабную единицу выберем такую же, как и в системе координат $x0y$.



Представим себе, что числовую ось t намотали на единичную окружность: положительную полуось против движения часовой стрелки, а отрицательную полуось t — по движению часовой стрелки. Пусть при этом наматывании точка $A_0(t)$ числовой оси совпадает с точкой $A(x, y)$ единичной окружности. Так как при единичном радиусе $R = 1$ длина окружности равна 2π, то при первом витке точка $A_1(t + 2\pi)$ совпадает с точкой $A(x, y)$, после второго витка точка числовой оси t $A_2(t+4\pi)$ совпадает с точкой $A(x, y)$ и т. д. Получается, что $A_n(t + 2\pi n)$ совпадает с точкой $A(x, y)$.

Аналогично при наматывании отрицательной полуоси t точка $A_{-1}(t - 2\pi)$ совпадает с точкой $A(x, y)$ (первый виток), точка $A_{-2}(t - 4\pi)$ также совпадает с точкой $A(x, y)$ (второй виток) и т. д. Итак, $A_{-n}(t - 2\pi n)$ совпадает с точкой $A(x, y)$.

Таким образом, любым точкам оси t $A_k(t + 2\pi k)$, где $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, соответствует только одна точка $A(x, y)$ единичной окружности.

По определению тогда можно положить:

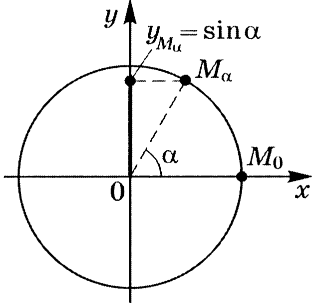
$$y = \sin t; \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} t; \qquad \frac{1}{x} = \sec t;$$

$$x = \cos t; \qquad \frac{x}{y} = \operatorname{ctg} t; \qquad \frac{1}{y} = \operatorname{cosec} t.$$

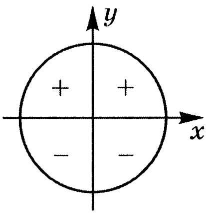
При этом определении легко показать, что значения тригонометрических функций числового аргумента t равны значениям тригонометрических функций для угла в t радиан. Значит, тригонометрическая функция числового аргумента t это одноименная тригонометрическая функция угла в t радиан.

Используя эти идеи, дадим более четкие определения. Поместим единичную окружность в систему координат так, чтобы центр окружности и начало координат совместились.

I. Определение. Синусом угла α называется ордината точки M_α единичной окружности, где $(\cdot)\,M_\alpha$ получается поворотом $(\cdot)\,M_0$ на угол α в положительном направлении (против часовой стрелки), если $\alpha > 0$ и в отрицательном (по часовой стрелке), если $\alpha < 0$.



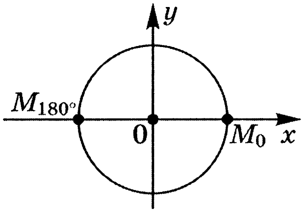
Из определения следует, что раз ордината верхней полуплоскости положительна, то синус угла I и II четверти больше нуля, а так как ордината нижней полуплоскости отрицательна, то синус угла III и IV четверти меньше нуля. Очевидно, что $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$, так как ордината точек единичной окружности меняется только в этих пределах.



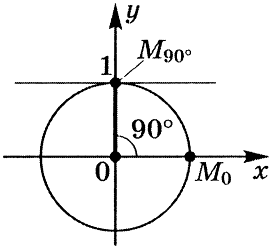
1. Таким образом, $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi k)$, где $k \in \mathbb{Z}$, так как ордината будет той же. Из определения синуса также следует, что

   $\sin 0 = \sin 180° = \sin 360° = \ldots = \sin 180°k$, или

   $\sin 0 = \sin\pi = \sin 2\pi = \ldots = \sin\pi k.$

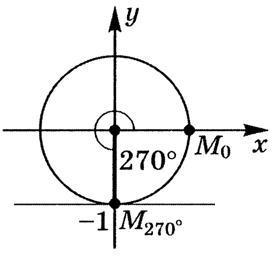
а) 

Таким образом, если $\sin\alpha = 0$, то $\alpha = \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$, так как проекция $(\cdot)\,M_0$ или $(\cdot)M_\pi$ на ось ординат равна нулю.

б) 

$$\sin 90° = \sin(90° + 360°k) = \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1,$$

т. е. если $\sin\alpha = 1$, то $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

в) 

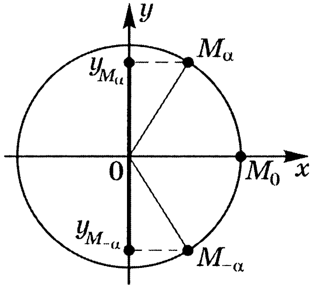
$$\sin 270° = \sin(270° + 360°k) = \sin(-90°) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) =$$

$$= \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = -1,$$

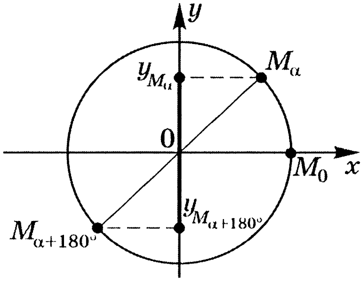
т. е. если $\sin\alpha = -1$, то $\alpha = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

2. Из определения имеем следующие свойства:

а) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$;
$y_{M_\alpha} = -y_{M_{-\alpha}}$;
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.
Это свойство означает, что $y(x) = \sin x$ нечетная функция, а значит ее график центрально-симметричен относительно начала координат.

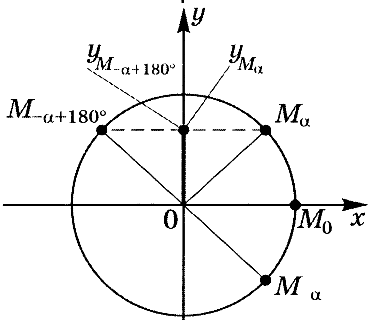


б) $\sin(\alpha + 180°) = -\sin\alpha$;
$y_{M_\alpha} = -y_{M_{\alpha+180°}}$;
$\sin\alpha = -\sin(\alpha + 180°)$;
например, $\sin 225° =$
$= \sin(45° + 180°) = -\sin 45°$.



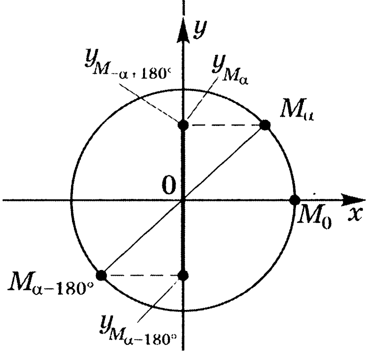
в) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$;
$y_{M_\alpha} = y_{M_{-\alpha+180°}}$;
$\sin\alpha = \sin(-\alpha + 180°)$;
например, $\sin 120° =$
$= \sin(-60° + 180°) = \sin 60°$;

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = $$
$$= \sin\frac{\pi}{6}.$$

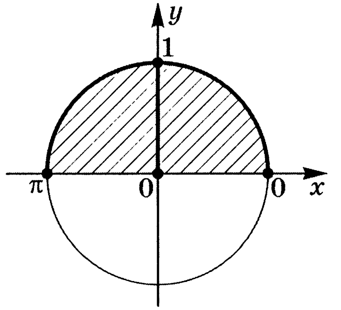


г) $\sin(\alpha - 180°) = -\sin\alpha$;
$y_{M_\alpha} = -y_{M_{\alpha-180°}}$;
$\sin\alpha = -\sin(\alpha - 180°)$;
например, $\sin(-165°) =$
$= \sin(15° - 180°) = -\sin 15°$;

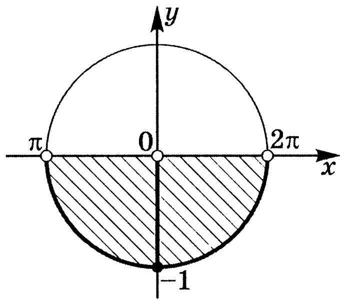
$$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) = $$
$$= -\sin\frac{\pi}{3}.$$



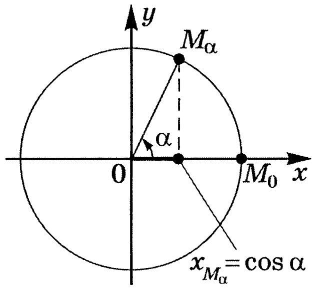
3. а) $\sin\alpha \geqslant 0$, неравенство выполняется при $\pi \geqslant \alpha \geqslant 0$. Если обобщить для любого угла с точностью до полного числа оборотов, то $\pi + 2\pi k \geqslant \alpha \geqslant 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

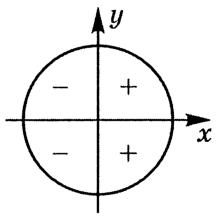


б) $\sin\alpha < 0$, неравенство выполняется при $2\pi > \alpha > \pi$. Учитывая полное число оборотов, получим $2\pi + 2\pi k > \alpha > \pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.



II. Определение. **<u>Косинусом</u> угла α называется <u>абсцисса</u> точки M_α единичной окружности, где $(\cdot)\,M_\alpha$ получается поворотом $(\cdot)\,M_0$ на угол α в положительном направлении (против часовой стрелки), если $\alpha > 0$ и в отрицательном направлении (по часовой стрелке), если $\alpha < 0$.**



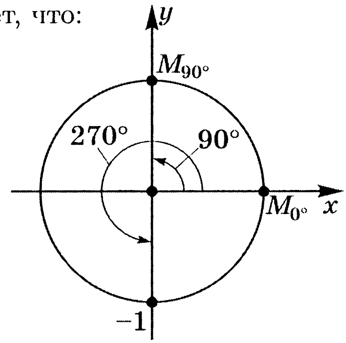


Из определения следует, что раз абсцисса правой полуплоскости положительна, то косинус угла I и IV четверти больше нуля, а так как абсцисса левой полуплоскости отрицательна, то косинус угла II и III четверти меньше нуля.

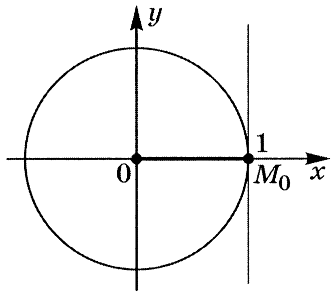
Очевидно, что $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, так как абсцисса точек единичной окружности меняется только в этих пределах. Так же, как и в случае с синусом, значение косинуса угла α совпадает со значением косинуса угла, повернутого на полный оборот в том или ином направлении k раз ($k \in \mathbb{Z}$), т. е. $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi k)$, где $k \in \mathbb{Z}$, так как абсцисса будет той же.

1. Из определения косинуса следует, что:

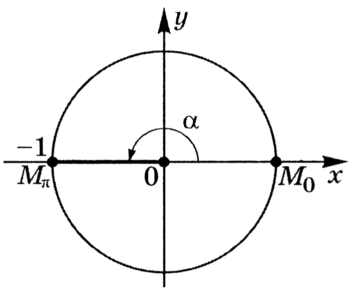
а) $\cos 90^\circ = \cos 270^\circ = \ldots =$
$= \cos(90^\circ + 180^\circ k) = \cos\dfrac{\pi}{2} =$
$= \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\right) = \ldots =$
$= \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0,$
т. е. если $\cos\alpha = 0$,
то $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.



б) $\cos 0 = \cos 2\pi = \ldots =$
$= \cos 2\pi k = 1,$
т. е. если $\cos\alpha = 1$,
то $\alpha = 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

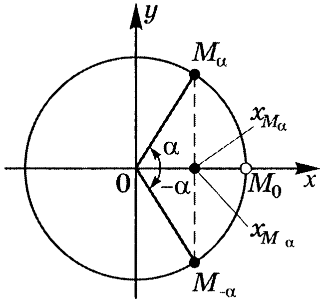


в) $\cos\pi = \cos(\pi + 2\pi) = \ldots =$
$= \cos(\pi + 2\pi k) = -1,$
т. е. если $\cos\alpha = -1$,
то $\alpha = \pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

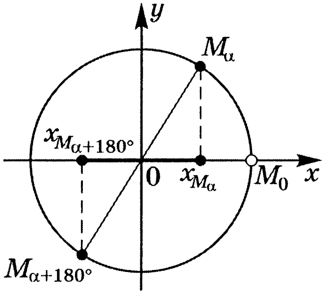


2. Из определения имеем следующие свойства:

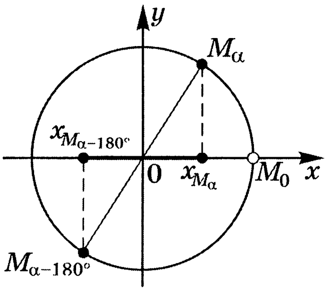
а) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;
$x_{M_\alpha} = x_{M_{-\alpha}}$;
$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$.
Это свойство означает, что $y(x) = \cos x$ есть четная функция, а значит график ее симметричен относительно оси ординат.



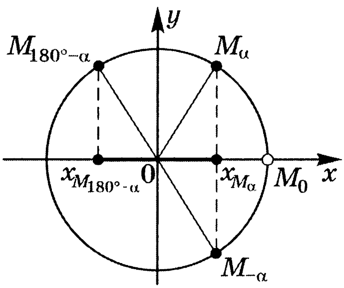
б) $\cos(\alpha + 180°) = -\cos\alpha$;
$x_{M_{\alpha+180°}} = -x_{M_\alpha}$;
$\cos(\alpha + 180°) = -\cos\alpha$;
например, $\cos 240° =$
$= \cos(60° + 180°) = -\cos 60°$;
$\cos\dfrac{4\pi}{3} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi\right) =$
$= -\cos\dfrac{\pi}{3}$.



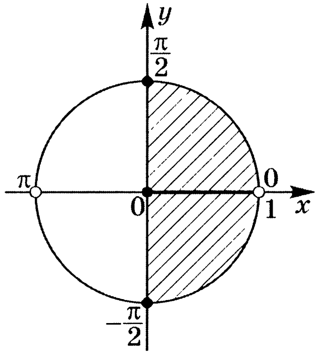
в) $\cos(\alpha - 180°) = -\cos\alpha$;
$x_{M_{\alpha-180°}} = -x_{M_\alpha}$;
$\cos(\alpha - 180°) = -\cos\alpha$;
например, $\cos(-150°) =$
$= \cos(30° - 180°) = -\cos 30°$;
$\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \pi\right) =$
$= -\cos\dfrac{\pi}{3}$.



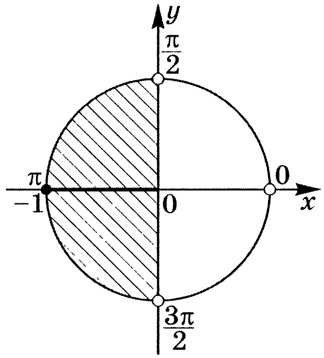
г) $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$;
$x_{M_{180°-\alpha}} = -x_{M_\alpha}$;
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$;
например, $\cos 120° =$
$= \cos(180° - 60°) = -\cos 60°$;
$\cos\dfrac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) =$
$= -\cos\dfrac{\pi}{4}$.



3. а) $\cos\alpha \geqslant 0$, неравенство выполняется при $\frac{\pi}{2} \geqslant \alpha \geqslant -\frac{\pi}{2}$.
Учитывая полное число оборотов, получим
$\frac{\pi}{2}+2\pi k \geqslant \alpha \geqslant -\frac{\pi}{2}+2\pi k \,|\, k\in\mathbb{Z}$.

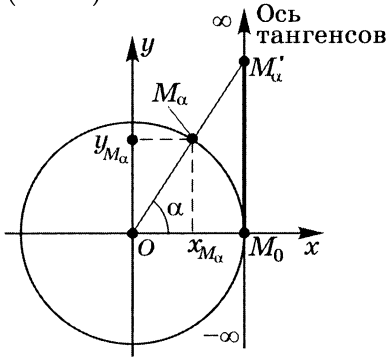


б) $\cos\alpha < 0$, неравенство выполняется при $\frac{3}{2}\pi > \alpha > \frac{\pi}{2}$.
Обобщая, имеем
$\frac{3}{2}\pi+2\pi k > \alpha > \frac{\pi}{2}+2\pi k \,|\, k\in\mathbb{Z}$.



Для лучшего понимания и определения тангенса угла α рассмотрим единичную окружность $(R = 1)$.

$\triangle OM_\alpha x_{M_\alpha} \sim \triangle OM_0M'_\alpha$
$(M_\alpha \in$ I четверти), тогда
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{M_\alpha X_{M_\alpha}}{Ox_{M_\alpha}} = \dfrac{M'_\alpha M_0}{OM_0}$.
Так как $R = 1$, то $OM_0 = 1$, значит $\operatorname{tg}\alpha = M'_\alpha M_0$.
Вертикальная прямая, параллельная оси Oy, проходящая через $(\cdot)\,M_0$, по сути является линией значений тангенса, т. е. числовой осью.



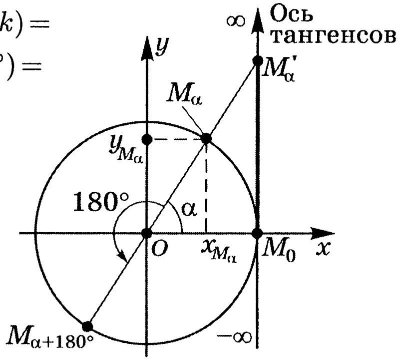
Аналогично можно доказать, что утверждение верно и для II, III и IV четверти.

Примечание. Имеется в виду ордината точки пересечения прямой OM_α с прямой $M_0M'_\alpha$, т. е. с осью тангенсов.

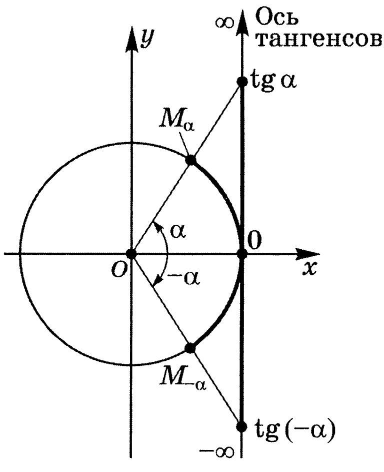
III. Определение. Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки M_α, единичной окружности к ее абсциссе, т. е. $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{y_{M_\alpha}}{x_{M_\alpha}}$, причем точка M_α не принадлежит оси ординат.

Примечание. Можно дать и иное определение:
<u>тангенсом</u> угла α называется <u>проекция</u> точки M_α единичной окружности на ось тангенсов, где точка M_α получается из точки M_0 поворотом на угол α в положительном направлении.

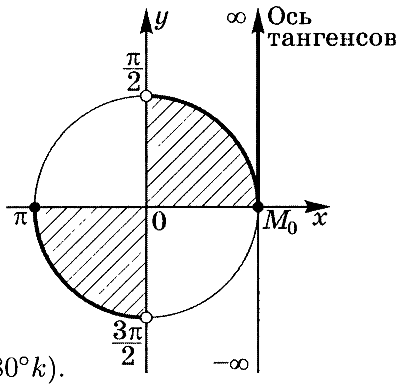
1. а) Из чертежа следует, что $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}(\alpha + \pi) =$
$= \mathrm{tg}(\alpha - \pi) = \ldots = \mathrm{tg}(\alpha + \pi k) =$
$= \mathrm{tg}(\alpha + 180°) = \mathrm{tg}(\alpha - 180°) =$
$= \mathrm{tg}(\alpha + 180° k) \mid k \in \mathbb{Z}$,
так как для углов $\alpha + \pi k$ проекция на линию тангенсов одна и та же.
Из чертежа также следует распределение знаков по четвертям.



б) $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\,\mathrm{tg}\,\alpha$;
это свойство означает, что $y(x) = \mathrm{tg}\,x$ — нечетная функция ($D(y)$ — симметричное множество), а значит график ее центрально-симметричен относительно начала координат.

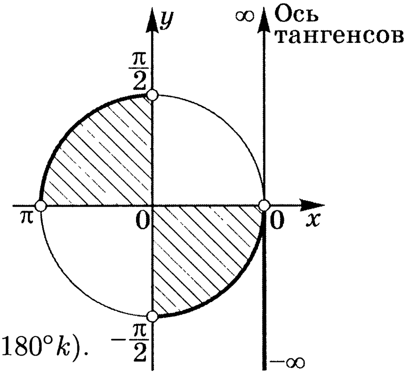


2. а) $\operatorname{tg}\alpha \geqslant 0$, неравенство выполняется при $\frac{\pi}{2} > \alpha \geqslant 0$ $(90° > \alpha \geqslant 0°)$. Учтя, что все значения повторяются через каждые пол-оборота, получим обобщение $\frac{\pi}{2} + \pi k > \alpha \geqslant \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$ (или $90° + 180°k > \alpha \geqslant 180°k$).



б) $\operatorname{tg}\alpha < 0$, неравенство выполняется при $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ $(-90° < \alpha < 0°)$.

Обобщая, имеем $-\frac{\pi}{2} + \pi k < \alpha < \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$ (или $-90° + 180°k < \alpha < 180°k$).

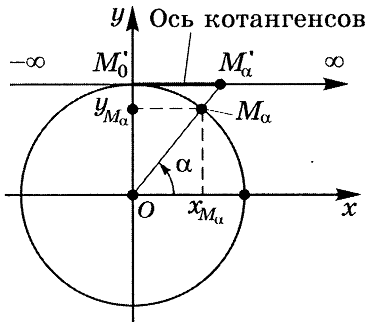


Аналогично можно ввести в оборот линию котангенсов со всеми свойствами, следующими из чертежа. Рассмотрим единичную окружность $(R = 1)$. $\triangle OM_\alpha y_{M_\alpha} \sim \triangle OM'_\alpha M'_0$, тогда

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{Y_{M_\alpha} M_\alpha}{Oy_{M_\alpha}} = \frac{M'_\alpha M'_0}{OM'_0}.$$

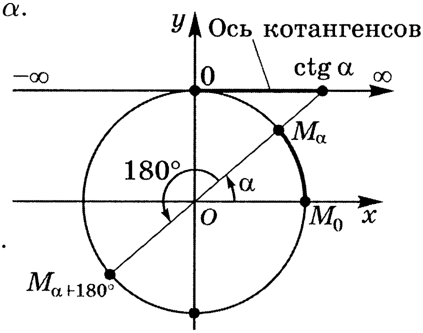
Так как $R = 1$, то $OM'_0 = 1$, значит $\operatorname{ctg}\alpha = M'_\alpha M'_0$.

Горизонтальная прямая, параллельная оси Ox, проходящая через $(\cdot)\,M'_0$, (т.е. $(0; 1)$), по сути является линией значений котангенса, т.е. числовой осью.

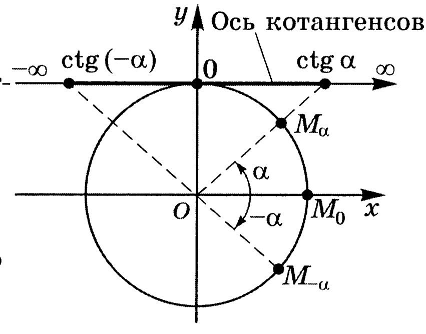


IV. Определение. Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки M_α единичной окружности к ее ординате, т. е. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x_{M_\alpha}}{y_{M_\alpha}}$, причем точка M_α не принадлежит оси абсцисс.

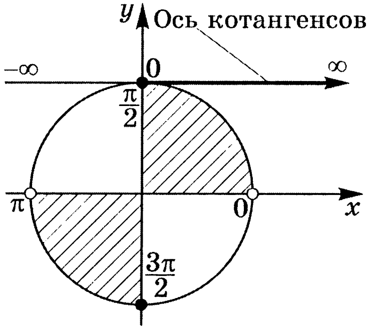
Примечание. Можно дать и иное определение:
котангенсом угла α называется проекция точки M_α единичной окружности на ось котангенсов, где точка M_α получается поворотом точки M_0 на угол α.



1. а) $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha+\pi) =$
$= \operatorname{ctg}(\alpha-\pi) = \ldots =$
$= \operatorname{ctg}(\alpha+\pi k) =$
$= \operatorname{ctg}(\alpha+180^\circ) =$
$= \operatorname{ctg}(\alpha-180^\circ) =$
$= \operatorname{ctg}(\alpha+180^\circ k) \mid k \in \mathbb{Z}$.



б) $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.
Это свойство означает, что $y(x) = \operatorname{ctg}x$ – нечетная функция ($D(y)$ — симметричное множество), а значит ее график центрально-симметричен относительно начала координат.



2. а) $\operatorname{ctg}\alpha \geqslant 0$, неравенство выполняется при $\dfrac{\pi}{2} \geqslant \alpha > 0$ $(90^\circ \geqslant \alpha > 0^\circ)$.

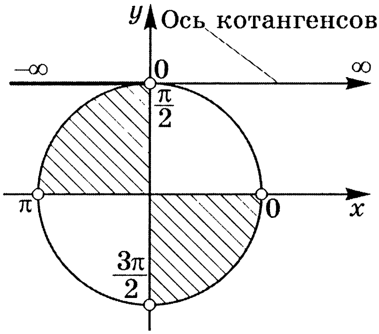
Обобщая, получим
$\dfrac{\pi}{2} + \pi k \geqslant \alpha > \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$
(или $90^\circ + 180^\circ k \geqslant \alpha >$
$> 180^\circ k$).

б) $\operatorname{ctg}\alpha < 0$, неравенство выполняется при $\pi > \alpha > \dfrac{\pi}{2}$ $(180° > \alpha > 90°)$.

Обобщая, имеем

$\pi + \pi k > \alpha > \dfrac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$

(или $180° + 180°k > \alpha >$ $> 90° + 180°k$).

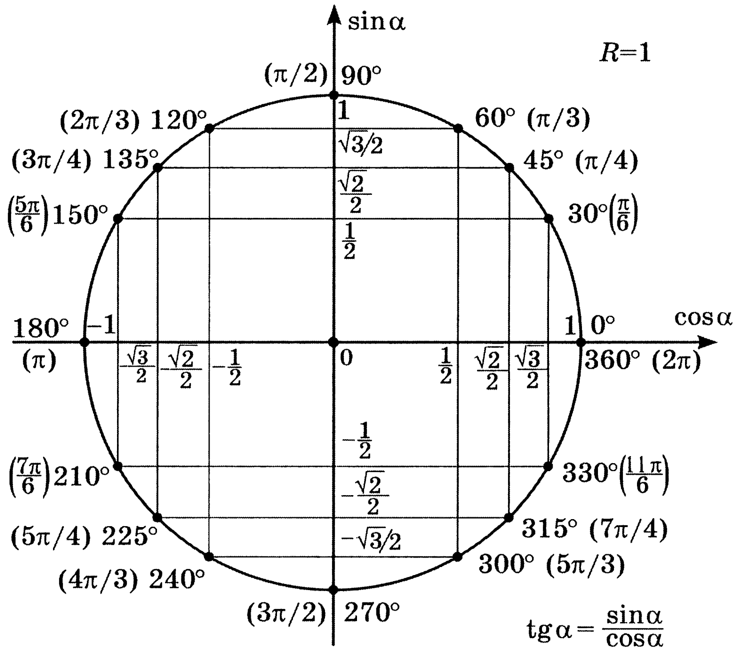


Примечание. В радианной или градусной мере измеряется α, специально оговаривать в дальнейшем мы не будем, если по смыслу ясно, о чем идет речь.

2

Вычисление значений тригонометрических функций любого угла

Таблица некоторых значений тригонометрических функций

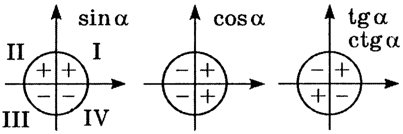


$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	
$\alpha_{\text{рад}}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

α°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	
$\alpha_{\text{рад}}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π



$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \qquad \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin\alpha \qquad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}$$
$$\cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos\alpha \qquad \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{ctg}\alpha$$

Практикум 1

1. Постройте углы:

1) косинус которых равен $-0{,}24$;

2) синус которых равен $-0{,}25$.

2. Постройте углы и вычислите значения тригонометрических отношений этих углов, используя таблицу и некоторые свойства тригонометрических отношений, вытекающие из их определения:

1) $\alpha = \dfrac{11\pi}{4}$;

2) $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$.

3. Что больше:

1) $\sin 1{,}8$ или $\sin 2{,}8$;

2) $\sin 20^\circ$ или $\sin 20^\circ \cdot \sin 35^\circ$?

Постройте эти углы.

4. Определите знак частного $-\dfrac{\cos 318^\circ}{\operatorname{tg} 394^\circ}$.

5. 1) Существует ли $\sin x = \dfrac{m}{m-1}$ и если да, то при каких значениях m?

2) $\sin\alpha = -\sqrt[4]{1{,}75}$. Найдется ли такое α?

3) $y = 3\sin x + 5$. $E(y) =?$

6. Вычислите:

1) $a^2 \sin 2\pi + b^2 \operatorname{tg} 0 - 2ab\cos\pi + b^2\cos(-\pi)$;

2) $\sin(3\alpha + 15^\circ) + 3\operatorname{ctg}(90^\circ - 2\alpha) - \operatorname{tg}(15^\circ - 4\alpha) + 2\cos(-2\alpha)$, если $\alpha = 15^\circ$;

3) $\dfrac{4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{4\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6} - 1}$;

4) $\dfrac{\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} + \operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi}{6}$.

7. Решите тригонометрические неравенства, используя тригонометрический круг:

1) $\sin 2x \geqslant 0$;

2) $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) < 0$;

3) $\cos 3x \geqslant 0$;

4) $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) \leqslant 0$;

5) $\operatorname{tg}\left(2x - \dfrac{5\pi}{6}\right) > 0$;

6) $\operatorname{tg}\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant 0$;

7) $\operatorname{ctg}\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \geqslant 0$;

8) $\operatorname{ctg}\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) < 0$.

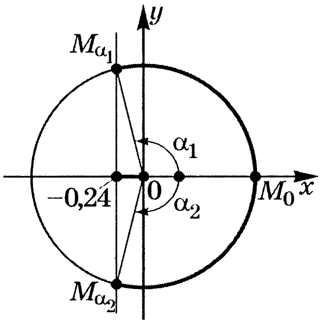
Решение практикума 1

1. Постройте углы:

1) косинус которых равен $-0{,}24$;

2) синус которых равен $-0{,}25$.

1) Отметим на оси $0x$ число $-0{,}24$ и проведем через эту точку хорду, перпендикулярную $0x$ (по определению $\cos\alpha$ — проекция на ось абсцисс). Получим на единичной окружности точки M_{α_1} и M_{α_2}. Тогда угол α есть объединение двух серий углов α_1 и α_2 с точностью до полного числа оборотов.



$\cos\alpha_1 = -0{,}24; \quad \alpha = \alpha_1 + 360°k \mid k \in \mathbb{Z};$

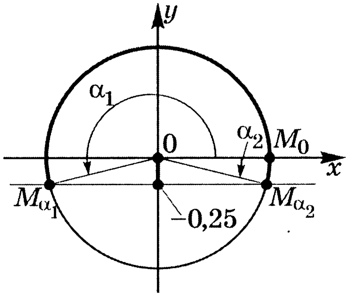
$\cos\alpha_2 = -0{,}24; \quad \alpha = \alpha_2 + 360°k;$

$\alpha_1 = -\alpha_2.$

Итак, $\alpha = \pm\alpha_1 + 360°k$, где $k \in \mathbb{Z}$,

или $\alpha = \pm\alpha_1 + 2\pi k$ (в радианном исчислении углов).

2) Отметим на оси $0y$ число $-0{,}25$ и проведем через эту точку хорду, перпендикулярную $0y$ (по определению $\sin\alpha$ — проекция на ось ординат). Получим на единичной окружности точки M_{α_1} и M_{α_2}. Тогда угол α есть объединение двух серий углов, связанных с α_1 и α_2 с точностью до полного числа оборотов.



$\sin\alpha = -0{,}25;$

$\begin{matrix}\sin\alpha_1 = -0{,}25\\ \sin\alpha_2 = -0{,}25\end{matrix}; \quad \left[\begin{matrix}\alpha = \alpha_1 + 360^\circ k\\ \alpha = \alpha_2 + 360^\circ k\end{matrix}\right. \;|\, k \in \mathbb{Z}.$

Но $\alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ;$

$\left[\begin{matrix}\alpha = \alpha_1 + 360^\circ k\\ \alpha = -\alpha_1 + 180^\circ + 360^\circ k\end{matrix}\right.$ или $\left[\begin{matrix}\alpha = \alpha_1 + 2\pi k\\ \alpha = -\alpha_1 + \pi + 2\pi k\end{matrix}\right. \;|\, k \in \mathbb{Z}$

(в радианном исчислении углов).

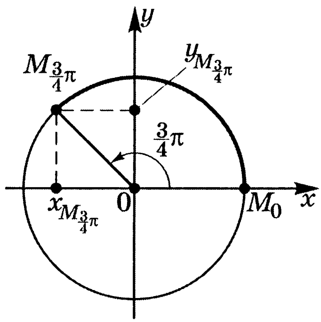
2. Постройте углы и вычислите значения тригонометрических функций этих углов, используя таблицу и некоторые свойства тригонометрических функций, вытекающие из их определения:

1) $\alpha = \dfrac{11\pi}{4};$

2) $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}.$

1) $\dfrac{11\pi}{4} = 2\dfrac{3}{4}\pi;$

Выделим из числа $\dfrac{11\pi}{4}$ целую часть — полное число оборотов: $\dfrac{11\pi}{4} = 2\pi + \dfrac{3\pi}{4}$. На единичной окружности отметим угол $\dfrac{3\pi}{4}$ (II четверть).



$$\sin\frac{11\pi}{4} = \sin\left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\frac{11\pi}{4} = \cos\left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{11\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -1;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{11\pi}{4}} = -1.$$

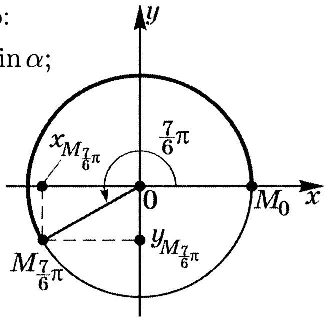
2) По определению очевидно, что:

$\sin(\alpha+180°)=\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha;$

$\cos(\alpha+180°)=\cos(\alpha+\pi)=$
$=-\cos\alpha;$

$\operatorname{tg}(\alpha+180°)=\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\operatorname{tg}\alpha;$

$\operatorname{ctg}(\alpha+180°)=$
$=\operatorname{ctg}(\alpha+\pi)=\operatorname{ctg}\alpha.$



Поэтому

$$\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2};$$

$$\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}}=\sqrt{3}.$$

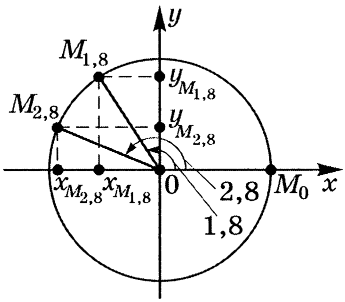
3. Что больше:

1) $\sin 1{,}8$ или $\sin 2{,}8$ (используйте построение углов);

2) $\sin 20°$ или $\sin 20°\cdot\sin 35°$?

Построим эти углы.

1)



$1{,}8\approx 1{,}8\cdot 57°\approx 103°\in$ II четверти;

$2{,}8\approx 2{,}8\cdot 57°\approx 160°\in$ II четверти.

Так как $y_{M_{1,8}}>y_{M_{2,8}}$, то $\sin 1{,}8>\sin 2{,}8$.

2) Так как $35^\circ \in$ I четверти, то $0 < \sin 35^\circ < 1$;

$20^\circ \in$ I четверти, то $0 < \sin 20^\circ < 1$.

Тогда $\begin{matrix} \sin 20^\circ = \sin 20^\circ \\ \sin 35^\circ < 1 \end{matrix}$.

Перемножим почленно, тогда $\sin 20^\circ \cdot \sin 35^\circ < \sin 20^\circ$.

4. Определите знак частного $-\dfrac{\cos 318^\circ}{\operatorname{tg} 394^\circ}$.

Так как $318^\circ \in$ IV четверти, то $\cos 318^\circ > 0$;

так как $394^\circ = 360^\circ + 34^\circ \in$ I четверти, то $\operatorname{tg} 394^\circ > 0$, тогда $-\dfrac{\cos 318^\circ}{\operatorname{tg} 394^\circ} < 0$.

5. 1) Существует ли $\sin x = \dfrac{m}{m-1}$ и если да, то при каких значениях m?

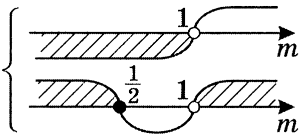
2) $\sin\alpha = -\sqrt[4]{1{,}75}$. Найдется ли такое α?

3) $y = 3\sin x + 5$. $E(y) =?$

1) Так как $\begin{cases} \sin x \leqslant 1 \\ \sin x \geqslant -1 \end{cases}$, то

$$\begin{cases} \dfrac{m}{m-1} \leqslant 1 \\ \dfrac{m}{m-1} \geqslant -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{m-m+1}{m-1} \leqslant 0 \\ \dfrac{m+m-1}{m-1} \geqslant 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m-1} \leqslant 0 \\ \dfrac{2m-1}{m-1} \geqslant 0 \end{cases}.$$



Ответ: при $m \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$ существует $\sin x = \dfrac{m}{m-1}$.

2) Так как $\sqrt[4]{1{,}75} > 1$, то $-\sqrt[4]{1{,}75} < -1$,

т. е. $\sin\alpha = -\sqrt[4]{1{,}75} < -1$. Но $\sin\alpha \geqslant -1$, т. е. не существует такого α, чтобы $\sin\alpha = -\sqrt[4]{1{,}75}$.

3) Так как $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, то $-3 \leqslant 3\sin x \leqslant 3$, тогда $2 \leqslant 3\sin x + 5 \leqslant 8$.

Ответ: $E(y) = [2; 8]$ для $y = 3\sin x + 5$.

6. Вычислите:

1) $a^2 \sin 2\pi + b^2 \operatorname{tg} 0 - 2ab \cos\pi + b^2 \cos(-\pi) =$
$= a^2 \cdot 0 + b^2 \cdot 0 - 2ab \cdot (-1) + b^2 \cdot (-1) = \boxed{b(2a - b)}$;

2) $\sin(3\alpha + 15^\circ) + 3\operatorname{ctg}(90^\circ - 2\alpha) - \operatorname{tg}(15^\circ - 4\alpha) + 2\cos(-2\alpha)$, если $\alpha = 15^\circ$.

Подставим в выражение вместо α его значение (15°), получим:

$\sin 60^\circ + 3\operatorname{ctg} 60^\circ - \operatorname{tg}(-45^\circ) + 2\cos(-30^\circ) =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 + \frac{2\sqrt{3}}{2} = \boxed{2{,}5\sqrt{3} + 1};$$

3) $$\frac{4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{4\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6} - 1} =$$

$$= \frac{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} - 1} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(2 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{4 + 4\sqrt{2} + 2}{4 - 2} = \boxed{3 + 2\sqrt{2}};$$

4) $$\frac{\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{-1 - \frac{1}{2}} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{-\frac{3}{2}} + 3 =$$

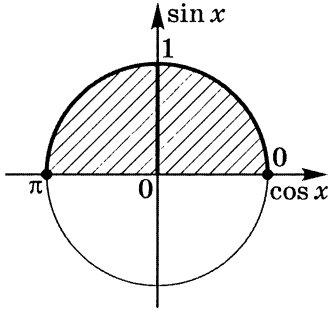
$$= -\frac{3}{4} : \frac{3}{2} + 3 = -\frac{1}{2} + 3 = \boxed{2{,}5}.$$

7. Решите тригонометрические неравенства, используя тригонометрический круг:

1) $\sin 2x \geqslant 0.$

$\pi + 2\pi k \geqslant 2x \geqslant 2\pi k;$

$\frac{\pi}{2} + \pi k \geqslant x \geqslant \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$



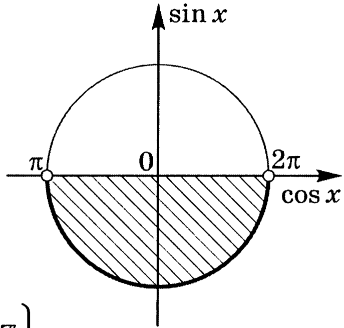
Иногда записывают $\left\{\left[\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right] \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

2) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) < 0.$

$2\pi + 2\pi k > 3x - \frac{\pi}{4} > \pi + 2\pi k;$

$2\pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi k > 3x > \frac{\pi}{4} + \pi + 2\pi k;$

$\frac{3}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi k > x > \frac{5}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi k;$

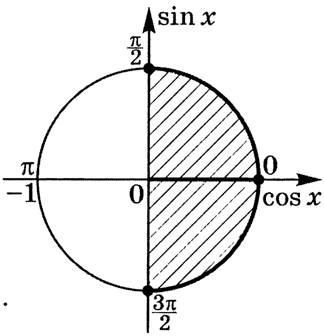


$\left\{\left(\frac{5}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi k; \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

3) $\cos 3x \geqslant 0.$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \geqslant 3x \geqslant -\frac{\pi}{2} + 2\pi k;$

$\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k \geqslant x \geqslant -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k;$



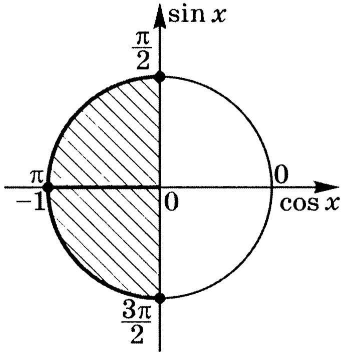
$\left\{\left[-\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k; \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k\right] \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

4) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right) \leqslant 0.$

$\dfrac{3}{2}\pi+2\pi k \geqslant 2x+\dfrac{\pi}{6} \geqslant \dfrac{\pi}{2}+2\pi k;$

$\dfrac{4}{3}\pi + 2\pi k \geqslant 2x \geqslant \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;$

$\dfrac{2}{3}\pi + \pi k \geqslant x \geqslant \dfrac{\pi}{6} + \pi k;$



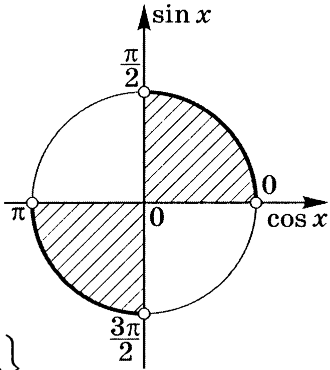
$\left\{\left[\dfrac{\pi}{6} + \pi k; \dfrac{2}{3}\pi + \pi k\right] \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

5) $\operatorname{tg}\left(2x-\dfrac{5}{6}\pi\right) > 0.$

$\dfrac{\pi}{2} + \pi k > 2x - \dfrac{5}{6}\pi > \pi k;$

$\dfrac{4}{3}\pi + \pi k > 2x > \dfrac{5}{6}\pi + \pi k;$

$\dfrac{2}{3}\pi + \dfrac{\pi}{2}k > x > \dfrac{5}{12}\pi + \dfrac{\pi}{2}k;$



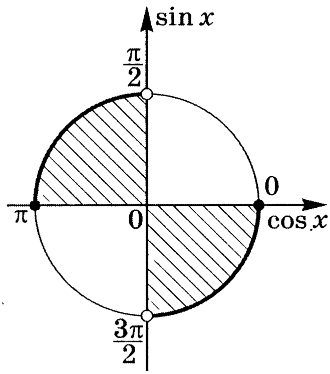
$\left\{\left(\dfrac{5}{12}\pi + \dfrac{\pi}{2}k; \dfrac{2}{3}\pi + \dfrac{\pi}{2}k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

6) $\operatorname{tg}\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant 0.$

$\pi + \pi k \geqslant 3x + \dfrac{\pi}{4} > \dfrac{\pi}{2} + \pi k;$

$\dfrac{3\pi}{4} + \pi k \geqslant 3x > \dfrac{\pi}{4} + \pi k;$

$\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}k \geqslant x > \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{3}k;$



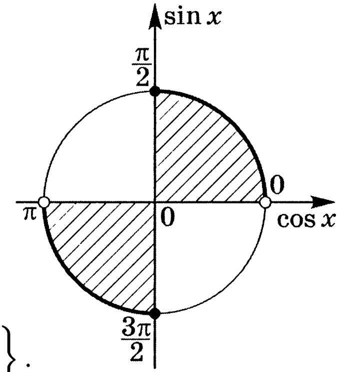
$\left\{\left(\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{3}k; \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}k\right] \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

7) $\operatorname{ctg}\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right) \geqslant 0.$

$$\frac{\pi}{2}+\pi k \geqslant 2x+\frac{\pi}{3} > \pi k;$$

$$\frac{\pi}{6}+\pi k \geqslant 2x > -\frac{\pi}{3}+\pi k;$$

$$\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k \geqslant x > -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k;$$



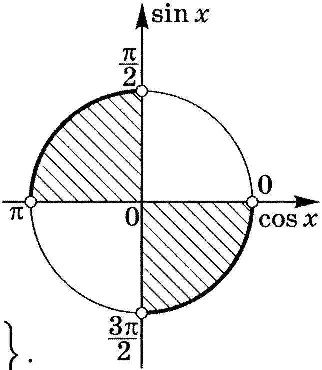
$$\left\{\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k;\ \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k\right] \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

8) $\operatorname{ctg}\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right) < 0.$

$$\pi+\pi k > 3x-\frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{2}+\pi k;$$

$$\frac{4}{3}\pi+\pi k > 3x > \frac{5}{6}\pi+\pi k;$$

$$\frac{4}{9}\pi+\frac{\pi}{3}k > x > \frac{5}{18}\pi+\frac{\pi}{3}k;$$



$$\left\{\left(\frac{5}{18}\pi+\frac{\pi}{3}k;\ \frac{4}{9}\pi+\frac{\pi}{3}k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Примечание. Обратите внимание на то, что в данной задаче не совсем привычные оси координат. Так как аргументами (углами) здесь являются выражения, зависящие от x (а эти выражения — длины дуги или величины углов), то осями (проекциями) являются $\cos x$ и $\sin x$.

Практикум 2

Заполните таблицу, вычислив значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ для указанных углов.

1.

α	720°	225°	300°	870°	900°	-330°	-630°	-210°
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\operatorname{tg}\alpha$								
$\operatorname{ctg}\alpha$								

2.

α	$\frac{11\pi}{3}$	$-\frac{11\pi}{4}$	$3\frac{1}{6}\pi$	$\frac{20\pi}{3}$	$\frac{55\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{3}$
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\operatorname{tg}\alpha$								
$\operatorname{ctg}\alpha$								

3.

α	1080°	405°	330°	-225°	-300°	-1020°	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{29\pi}{3}$
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\operatorname{tg}\alpha$								
$\operatorname{ctg}\alpha$								

4.

α	870°	-630°	-810°	210°	315°	-240°	$-\frac{7\pi}{3}$	$-\frac{32\pi}{3}$
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\operatorname{tg}\alpha$								
$\operatorname{ctg}\alpha$								

5.

α	$\frac{13\pi}{4}$	-420°	-810°	$-\frac{55\pi}{6}$	$-\frac{21\pi}{2}$	$-11\frac{1}{3}\pi$	$-7\frac{5}{6}\pi$	$\frac{55\pi}{6}$
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\operatorname{tg}\alpha$								
$\operatorname{ctg}\alpha$								

6.

α	930°	-690°	750°	675°	$-\frac{15\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{3}$	$\frac{19\pi}{4}$	$\frac{17\pi}{6}$
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\operatorname{tg}\alpha$								
$\operatorname{ctg}\alpha$								

Решение практикума 2

Заполните таблицу, вычислив значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ для указанных углов.

1.

α	$720°$	$225°$	$300°$	$870°$	$900°$	$-330°$	$-630°$	$-210°$
$\sin\alpha$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	0	1	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	нет	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	нет	1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	нет	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$

2.

α	$\frac{11\pi}{3}$	$-\frac{11\pi}{4}$	$3\frac{1}{6}\pi$	$\frac{20\pi}{3}$	$\frac{55\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{3}$
$\sin\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	нет	-1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	0	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3.

α	$1080°$	$405°$	$330°$	$-225°$	$-300°$	$-1020°$	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{29\pi}{3}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	0	1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	нет	1	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

4.

α	870°	-630°	-810°	210°	315°	-240°	$-\frac{7\pi}{3}$	$-\frac{32\pi}{3}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	нет	нет	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\sqrt{3}$	0	0	$\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

5.

α	$\frac{13\pi}{4}$	-420°	-810°	$-\frac{55\pi}{6}$	$-\frac{21\pi}{2}$	$-11\frac{1}{3}\pi$	$-7\frac{5}{6}\pi$	$\frac{55\pi}{6}$
$\sin\alpha$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	1	$-\sqrt{3}$	нет	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	нст	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\sqrt{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

6.

α	930°	-690°	750°	675°	$-\frac{15\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{3}$	$\frac{19\pi}{4}$	$\frac{17\pi}{6}$
$\sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	-1	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Тренировочная работа 1

Заполните таблицу, вычислив значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ для указанных углов.

1.

α	$330°$	$630°$	$210°$	$420°$	$810°$	$-570°$	$-720°$	$-225°$
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\operatorname{tg}\alpha$								
$\operatorname{ctg}\alpha$								

2.

α	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{3}$	$-3\frac{1}{6}\pi$	$\frac{17\pi}{6}$	$-\frac{20\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{2}$	$-\frac{23\pi}{6}$
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\operatorname{tg}\alpha$								
$\operatorname{ctg}\alpha$								

3.

α	$1050°$	$300°$	$225°$	$-1080°$	$-405°$	$-390°$	$7\frac{5}{6}\pi$	$11\frac{1}{3}\pi$
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\operatorname{tg}\alpha$								
$\operatorname{ctg}\alpha$								

4.

α	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{32\pi}{3}$	$-\frac{13\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$	240°	-315°	-210°	810°
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\operatorname{tg}\alpha$								
$\operatorname{ctg}\alpha$								

5.

α	630°	-870°	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{31\pi}{4}$	-30°	-90°	$-\frac{29\pi}{3}$	$-\frac{21\pi}{4}$
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\operatorname{tg}\alpha$								
$\operatorname{ctg}\alpha$								

6.

α	660°	840°	-270°	-780°	-600°	$\frac{15\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{3}$
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\operatorname{tg}\alpha$								
$\operatorname{ctg}\alpha$								

Решение тренировочной работы 1

Заполните таблицу, вычислив значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ для указанных углов.

1.

α	330°	630°	210°	420°	810°	-570°	-720°	-225°
$\sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	нет	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	нет	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-1
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\sqrt{3}$	нет	-1

2.

α	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{3}$	$-3\frac{1}{6}\pi$	$\frac{17\pi}{6}$	$-\frac{20\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{2}$	$-\frac{23\pi}{6}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1	нет	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	0	$\sqrt{3}$

3.

α	1050°	300°	225°	-1080°	-405°	-390°	$7\frac{5}{6}\pi$	$11\frac{1}{3}\pi$
$\sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	1	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	нет	-1	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

4.

α	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{32\pi}{3}$	$-\frac{13\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$	$240°$	$-315°$	$-210°$	$810°$
$\sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	нет
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$-\sqrt{3}$	0

5.

α	$630°$	$-870°$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{31\pi}{4}$	$-30°$	$-90°$	$-\frac{29\pi}{3}$	$-\frac{21\pi}{4}$
$\sin\alpha$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\alpha$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	нет	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	нет	$\sqrt{3}$	-1
$\operatorname{ctg}\alpha$	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1

6.

α	$660°$	$840°$	$-270°$	$-780°$	$-600°$	$\frac{15\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{3}$
$\sin\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	нет	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Алгебраические соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

Можно доказать следующие взаимоотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла, отраженные в таблице.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha$		$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	

Здесь знаки определяются знаком тригонометрической функции, стоящей слева, в зависимости от того, какой четверти принадлежит α.

Например, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$, где $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Тогда $\cos\alpha < 0$, а $\sin\alpha > 0$, значит

в формуле $\cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ необходимо поставить такой знак, чтобы косинус принимал отрицательные значения:

$$\cos\alpha = \frac{1}{-\sqrt{1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{25}{9}}} = -\frac{3}{5},$$

а в формуле $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, чтобы синус был положительным:

$$\sin\alpha = \frac{-\frac{4}{3}}{-\sqrt{1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4}{5}.$$

Практикум 3

1. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}6$ при $90° < \alpha < 180°$;

2) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ при $270° < \alpha < 360°$;

3) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2. Докажите тождества:

1) $\left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$;

2) $(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)(1 - \sin^2\alpha) = \operatorname{ctg}^2\alpha$;

3) $\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$.

3. Упростите:

1) $\frac{2\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha}$;

2) $(a\sin\alpha + b\cos\alpha)^2 + (a\cos\alpha - b\sin\alpha)^2$.

4. Решите уравнения:

1) $\sin^2 x - \cos^2 x + 1 = 0$;

2) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = \cos x$;

3) $\sin x - \sin^2 x + \operatorname{tg} 45° = \cos^2 x + \cos 45°$;

4) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin x}$;

5) $\frac{\cos x}{\sin x + 1} = 0$.

Решение практикума 3

1. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}6$ при $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

$\boxed{\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ **1.1**

$\sin\alpha > 0$, так как $\alpha \in$ II четверти;

$\sin\alpha = \sqrt{1-(-0{,}6)^2} = \sqrt{1-0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8;$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = \boxed{-\frac{4}{3}}.$$

2) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$ при $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

$\alpha \in$ IV четверти, значит $\cos\alpha > 0$, $\sin\alpha < 0$.

$\boxed{\cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}}$ **1.5** $\quad \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = \boxed{\dfrac{4}{5}}.$

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha};\quad \sin\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \boxed{-\frac{3}{5}}.$$

Можно проще: так как $\sin\alpha = \cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$,

то $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right) = -\dfrac{3}{5}$.

3) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ при $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

$\alpha \in$ II четверти, тогда $\cos\alpha < 0$;

$\boxed{\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ **1.4**

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2};\quad \cos\alpha = -\sqrt{\frac{169-144}{169}} = \boxed{-\frac{5}{13}}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13} : \left(-\frac{5}{13}\right) = \boxed{-2{,}4}.$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \boxed{-\frac{5}{12}}.$$

2. Докажите тождества:

1) $\left(\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha.$

Пусть L — левая часть и П — правая часть.

$$\mathrm{L}=\left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2+\left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2-\sin^2\alpha=$$

$$=\left(\frac{\sin\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\right)^2+\left(\frac{\cos\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}\right)^2-\sin^2\alpha=$$

$$=(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=\cos^2\alpha\\ \Pi=\cos^2\alpha\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi,\quad \left(\begin{cases}\sin\alpha\neq 0\\ \cos\alpha\neq 0\end{cases}\right).$$

Вывод. $\left(\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$ есть тождество, если $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}k\,|\,k\in\mathbb{Z}$.

2) $(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)=\operatorname{ctg}^2\alpha.$

$$\mathrm{L}=(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)=\left(1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)\cdot\cos^2\alpha=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=\operatorname{ctg}^2\alpha\\ \Pi=\operatorname{ctg}^2\alpha\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi,\ \text{если}\ \sin\alpha\neq 0,\quad \alpha\neq\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}.$$

3) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha.$

$$\mathrm{L}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}=$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}=\operatorname{tg}^2\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=\operatorname{tg}^2\alpha\\ \Pi=\operatorname{tg}^2\alpha\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi,\ \text{если}\ \begin{cases}\sin\alpha\neq 0\\ \cos\alpha\neq 0\end{cases},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}k\,|\,k\in\mathbb{Z}.$$

3. Упростите:

1) $\dfrac{2\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha} =$

$= \dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha)}{\sin\alpha - \cos\alpha} =$

$= \sin\alpha + \cos\alpha$ при $\sin\alpha \neq \cos\alpha$.

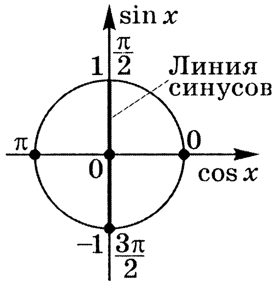
2) $(a\sin\alpha + b\cos\alpha)^2 + (a\cos\alpha - b\sin\alpha)^2 =$

$= a^2\sin^2\alpha + 2ab\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha +$

$+ a^2\cos^2\alpha - 2ab\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha + b^2\sin^2\alpha =$

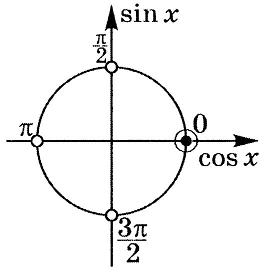
$= a^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = a^2 + b^2.$

4. Решите уравнения:



1) $\sin^2 x - \cos^2 x + 1 = 0$.

Так как $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$,
то $\sin^2 x + \sin^2 x = 0$;
$2\sin^2 x = 0$;
$\sin x = 0; \quad x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.



2) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = \cos x$.

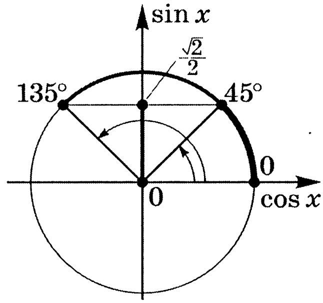
$\dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cos x$;

$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$;

$\cos x = 1; \quad x = 2\pi k$,

но $x \neq \dfrac{\pi}{2}n \mid k, n \in \mathbb{Z}$,

значит решения нет.



3) $\sin x - \sin^2 x + \operatorname{tg} 45° =$
$= \cos^2 x + \cos 45°$.

$\sin x = \sin^2 x + \cos^2 x -$
$- \operatorname{tg} 45° + \cos 45°$;

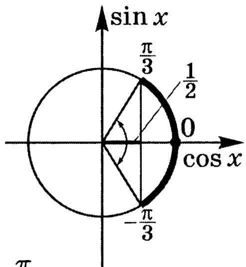
$\sin x = 1 - 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \left[\begin{array}{l} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 135^\circ + 360^\circ n \end{array}\right. \quad | \, k, n \in \mathbb{Z}, \text{ или}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{array}\right. \quad | \, k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k; \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n \,|\, k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

4) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{2}{\sin x}$;



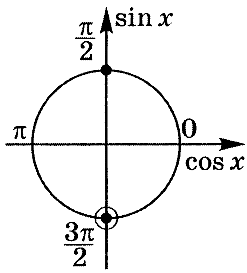
$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x};$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2}{\sin x};$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{array}\right.; \quad \cos x = \frac{1}{2}; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \end{array}\right. \quad | \, k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5) $\dfrac{\cos x}{1 + \sin x} = 0$;



$$\left\{\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x \neq -1 \end{array}\right.;$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \end{array}\right. \quad | \, k, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Тренировочная работа 2

1. Вычислите:

1) $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -1\frac{7}{8}$ при $450^\circ < \alpha < 540^\circ$;

2) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ при $\cos\alpha > 0$;

3) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{24}{7}$ при $630^\circ < \alpha < 720^\circ$.

2. Докажите тождества:

1) $(\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha = \sin^2\alpha$;

2) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = 1$;

3) $\dfrac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \operatorname{ctg}^2\alpha$.

3. Упростите:

1) $A(\alpha) = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} + \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

2) $A(\alpha) = \dfrac{1-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

4. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg}x + 1 = \sin^2 x + \cos^2 x$;

2) $2\sin x + \cos^2 x = 2 - \sin^2 x$;

3) $\dfrac{\cos x}{\sin x - 1} = 0$.

Решение тренировочной работы 2

1. Вычислите:

1) $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -1\frac{7}{8}$ при $450° < \alpha < 540°$.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$ **1.5**

$\alpha \in$ II четверти, тогда $\cos\alpha < 0$.

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{15}{8}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{64+225}{64}}} = \boxed{-\frac{8}{17}}.$$

2) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ при $\cos\alpha > 0$.

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$ **1.4**

$$\cos\alpha = \sqrt{1-(-0{,}6)^2} = \sqrt{1-0{,}36} = \boxed{0{,}8}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{-0{,}6}{0{,}8} = \boxed{-\frac{3}{4}};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \boxed{-\frac{4}{3}}.$$

3) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{24}{7}$ при $630° < \alpha < 720°$.

$\alpha \in$ IV четверти, значит $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$.

$$\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$$ **1.3**

$$\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{24}{7}\right)^2}} = \boxed{-\frac{7}{25}};$$

$$\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha; \quad \cos\alpha = -\frac{24}{7}\cdot\left(-\frac{7}{25}\right) = \boxed{\frac{24}{25}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \boxed{-\frac{7}{24}}.$$

2. Докажите тождества:

1) $(\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha = \sin^2\alpha$.

$$\mathrm{L} = (\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha = \left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha\right)\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} =$$
$$= \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \sin^2\alpha\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} =$$
$$= 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L} = \sin^2\alpha\\ \Pi = \sin^2\alpha\end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi, \text{ если } \begin{cases}\sin\alpha \neq 0\\ \cos\alpha \neq 0\end{cases}, \text{ т. е. } \alpha \neq \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z}.$$

2) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$.

$$\mathrm{L} = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L} = 1\\ \Pi = 1\end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

3) $$\frac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

$$\mathrm{L} = \frac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{\frac{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}{1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L} = \operatorname{ctg}^2\alpha\\ \Pi = \operatorname{ctg}^2\alpha\end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi, \text{ если } \begin{cases}\sin\alpha \neq 0\\ \cos\alpha \neq 0\end{cases},$$

т. е. $\alpha \neq \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z}$.

3. Упростите:

1) $$A(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} + \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

$$A(\alpha) = \frac{\sin^2\alpha + (1 - \cos\alpha)^2}{(1 - \cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}{(1 - \cos\alpha)\sin\alpha} =$$
$$= \frac{2 - 2\cos\alpha}{(1 - \cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{2(1 - \cos\alpha)}{(1 - \cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha},$$

т. е. $A(\alpha) = \frac{2}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha \neq 0$.

2) $A(\alpha) = \dfrac{1-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

$$A(\alpha) = \frac{1-\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha} =$$
$$= \frac{1-1+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

$A(\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha \ (\sin\alpha \neq 0)$.

4. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg}x + 1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

$\operatorname{tg}x+1=1$; $\quad \operatorname{tg}x = 0$; $\quad x = 180°k$; $\quad x = \pi k \ (k \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

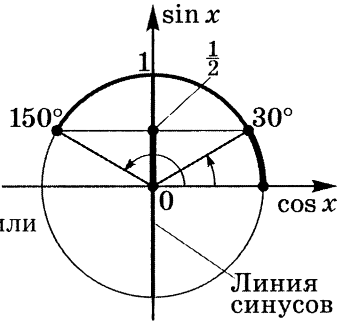
2) $2\sin x + \cos^2 x = 2 - \sin^2 x$.

$2\sin x+\cos^2 x+\sin^2 x-2=0$;

$2\sin x + 1 - 2 = 0$;

$2\sin x - 1 = 0$; $\quad \sin x = \dfrac{1}{2}$;

$\left[\begin{array}{l} x = 30° + 360°k \\ x = 150° + 360°n \end{array}\right. \mid k,n \in \mathbb{Z}$ или



$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right. \mid k,n \in \mathbb{Z}$.

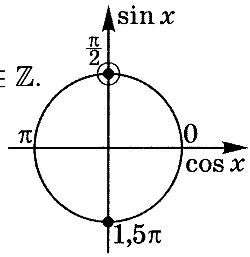
Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k; \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \mid k,n \in \mathbb{Z}\right\}$.

3) $\dfrac{\cos x}{\sin x - 1} = 0$.

$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \mid k,n \in \mathbb{Z}$.

$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.



Практикум 4

1. Упростите:

1) $A(\alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \left(\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}\right);$

2) $A(\alpha) = \cos\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha) - \sin\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha);$

3) $A(\alpha) = (1 - \cos\alpha)^2 + (1 + \cos\alpha)^2 - 4\cos^2\alpha.$

2. Вычислите:

1) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{12}$ при $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;

2) $A(\alpha) = \dfrac{3\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha}$ при $\operatorname{ctg}\alpha = -2$;

3) $A(\alpha) = \sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$ $\left(\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}\right).$

3. Докажите тождества:

1) $\cos\alpha(\sec^2\alpha - 1) = \dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha};$

2) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha} + \dfrac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} = 1;$

3) $\dfrac{81\sin^4\alpha - 16\cos^4\alpha}{(3\sin\alpha - 2\cos\alpha)(3\sin\alpha + 2\cos\alpha)} = 5\sin^2\alpha + 4.$

Решение практикума 4

1. Упростите:

1) $A(\alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$. Так как $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, то

$$A(\alpha) = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha}} + \frac{\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \sin\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha},$$

т. е. $A(\alpha) = \dfrac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$, если $\begin{cases}\sin\alpha \neq 0\\ \cos\alpha \neq 0\end{cases}$.

2) $A(\alpha) = \cos\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha) - \sin\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha)$.

$$A(\alpha) = \cos\alpha\left(1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) - \sin\alpha\left(1 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) =$$

$$= \cos\alpha + \frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha} - \sin\alpha - \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \cos\alpha + \sin\alpha - \sin\alpha - \cos\alpha = 0,$$

т. е. $A(\alpha) = 0$, если $\begin{cases}\sin\alpha \neq 0\\ \cos\alpha \neq 0\end{cases}$.

3) $A(\alpha) = (1 - \cos\alpha)^2 + (1 + \cos\alpha)^2 - 4\cos^2\alpha$.

$$A(\alpha) = 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha - 4\cos^2\alpha =$$

$$= 2 - 2\cos^2\alpha = 2(1 - \cos^2\alpha) = 2\sin^2\alpha,$$

т. е. $A(\alpha) = 2\sin^2\alpha$.

2. Вычислите:

1) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{12}$ при $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

$\alpha \in$ III четверти, тогда $\sin\alpha < 0$. $\boxed{\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}}$ **1.2**

$$\sin\alpha = \frac{\frac{5}{12}}{-\sqrt{1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2}} = -\frac{\frac{5}{12}}{\frac{13}{12}} = \boxed{-\frac{5}{13}}.$$

2) $A(\alpha) = \dfrac{3\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha}$ при $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.

$$A(\alpha) = \frac{\sin^2\alpha \cdot 3\operatorname{ctg}\alpha}{\sin^2\alpha(2 - 3\operatorname{ctg}^2\alpha)} = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha}{2 - 3\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

$$A(\alpha) = \frac{3\cdot(-2)}{2 - 3\cdot(-2)^2} = \frac{-6}{2-12} = \frac{3}{5}.$$

Итак, $A(\alpha) = \boxed{\dfrac{3}{5}}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.

3) $A(\alpha) = \sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$.

$$A(\alpha) = \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}.$$

С другой стороны,

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = 9; \quad \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = 9;$$

$$\left(\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}\right)^2 = 9; \quad \left(\frac{1}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}\right)^2 = 9.$$

Таким образом, $A(\alpha) = \boxed{9}$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$.

3. Докажите тождества:

1) $\cos\alpha(\sec^2\alpha - 1) = \dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

$$\text{L} = \cos\alpha(\sec^2\alpha - 1) = \cos\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right) =$$

$$= \cos\alpha\cdot\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{L} = \dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} \\ \Pi = \dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} \end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi, \text{ если } \begin{cases} \sin\alpha \neq 0 \\ \cos\alpha \neq 0 \end{cases}.$$

2) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}+\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=1.$

$$\mathrm{L}=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}+\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=$$

$$=1-\frac{\cos^2\alpha}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}+\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=1-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=1\\ \Pi=1\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi,\ \text{если}\ \begin{cases}\sin\alpha\neq 0\\ \cos\alpha\neq 0\end{cases}.$$

3) $\dfrac{81\sin^4\alpha-16\cos^4\alpha}{(3\sin\alpha-2\cos\alpha)(3\sin\alpha+2\cos\alpha)}=5\sin^2\alpha+4.$

$$\mathrm{L}=\frac{81\sin^4\alpha-16\cos^4\alpha}{(3\sin\alpha-2\cos\alpha)(3\sin\alpha+2\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{(9\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha)(9\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha)}{9\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha}=$$

$$=9\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha=$$

$$=5\sin^2\alpha+4\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha=5\sin^2\alpha+4.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=5\sin^2\alpha+4\\ \Pi=5\sin^2\alpha+4\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi,\ \text{если}\ \operatorname{tg}\alpha\neq\pm\frac{2}{3}.$$

Тренировочная работа 3

1. Упростите:

1) $A(\alpha) = \dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

2) $A(\alpha) = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha} - \dfrac{\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$;

3) $A(\alpha) = (\operatorname{ctg}\alpha - \cos\alpha)\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right)$.

2. Вычислите:

1) $\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sec\alpha = -\dfrac{5}{4}$ при $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;

2) $A(\alpha) = \dfrac{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{1 + \sin\alpha}$, если $\cos\alpha = 0{,}5$ при $-90^\circ < \alpha < 0$;

3) $A(\alpha) = \dfrac{2\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha}{3\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}$ при $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.

3. Докажите тождества:

1) $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha} = \sin\alpha$;

2) $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha} - \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha$;

3) $\dfrac{(1 + \operatorname{ctg}\alpha)\sin^2\alpha + (1 + \operatorname{tg}\alpha)\cos^2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} = 1$.

Решение тренировочной работы 3

1. Упростите:

1) $A(\alpha) = \dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

$$A(\alpha) = \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} =$$
$$= \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha.$$

Таким образом, $A(\alpha) = \cos\alpha - \sin\alpha$, если $\cos\alpha \neq -\sin\alpha$.

2) $A(\alpha) = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha} - \dfrac{\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$.

$$A(\alpha) = \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha =$$
$$= \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} =$$
$$= \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

Итак, $A(\alpha) = \sin^2\alpha$, если $\begin{cases}\sin\alpha \neq 0\\ \cos\alpha \neq 0\end{cases}$.

3) $A(\alpha) = (\operatorname{ctg}\alpha - \cos\alpha)\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right)$.

$$A(\alpha) = \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \cos\alpha\right)\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) =$$
$$= \frac{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha} =$$
$$= 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha.$$

$A(\alpha) = \cos^2\alpha$, если $\begin{cases}\sin\alpha \neq 0\\ \cos\alpha \neq 0\end{cases}$.

2. Вычислите:

1) $\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sec\alpha = -\dfrac{5}{4}$ при $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

$\alpha \in$ III четверти, тогда $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha < 0$.

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = -\dfrac{5}{4}$; $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$;

$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $\sin\alpha = -\sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2} = \boxed{-\dfrac{3}{5}}$.

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$.

2) $A(\alpha) = \dfrac{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{1+\sin\alpha}$, если $\cos\alpha = 0{,}5$ при $-90^\circ < \alpha < 0$.

$\alpha \in$ IV четверти, тогда $\sin\alpha < 0$.

$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $\sin\alpha = -\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$A(\alpha) = \frac{\cos\alpha + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{1+\sin\alpha} = \frac{\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}}{1+\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{0{,}5}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Итак, $A(\alpha) = \boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$, если $\cos\alpha = 0{,}5$ при $-90^\circ < \alpha < 0$.

3) $A(\alpha) = \dfrac{2\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha}{3\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$ при $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.

$$A(\alpha) = \frac{2\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha}{3\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha}{3\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{2\cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha} - \frac{3\sin^2\alpha}{3\sin^2\alpha} = \frac{2}{3}\operatorname{ctg}^2\alpha - 1,$$

тогда $A(\alpha) = \frac{2}{3} \cdot (-2)^2 - 1 = \frac{8}{3} - 1 = 1\frac{2}{3}$;

$$A(\alpha) = \boxed{1\frac{2}{3}}, \text{ если } \operatorname{ctg}\alpha = -2.$$

3. Докажите тождества:

1) $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha} = \sin\alpha.$

$$\text{L} = \frac{\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{\frac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} =$$

$$= \frac{1 - \sin^2\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \sin\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{L} = \sin\alpha \\ \Pi = \sin\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi \text{ при } \begin{cases} \sin\alpha \neq 0 \\ \cos\alpha \neq 0 \end{cases}.$$

2) $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha} - \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha.$

$$\text{L} = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{1 - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} =$$

$$= \frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{L} = \sin\alpha - \cos\alpha \\ \Pi = \sin\alpha - \cos\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi, \text{ если } \begin{cases} \sin\alpha \neq 0 \\ \sin\alpha \neq \pm\cos\alpha \end{cases}.$$

3) $$\frac{(1+\operatorname{ctg}\alpha)\sin^2\alpha+(1+\operatorname{tg}\alpha)\cos^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=1.$$

$$\text{L}=\frac{(1+\operatorname{ctg}\alpha)\sin^2\alpha+(1+\operatorname{tg}\alpha)\cos^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=$$

$$=\frac{\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\sin^2\alpha+\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\cos^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos\alpha\sin\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L}=1\\ \Pi=1\end{array}\right|\Rightarrow \text{L}=\Pi,\ \text{если}\ \begin{cases}\sin\alpha\neq 0\\ \cos\alpha\neq 0\\ \sin\alpha\neq-\cos\alpha\end{cases}.$$

Тренировочная работа 4

1. Вычислите:

1) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{12}{13}$ при $180° < \alpha < 270°$;

2) $\sin\beta$, если $\operatorname{ctg}\beta = -\dfrac{24}{7}$ при $630° < \beta < 720°$;

3) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{8}{15}$ при $90° < \alpha < 180°$;

4) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{9}{41}$ при $\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$;

5) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{7}{24}$ при $810° < \alpha < 900°$;

6) $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{24}{7}$ при $\sin\alpha < 0$.

2. Упростите:

1) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha$;

2) $\left(1 + \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right)$;

3) $\dfrac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha - 1} - \dfrac{3\cos^2\alpha}{1 - 2\cos^2\alpha}$;

4) $\dfrac{\cos\alpha}{1 - 2\sin^2\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1 - 2\cos^2\alpha}$.

3. Докажите тождества:

1) $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) \cdot (1 - \cos^2\alpha) = \operatorname{tg}^2\alpha$;

2) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta = 1$;

3) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$.

4. Решите уравнения:

1) $1 + \operatorname{ctg} x - \cos^2 x = \sin^2 x$;

2) $\cos x - \cos^2 x + \operatorname{ctg} 45^\circ = \sin^2 x + \sin 45^\circ$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos x - 1} = 0$;

4) $\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\sin x + 1} = 0$.

Решение тренировочной работы 4

1. Вычислите:

1) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{12}{13}$ при $180° < \alpha < 270°$;

$\alpha \in$ III четверти, тогда $\operatorname{ctg}\alpha > 0$;

$\operatorname{ctg}\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1}$ **1.10** $\quad \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1}$;

$$\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{\left(-\frac{13}{12}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{169-144}{144}} = \sqrt{\frac{25}{144}} = \boxed{\frac{5}{12}}.$$

2) $\sin\beta$, если $\operatorname{ctg}\beta = -\dfrac{24}{7}$ при $630° < \beta < 720°$;

$\beta \in$ IV четверти, значит $\sin\beta < 0$;

$\sin\beta = \pm\sqrt{\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\beta}}$ **1.3** $\quad \sin\beta = -\sqrt{\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\beta}}$;

$$\sin\beta = -\sqrt{\frac{1}{1+\left(-\frac{24}{7}\right)^2}} = -\sqrt{\frac{1}{\frac{576+49}{49}}} = -\sqrt{\frac{49}{625}} = \boxed{-\frac{7}{25}}.$$

3) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{8}{15}$ при $90° < \alpha < 180°$;

$\alpha \in$ II четверти, тогда $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$;

$\sin\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$ **1.3**

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{8}{15}\right)^2}} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \boxed{\frac{15}{17}};$$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ **1.4**

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\frac{225}{289}} = -\sqrt{\frac{64}{289}} = \boxed{-\frac{8}{17}}.$$

4) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{9}{41}$ при $\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$;

$\alpha \in$ III четверти, тогда $\operatorname{tg}\alpha > 0$;

$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1}}$ **1.8** $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1}$;

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1}{\left(-\frac{9}{41}\right)^2} - 1} = \sqrt{\frac{1681}{81} - 1} = \sqrt{\frac{1600}{81}} = \boxed{\frac{40}{9}}.$$

5) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{7}{24}$ при $810^\circ < \alpha < 900^\circ$;

$\alpha \in$ II четверти $\Rightarrow \sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$;

$\boxed{\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}}$ **1.5**

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \left(-\frac{7}{24}\right)^2}} = -\sqrt{\frac{576}{625}} = \boxed{-\frac{24}{25}};$$

$\boxed{\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}$ **1.1**

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{24}{25}\right)^2} = \boxed{\frac{7}{25}}.$$

6) $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{24}{7}$ при $\sin\alpha < 0$.

Так как $\begin{cases} \operatorname{ctg}\alpha < 0 \\ \sin\alpha < 0 \end{cases}$, то $\alpha \in$ IV четверти,

тогда $\cos\alpha > 0$.

$\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{24}{7}$, значит $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{7}{24}$;

$\boxed{\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}}$ **1.5**

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(-\frac{7}{24}\right)^2}} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \boxed{\frac{24}{25}}.$$

2. Упростите:

1) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha =$

$= (\sin^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha) + \cos^2\alpha =$

$= \sin^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha =$

$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

2) $$\left(1+\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)\left(1+\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right) =$$

$$= \frac{(1+\cos\alpha)+(1-\cos\alpha)}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{(1-\cos\alpha)+(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha} =$$

$$= \frac{2}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{2}{1-\cos\alpha} = \frac{4}{(1-\cos^2\alpha)} = \frac{4}{\sin^2\alpha},$$ если

$$\begin{cases}\cos\alpha\neq 1\\ \cos\alpha\neq -1\end{cases}; \quad \alpha\neq\pi k\mid k\in\mathbb{Z}.$$

3) $$\frac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha-1} - \frac{3\cos^2\alpha}{1-2\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}{2(1-\cos^2\alpha)-1} - \frac{3\cos^2\alpha}{1-2\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{1+\cos^2\alpha}{1-2\cos^2\alpha} - \frac{3\cos^2\alpha}{1-2\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{1+\cos^2\alpha-3\cos^2\alpha}{1-2\cos^2\alpha} = \frac{1-2\cos^2\alpha}{1-2\cos^2\alpha} = 1,$$ если

$$\cos^2\alpha\neq\frac{1}{2}.$$

4) $$\frac{\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1-2\cos^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1-2\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha+\sin\alpha},$$ если

$$\cos\alpha\neq\pm\sin\alpha; \quad \operatorname{tg}\alpha\neq\pm1; \quad \alpha\neq\pm\frac{\pi}{4}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}.$$

3. Докажите тождества:

1) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)=\operatorname{tg}^2\alpha$;

$$\mathrm{L}=(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)=\left(1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha=$$
$$=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=\operatorname{tg}^2\alpha\\ \Pi=\operatorname{tg}^2\alpha\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi \text{ при } \cos\alpha\neq 0,$$

что и требовалось доказать.

2) $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta=1$;

$$\mathrm{L}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta=$$
$$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=1\\ \Pi=1\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi, \text{ что и требовалось доказать.}$$

3) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$.

$$\mathrm{L}=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=$$
$$=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha+$$
$$+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=$$
$$=2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=2\\ \Pi=2\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi, \text{ что и требовалось доказать.}$$

4. Решите уравнения:

1) $1+\operatorname{ctg}x-\cos^2x=\sin^2x$;

$1+\operatorname{ctg}x=\cos^2x+\sin^2x$; $\quad 1+\operatorname{ctg}x=1$;

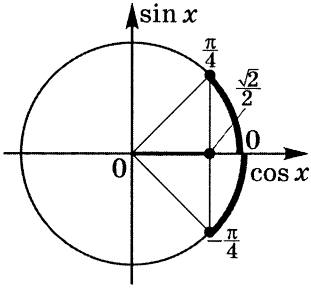
$\operatorname{ctg}x=0$; $\quad x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}$.

2) $\cos x-\cos^2x+\operatorname{ctg}45^\circ=\sin^2x+\sin 45^\circ$;

$\cos x+1=\cos^2x+\sin^2x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \end{array}\right. \Bigg| \, k, n \in \mathbb{Z}.$$

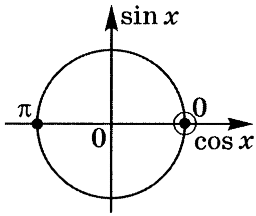


3) $$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x - 1} = 0;$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \pi k \\ x \neq 2\pi n \end{cases} \Big| \, k, n \in \mathbb{Z};$$

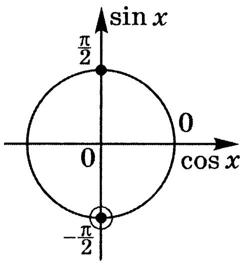
$$x = \pi + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}.$$



4) $$\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x + 1} = 0.$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x = 0 \\ \sin x \neq -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases};$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}.$$

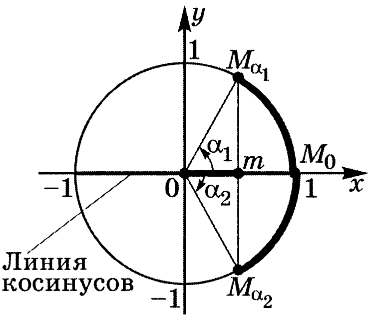


3

Решение простейших уравнений

Уравнения вида $\cos x = m$

Решить такое уравнение — значит найти все значения углов, косинус которых равен числу m.



Пусть x — множество <u>всех</u> таких углов.

Обозначим $x = \mathrm{Arccos}\, m$ — читается это так: множество <u>всех</u> углов, косинус которых равен числу m.

Очевидно, что условие разрешимости уравнения

$|m| \leqslant 1$, т.е. $-1 \leqslant m \leqslant 1$, так как иначе нет пересечения с единичной окружностью.

Так как $\alpha_2 = -\alpha_1$, то запись может быть иной.

$x = \mathrm{Arccos}\, m = \pm\alpha_1 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

Так как на отрезке $[0;\pi]$ косинус принимает все значения от -1 до 1 только один раз, введем обозначение <u>главного</u> угла $\alpha_1 = \arccos m$, принадлежащего $[0;\pi]$, косинус которого равен m.

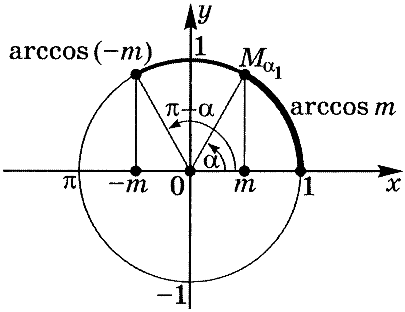
I. Определение. Арккосинусом числа m называется главная дуга или угол $\underline{\arccos m}$, принадлежащий отрезку $[0;\pi]$, косинус которого равен числу m.

Отметим очень важные свойства:

1. По определению $\cos(\arccos m) = m$.
   Тогда $\operatorname{Arccos} m = \pm\arccos m + 2\pi k$,
   т. е. $\boxed{x = \pm\arccos m + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}}$.
2. $\boxed{\arccos(-m) = \pi - \arccos m}$.

Примечание. В функциях и уравнениях дуги и углы изменяются в радианной мере, т. е. являются числами.

Представим графическую иллюстрацию:



Примеры решения уравнений вида $\cos x = m$

1) $\cos x = \dfrac{3}{4}$; $\quad x = \pm\arccos\dfrac{3}{4} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad x = \pm\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k$,

   но $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5}{6}\pi$.

   Тогда $x = \pm\dfrac{5}{6}\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

3) $\cos 3x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad 3x = \pm\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k$, тогда

$x = \pm\dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{2}{3}\pi k$, но $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

Значит $x = \pm\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2}{3}\pi k$.

Итак, $x = \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2}{3}\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

4) $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$;

$2x + \dfrac{\pi}{6} = \pm\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 2\pi k$, но

$\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\dfrac{1}{2} = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2}{3}\pi$.

Тогда $2x + \dfrac{\pi}{6} = \pm\dfrac{2}{3}\pi + 2\pi k$, значит

$2x = -\dfrac{\pi}{6} \pm \dfrac{2}{3}\pi + 2\pi k$, т. е. $x = -\dfrac{\pi}{12} \pm \dfrac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

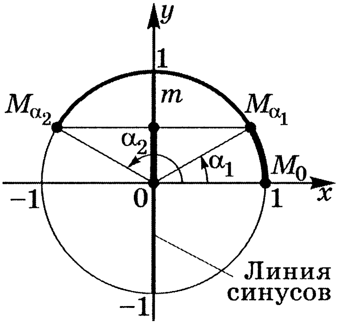
5) $(3\cos x + \pi)(4\cos x - \pi) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} 3\cos x + \pi = 0 \\ 4\cos x - \pi = 0 \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{\pi}{3} \notin [-1; 1] \quad (\pi > 3) \\ \cos x = \dfrac{\pi}{4} \in [-1; 1] \end{array}\right. .$$

Итак, $\cos x = \dfrac{\pi}{4}$, значит $x = \pm\arccos\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}$.

Уравнения вида $\sin x = m$

Решить такое уравнение — значит найти все значения углов, синус которых равен числу m.



Пусть x — множество всех таких углов.

Обозначим $x = \operatorname{Arcsin} m$ — читается это так: множество всех углов, синус которых равен числу m.

Очевидно, что условие разрешимости уравнения $|m| \leqslant 1$, т. е. $-1 \leqslant m \leqslant 1$, иначе пересечения с единичной окружностью нет.

$$x = \operatorname{Arcsin} m = \begin{cases} \alpha_1 + 2\pi k, \text{ если } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha_1 \leqslant \dfrac{\pi}{2}; \\ \alpha_2 + 2\pi k, \text{ если } \dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha_2 \leqslant \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

($\{$ — знак составной функции, т. е. состоящей в данном случае из двух частей.)

Так как $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, то получим две серии решений:

$$\left[\begin{array}{l} x = \alpha_1 + 2\pi k \\ x = \pi - \alpha_1 + 2\pi k \end{array}\right. \text{ или } \boxed{x = (-1)^k \alpha_1 + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.}$$

Так как на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ синус принимает все значения от -1 до 1 только один раз, то введем главный угол $\alpha_1 = \arcsin m$ из отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен m.

II. Определение. Арксинусом числа m называется главная дуга или угол $\underline{\arcsin m}$, принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен числу m.

Отметим очень важные свойства:

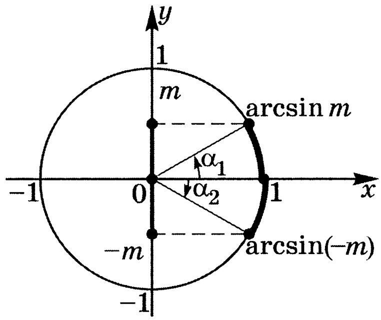
1. $\sin(\arcsin m) = m$ (по определению).

   Тогда $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + 2\pi k \\ x = \pi - \arcsin m + 2\pi n \end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z}$

   или $\boxed{x = (-1)^k \arcsin m + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}}$.

2. $\boxed{\arcsin(-m) = -\arcsin m.}$

Приведем графическую иллюстрацию:



Примеры решения уравнений вида $\sin x = m$

1) $\sin x = \frac{2}{3}$; $\quad x = (-1)^k \arcsin \frac{2}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

2) $\sin x = -\frac{1}{2}$; $\quad x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k$, но

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$. Тогда

$x = (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k$, т. е. $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

3) $\sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $2x = (-1)^k \arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \pi k$, но $\arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$.

Тогда $2x = (-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{3} + \pi k$; $x = (-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z}$.

4) $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$3x + \dfrac{\pi}{2} = (-1)^k \arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k$, но

$\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\pi}{4}$. Тогда

$3x + \dfrac{\pi}{2} = (-1)^k \cdot \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \pi k$; $3x = -\dfrac{\pi}{2} + (-1)^{k+1} \cdot \dfrac{\pi}{4} + \pi k$;

$x = -\dfrac{\pi}{6} + (-1)^{k+1} \cdot \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{3} k \mid k \in \mathbb{Z}$.

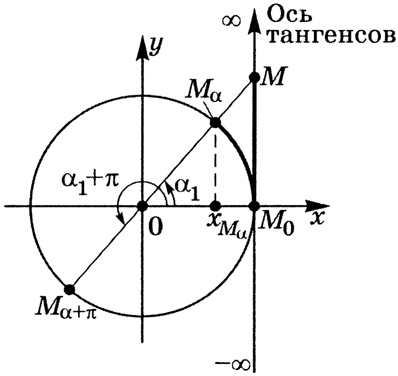
5) $(3\sin 2x - 2)\left(\sqrt{2}\sin x - 2\right) = 0$;

$\left[\begin{array}{l} 3\sin 2x - 2 = 0 \\ \sqrt{2}\sin x - 2 = 0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \sin 2x = \dfrac{2}{3} \in [-1; 1] \\ \sin x = \sqrt{2} \notin [-1; 1] \end{array}\right.$;

$\sin 2x = \dfrac{2}{3}$; $2x = (-1)^k \arcsin \dfrac{2}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$;

$x = \dfrac{1}{2}(-1)^k \arcsin \dfrac{2}{3} + \dfrac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z}$.

Уравнения вида $\operatorname{tg} x = m$



Как было доказано (см. определение $\operatorname{tg}\alpha$), прямая, параллельная оси $0y$ и проходящая через точку $(1;0)$ — есть ось тангенсов, значит $m = MM_0 = \operatorname{tg}\alpha$.

$x = \operatorname{Arctg} m$ — множество всех дуг или углов, тангенс которых равен числу m.

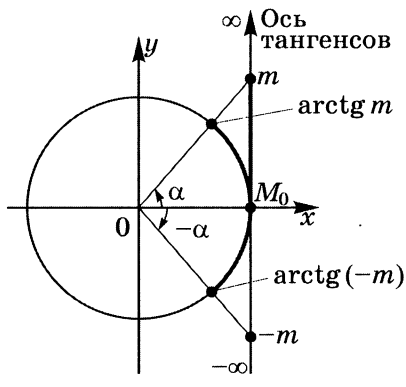
Так как на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс пробегает все значения от $-\infty$ до ∞ только один раз, то положим $\operatorname{arctg} m = \alpha_1$ главным углом из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен m.

III. Определение. **Арктангенсом числа m называется главная дуга или угол $\operatorname{arctg} m$, принадлежащий интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен числу m.**

Отметим очень важные свойства:

1. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} m) = m$ (по определению).
   Тогда $\boxed{x = \operatorname{arctg} m + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.}$
2. $\boxed{\operatorname{arctg}(-m) = -\operatorname{arctg} m}$.

Приведем графическую иллюстрацию:



Примеры решения уравнений вида $\operatorname{tg} x = m$

1) $\operatorname{tg} x = 2; \quad x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$

2) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \quad x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi k,$ но

$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$, значит $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$

3) $\operatorname{tg} 2x = 1; \quad 2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi k,$ но

$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, значит $2x = \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}.$

4) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{3}; \quad 3x - \frac{3}{4}\pi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k,$

но $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$

Тогда $3x - \frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{3} + \pi k; \quad 3x = \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{3} + \pi k;$

$3x = \frac{13}{12}\pi + \pi k$, т. е. $x = \frac{13}{36}\pi + \frac{\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z}.$

5) $2\sin x + 3\cos x = 0;$

$2\sin x = -3\cos x$. Разделим па $2\cos x \neq 0$:

$\operatorname{tg} x = -1{,}5; \quad x = \operatorname{arctg}(-1{,}5) + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$

6) $\sqrt{3}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0;$

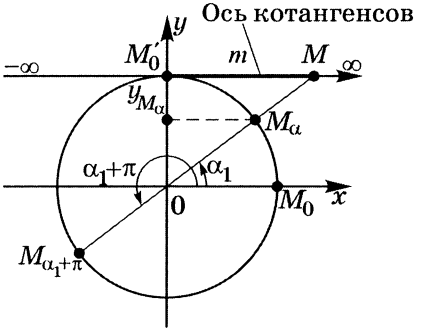
$3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$

Разделим па $3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$:

$\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad 2x - \frac{\pi}{3} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi k;$

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}.$

Уравнения вида $\operatorname{ctg} x = m$



Как было уже доказано, прямая, параллельная оси $0x$ и проходящая через точку $(0;1)$, есть ось котангенсов, значит $m = M_0'M = \operatorname{ctg}\alpha$.

$x = \operatorname{Arcctg} m$ — множество всех дуг или углов, котангенс которых равен числу m.

Так как на интервале $(0;\pi)$ котангенс пробегает все свои значения только один раз, то обозначим $\operatorname{arcctg} m = \alpha_1$ главным углом из интервала $(0;\pi)$, котангенс которого равен m.

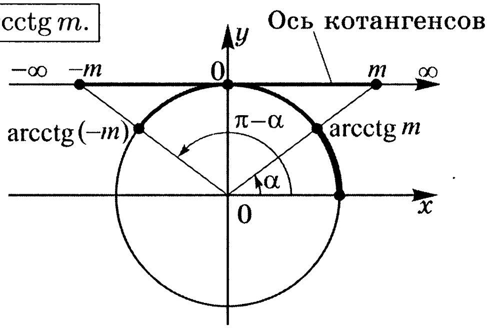
IV. Определение. Арккотангенсом числа m называется главная дуга или угол $\underline{\operatorname{arcctg} m}$, принадлежащий интервалу $(0;\pi)$, котангенс которого равен числу m.

Отметим очень важные свойства:

1. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} m) = m$ (по определению).
   Тогда $\boxed{x = \operatorname{arcctg} m + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.}$

2. $\boxed{\operatorname{arcctg}(-m) = \pi - \operatorname{arcctg} m.}$

Приведем графическую иллюстрацию:



Примеры решения уравнений вида $\operatorname{ctg} x = m$

1) $\operatorname{ctg} x = -\frac{2}{3}$; $\quad x = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi k$, но

$\operatorname{arcctg}\left(-\frac{2}{3}\right) = \pi - \operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{3}\right)$.

Тогда $x = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{2}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

2) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; $\quad x = \operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \pi k$, но

$\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, тогда $x = \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

3) $\operatorname{ctg} 2x = 3$; $\quad 2x = \operatorname{arcctg} 3 + \pi k$, тогда

$x = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 3 + \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}$.

4) $\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{5}{6}\pi\right) = -1$;

$3x - \frac{5}{6}\pi = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi k$, но

$\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$.

Тогда $3x - \frac{5}{6}\pi = \frac{3}{4}\pi + \pi k$, т. е. $3x = \frac{5}{6}\pi + \frac{3}{4}\pi + \pi k$.

Итак, $x = \frac{1}{3} \cdot \frac{38}{24}\pi + \frac{\pi}{3}k$; $\quad x = \frac{19}{36}\pi + \frac{\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z}$.

Практикум 5

1. Упростите:

1) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$;

2) $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\cos\alpha\cdot\sin\alpha}$.

2. Докажите тождества:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin^2\alpha$;

2) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}-\dfrac{\sin x+\cos x}{\operatorname{tg}^2 x-1}=\sin x+\cos x$;

3) $\dfrac{\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{(1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)}=$
$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(1+\sin\alpha\cdot\cos\alpha)$.

3. Вычислите:

1) $\cos\alpha$ при $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{3}{4}$, если $90^\circ<\alpha<180^\circ$;

2) $\sec\alpha$ при $\sin\alpha=-\dfrac{7}{25}$, если $270^\circ<\alpha<360^\circ$;

3) $\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1+\cos\alpha}$ при $\sin\alpha=-0{,}5$, если $-90^\circ<\alpha<0^\circ$;

4) $\dfrac{3\sin\alpha+4\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{1}{3}$;

5) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=3$;

6) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$.

4. Решите уравнения:

1) $\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{3}\right) = 1;$

2) $2\sin\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2};$

3) $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right);$

4) $4\sin^3 x = \sin x;$

5) $4\cos^3 x - \cos x = 0;$

6) $\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = 0;$

7) $\frac{1 + \cos 3x}{2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x} = 0;$

8) $\frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0.$

Решение практикума 5

1. Упростите:

1) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=$

$$=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}:\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1}:\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\cos\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\neq 0\\ \cos\alpha\neq 0\end{cases}\quad \alpha\neq\frac{\pi k}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}.$$

2) $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=$

$$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos^2\alpha+\cos\alpha\cdot\sin\alpha+\sin^2\alpha)}{1+\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(1+\cos\alpha\cdot\sin\alpha)}{1+\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$$

при $\cos\alpha\cdot\sin\alpha\neq-1$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos\alpha=1\\ \sin\alpha=-1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos\alpha=-1\\ \sin\alpha=1\end{cases}\end{array}\right.\quad\emptyset,$

т. е. не существует α, при котором $\cos\alpha\cdot\sin\alpha=-1$.

2. Докажите тождества:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin^2\alpha;$

$$\text{L}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}=1-\sin^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha=$$

$$=1-\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha;$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L}=\sin^2\alpha\\ \Pi=\sin^2\alpha\end{array}\right|\Rightarrow \text{L}=\Pi\ \text{при}\ \begin{cases}\sin\alpha\neq 0\\ \cos\alpha\neq 0\end{cases};\quad \alpha\neq\frac{\pi k}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}.$$

2) $$\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \sin x + \cos x.$$

Так как $\dfrac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \dfrac{\sin x + \cos x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1} =$

$= \dfrac{(\sin x + \cos x)\cos^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x}$, то

$$\text{L} = \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} =$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x} =$$

$$= \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\sin x - \cos x} = \sin x + \cos x;$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L} = \sin x + \cos x\\ \Pi = \sin x + \cos x\end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi$$

при $\alpha \neq \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi k;\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}$.

3) $$\frac{\sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{(1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha)} =$$
$$= (\sin\alpha + \cos\alpha)(1 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha).$$

$$\text{L} = \frac{\sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{(1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha)} =$$

$$= \frac{(\sin^3\alpha - \cos^3\alpha)(\sin^3\alpha + \cos^3\alpha)}{(\cos^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha)};$$

а) $$\frac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin^2\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha)}{\sin\alpha - \cos\alpha} =$$
$$= \sin^2\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha;$$

б) $$\frac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin^2\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha} =$$
$$= \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha} =$$
$= \sin\alpha + \cos\alpha$; поэтому

$$\text{L} = (\sin\alpha + \cos\alpha)(1 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha);$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L} = (\sin\alpha + \cos\alpha)(1 + \sin\alpha\cdot\cos\alpha)\\ \Pi = (\sin\alpha + \cos\alpha)(1 + \sin\alpha\cdot\cos\alpha)\end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi \text{ при}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha \ne \cos\alpha; \quad \alpha \ne \dfrac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\\ \sin\alpha\cdot\cos\alpha \ne 1, \text{ так как иначе } \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\alpha = 1\\ \cos\alpha = 1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\alpha = -1\\ \cos\alpha = -1\end{cases}\end{array}\right. \quad \emptyset,\end{cases}$$

то всегда $\sin\alpha\cdot\cos\alpha \ne 1$.

Таким образом, при $\alpha \ne \dfrac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$ данное равенство — тождество.

3. Вычислите:

1) $\cos\alpha$ при $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$, если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

$\alpha \in$ II четверти, значит $\cos\alpha < 0$.

$\boxed{\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}}$ **1.5** $\quad \cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

$\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{4}{3}$, тогда

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = \boxed{-\frac{3}{5}}.$$

2) $\sec\alpha$ при $\sin\alpha = -\dfrac{7}{25}$, если $270^\circ < \alpha < 360^\circ$;

$\alpha \in$ IV четверти, тогда $\sec\alpha > 0$;

$$\sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \quad \left(\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\right);$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\left(-\frac{7}{25}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{625-49}{625}}} = \frac{1}{\frac{24}{25}} = \boxed{\frac{25}{24}}.$$

3) $\dfrac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1+\cos\alpha}$ при $\sin\alpha = -0{,}5$, если $-90^\circ < \alpha < 0^\circ$;

$\alpha \in$ IV четверти, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha < 0$;

$$\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1+\cos\alpha} = \left(\sin\alpha + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\frac{1}{1+\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{1+\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha;$$

$\operatorname{tg}\alpha = \pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ **1.7** $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$;

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-0{,}5}{\sqrt{1-(-0{,}5)^2}} = -\frac{1}{2} : \sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Итак, $\dfrac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1+\cos\alpha} = \boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$.

4) $\dfrac{3\sin\alpha + 4\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{3}$;

$$\frac{3\sin\alpha + 4\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\cos\alpha\cdot\left(3\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 4\right)}{\cos\alpha\cdot\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha + 4}{1-\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \frac{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+4}{1+\frac{1}{3}} = \frac{-1+4}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4} = \boxed{2{,}25}.$$

5) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$;

$\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) =$
$= (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - 1)$.

Так как $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = 9$,

$\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = 9$;

$\operatorname{tg}^2\alpha + 2 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 9$;

$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = 7$, то

$\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha = 3\cdot(7-1) = \boxed{18}$.

6) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) =$
$= 1\cdot(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = 1 - 2\cos^2\alpha.$

Так как $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, то $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+4} = \dfrac{1}{5}$, тогда

$1 - 2\cos^2\alpha = 1 - 2\cdot\dfrac{1}{5} = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$;

Следовательно, $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \boxed{\dfrac{3}{5}}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

4. Решите уравнения:

1) $\cos\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$;

$\dfrac{2}{3}x - \dfrac{\pi}{3} = 2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}$; $\quad \dfrac{2}{3}x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$;

$x = \dfrac{\pi}{2} + 3\pi k \mid k\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2} + 3\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2) $2\sin\left(\dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$;

$\sin\left(\dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \mid k\in\mathbb{Z} \\ \dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n \mid n\in\mathbb{Z} \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} \dfrac{3x}{4} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2} + 2\pi k \\ \dfrac{3x}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{1}{2} + 2\pi n \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi+2}{3} + \dfrac{8\pi}{3}k \mid k\in\mathbb{Z} \\ x = \dfrac{3\pi+2}{3} + \dfrac{8\pi}{3}n \mid n\in\mathbb{Z} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi+2}{3} + \dfrac{8\pi}{3}k;\ \dfrac{3\pi+2}{3} + \dfrac{8\pi}{3}n \mid k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

3) $\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$;

$\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}$; $\quad x+\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{6}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}$;

$x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{5}+\pi k$; $\quad x=\frac{5\pi-6\pi}{30}+\pi k$;

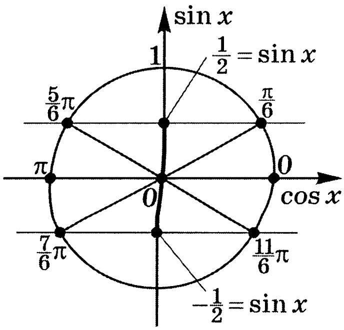
$x=-\frac{\pi}{30}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{30}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4) $4\sin^3 x=\sin x$;

$4\sin^3 x-\sin x=0$; $\quad \sin x(4\sin^2 x-1)=0$;

$\sin x(2\sin x+1)(2\sin x-1)=0$;



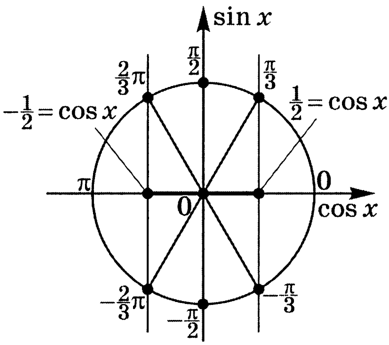
$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ 2\sin x-1=0\\ 2\sin x+1=0\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\frac{1}{2}\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\\ x=\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\pi k; \pi n \mid k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

5) $4\cos^3 x - \cos x = 0;$

$\cos x(2\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0;$



$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k; \dfrac{\pi}{2} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

6) $\dfrac{1 + \cos 2x}{\cos x} = 0.$

$$\begin{cases}1 + \cos 2x = 0\\ \cos x \neq 0\end{cases}; \qquad \begin{cases}\cos 2x = -1\\ \cos x \neq 0\end{cases}.$$

$$\begin{cases}2x = \pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\end{cases};$$

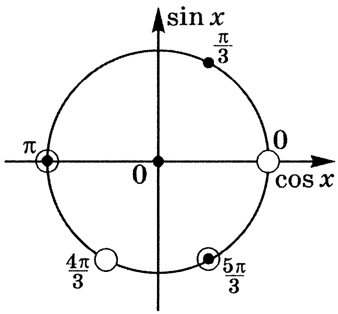
$$\begin{cases}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\end{cases} \qquad \emptyset.$$

Ответ: решений нет.

7) $\dfrac{1+\cos 3x}{2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x}=0;$

$$\begin{cases} 1+\cos 3x=0 \\ 2\sin x\left(\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\neq 0 \end{cases};\qquad \begin{cases} \cos 3x=-1 \\ \sin x\neq 0 \\ \sin x\neq -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3x=\pi+2\pi k \\ x\neq \pi n \\ x\neq (-1)^{t+1}\dfrac{\pi}{3}+\pi t \end{cases},$$



т. е. $x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}\pi k.$

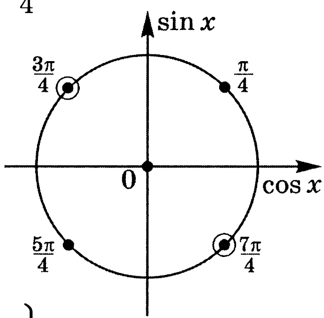
С учетом исключений (см. рисунок) получаем ответ.

Ответ: $\left\{x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$

8) $\dfrac{\cos 2x}{1+\operatorname{tg} x}=0;$

$$\begin{cases} \cos 2x=0 \\ \operatorname{tg} x+1\neq 0 \end{cases};\qquad \begin{cases} 2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k \\ x\neq -\dfrac{\pi}{4}+\pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k \\ x\neq -\dfrac{\pi}{4}+\pi n \end{cases}.$$



Ответ: $\left\{x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$

4

Основные тригонометрические формулы

Формулы приведения

Для решения тригонометрических задач будут использоваться следующие формулы приведения:

$\cos(\alpha + 90°) = -\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}(\alpha + 90°) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\cos(\alpha - 90°) = \sin\alpha$	$\operatorname{ctg}(\alpha - 90°) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\sin(\alpha + 90°) = \cos\alpha$	$\operatorname{tg}(\alpha + 90°) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin(\alpha - 90°) = -\cos\alpha$	$\operatorname{tg}(\alpha - 90°) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$	$\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$
$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$	$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$

3.1 – 3.12

$\cos(\alpha + 180°) = -\cos\alpha$	$\operatorname{ctg}(\alpha + 180°) = \operatorname{ctg}\alpha$
$\cos(\alpha - 180°) = -\cos\alpha$	$\operatorname{ctg}(\alpha - 180°) = \operatorname{ctg}\alpha$
$\sin(\alpha + 180°) = -\sin\alpha$	$\operatorname{tg}(\alpha + 180°) = \operatorname{tg}\alpha$
$\sin(\alpha - 180°) = -\sin\alpha$	$\operatorname{tg}(\alpha - 180°) = \operatorname{tg}\alpha$
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$	$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

3.13 – 3.24

$\cos(\alpha + 270°) = \sin\alpha$	$\operatorname{ctg}(\alpha + 270°) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\cos(\alpha - 270°) = -\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}(\alpha - 270°) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\sin(\alpha + 270°) = -\cos\alpha$	$\operatorname{tg}(\alpha + 270°) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin(\alpha - 270°) = \cos\alpha$	$\operatorname{tg}(\alpha - 270°) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}(270° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$
$\sin(270° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\operatorname{tg}(270° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$

3.25 – 3.36

Конечно, запоминать все эти формулы не нужно, достаточно понять простые правила:

1. Если изменение угла α происходит на $90°$; $270°$; $\ldots$; $(2k-1)\cdot 90°$, то название тригонометрических функций меняется на ко-функцию, т. е. косинус на синус и наоборот, тангенс на котангенс и наоборот.

2. Если изменение угла происходит на $180°$; $360°$; $\ldots$; $180°\cdot k$, то название функций не меняется.

3. Знак полученной после упрощения функции определяется по знаку исходной функции в левой части равенства в зависимости от того, в какой четверти функция была задана, полагая, что α принадлежит I четверти.

Аналогичное правило выполняется для углов, заданных в радианной мере. Обобщим:

1. $\sin(\alpha+\pi n)=\begin{cases}-\sin\alpha, & n \text{ — нечетное}\\ \sin\alpha, & n \text{ — четное}\end{cases};$

2. $\cos(\alpha+\pi n)=\begin{cases}-\cos\alpha, & n \text{ — нечетное}\\ \cos\alpha, & n \text{ — четное}\end{cases};$

3. $\operatorname{tg}(\alpha+\pi n)=\operatorname{tg}\alpha \quad \forall n\in\mathbb{Z};$

4. $\operatorname{ctg}(\alpha+\pi n)=\operatorname{ctg}\alpha \quad \forall n\in\mathbb{Z};$

5. $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}(2n-1)\right)=\begin{cases}\cos\alpha, & n \text{ — нечетное}\\ -\cos\alpha, & n \text{ — четное}\end{cases};$

6. $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}(2n-1)\right)=\begin{cases}-\sin\alpha, & n \text{ — нечетное}\\ \sin\alpha, & n \text{ — четное}\end{cases};$

7. $\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}(2n-1)\right)=-\operatorname{ctg}\alpha \quad \forall n\in\mathbb{Z};$

8. $\operatorname{ctg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}(2n-1)\right)=-\operatorname{tg}\alpha \quad \forall n\in\mathbb{Z}.$

Практикум 6

1. Докажите тождества:

1) $\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)[\cos(360^\circ+\alpha)-\sin\alpha]+\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\sin\alpha;$

2) $$\frac{\sqrt{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\right)+1}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)-\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}-$$
$$-\frac{2}{\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)-\operatorname{cosec}\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}+\cos\frac{\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5};$$

3) $$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)-\sin(\pi+\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)+\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}-$$
$$-\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=\sin\alpha;$$

4) $$\frac{2-\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{1-2\cos^2(\pi-\alpha)}+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-1.$$

2. Решите уравнения:

1) $2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0;$

2) $\cos\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}\right)-1=0;$

3) $3\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{5\pi}{36}\right)+\sqrt{3}=0;$

4) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0;$

5) $\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)=0;$

6) $6\sin^2 x-\sin x-2=0;$

7) $8\sin^2 x - (6-4\sqrt{3})\sin x - 3\sqrt{3} = 0$;

8) $2\cos^2 x + \sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x = 0$;

9) $1 - \sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x = 0$;

10) $4\sin^3 2x = \sin 2x$;

11) $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 3\sin(1{,}5\pi + x)$;

12) $2\cos^2 x - \cos x \cdot \sin x = 0$;

13) $2\cos(x - 1{,}5\pi) - 5\cos(x+\pi) = 0$;

14) $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x = 0$;

15) $2(\cos^4 x - \sin^4 x) = 1$;

16) $\dfrac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$;

17) $\dfrac{1 - 2\cos 2x}{\cos 2x - 2} = 0$;

18) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 5x} = 0$.

3. Решите неравенства:

1) $\sqrt{2} - 2\sin x > 0$;

2) $\cos x > -\dfrac{1}{2}$;

3) $2\sin x + \sqrt{3} \geqslant 0$;

4) $2\cos x \leqslant \sqrt{2}$.

Решение практикума 6

1. Докажите тождества:

1) $\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)[\cos(360^\circ+\alpha)-\sin\alpha]+\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\sin\alpha.$

$$\mathrm{L}=\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)[\cos(360^\circ+\alpha)-\sin\alpha]+\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=$$ **3.11**

$$=\operatorname{tg}\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)+\frac{\sin\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=$$

$$=\operatorname{tg}\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha+1}{1+\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\sin\alpha;\quad \begin{cases}\cos\alpha\neq 0\\ \sin\alpha\neq 0\end{cases}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=\sin\alpha\\ \Pi=\sin\alpha\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi \ \text{ при } \alpha\neq\frac{\pi}{2}k\,|\,k\in\mathbb{Z}.$$

2) $$\frac{\sqrt{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\right)+1}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)-\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}-$$

$$-\frac{2}{\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)-\operatorname{cosec}\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}+\cos\frac{\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}.$$

а) $$\frac{\sqrt{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)+1}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)-\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}=$$ **3.5** **3.3**

$$=\frac{\sqrt{2\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}+1}}{\sin^2\frac{\pi}{5}-\cos^2\frac{\pi}{5}}=\frac{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{5}+2\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}+\cos^2\frac{\pi}{5}}}{\sin^2\frac{\pi}{5}-\cos^2\frac{\pi}{5}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}}{\left(\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(\sin\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}\right)}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}};$$

б) $$\frac{2}{\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)-\operatorname{cosec}\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}=$$

$$=\frac{2}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)\right)^{-1}-\left(\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)\right)^{-1}}=$$

$$=\frac{2}{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{5}}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}}.$$

Теперь преобразуем левую часть уравнения:

$$\mathrm{L}=\frac{\sqrt{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\right)+1}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)-\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}-$$

$$-\frac{2}{\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)-\operatorname{cosec}\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}+\cos\frac{\pi}{5}=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}}-\frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}}+\cos\frac{\pi}{5}=$$

$$=\frac{1-2\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}}+\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\left(\sin\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}\right)^2}{\sin\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}}+\cos\frac{\pi}{5}=$$

$$=\sin\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=\sin\dfrac{\pi}{5}\\ \Pi=\sin\dfrac{\pi}{5}\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi,\ \text{что и требовалось доказать.}$$

3) $$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)-\sin(\pi+\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)+\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}-$$

$$-\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=\sin\alpha.$$

$$\mathrm{L}=\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)-\sin(\pi+\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)+\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}-$$

$$-\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}}+\operatorname{tg}\alpha\cdot(\cos\alpha-\sin\alpha)=$$

$$=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha+\frac{\sin\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}}=$$

$$=\sin\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha\left(\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha}\right)}{\frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha+1)}=$$

$$=\sin\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\sin\alpha;\qquad\begin{cases}\sin\alpha\neq 0\\ \cos\alpha\neq 0\end{cases}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=\sin\alpha\\ \Pi=\sin\alpha\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi \text{ при } \alpha\neq\frac{\pi}{2}k\mid k\in\mathbb{Z}.$$

4) $$\frac{2-\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{1-2\cos^2(\pi-\alpha)}+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-1.$$

$$\mathrm{L}=\frac{2-\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{1-2\cos^2(\pi-\alpha)}+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$$

$$=\frac{2-\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}}{1-2\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{2-\frac{1}{\cos^2\alpha}}{1-2\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}^2\alpha=$$

$$=\frac{\frac{2\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}}{1-2\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}^2\alpha=-\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{-1+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=-1;$$

$$\begin{cases} \cos^2\alpha \neq \dfrac{1}{2} \\ \cos\alpha \neq 0 \end{cases}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{L} = -1 \\ \Pi = -1 \end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi \text{ при } \begin{cases} \alpha \neq \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi k \\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

2. Решите уравнения:

1) $2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0.\quad \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

$2x - \dfrac{\pi}{6} = \pm\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z};\quad x = \dfrac{\pi}{12} \pm \dfrac{5\pi}{12} + \pi k.$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{12} \pm \dfrac{5\pi}{12} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

2) $\cos\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}\right) - 1 = 0.\quad \cos\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}\right) = 1;$

$\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3} = 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z};\quad x = \dfrac{1}{2} + 3\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{2} + 3\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

3) $3\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{5\pi}{36}\right) + \sqrt{3} = 0.\quad \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{5\pi}{36}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3};$

$x + \dfrac{5\pi}{36} = -\dfrac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z};\quad x = -\dfrac{11\pi}{36} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{-\dfrac{11\pi}{36} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

4) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0.$

$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$, тогда $\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1.$

$x + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$, т. е. $x = -\dfrac{5\pi}{12} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{-\dfrac{5\pi}{12} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

5) $\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)=0.$

$\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)=-\sqrt{3};\quad x+\dfrac{\pi}{12}=-\dfrac{\pi}{6}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z};$

$x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k.$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{4}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$

6) $6\sin^2 x-\sin x-2=0.$

Очевидно, что здесь квадратное уравнение.

$(\sin x)_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+48}}{12}=\dfrac{1\pm 7}{12};$

$\left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{1}{2};\\ \sin x=\dfrac{2}{3};\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x=(-1)^k\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\pi k \mid k\in\mathbb{Z};\\ x=(-1)^n\arcsin\dfrac{2}{3}+\pi n \mid n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Ответ: $\left\{(-1)^k\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\pi k;\,(-1)^n\arcsin\dfrac{2}{3}+\pi n \mid k,n\in\mathbb{Z}\right\}.$

7) $8\sin^2 x-(6-4\sqrt{3})\sin x-3\sqrt{3}=0.$

$(\sin x)_{1,2}=\dfrac{-2\sqrt{3}+3\pm\sqrt{(2\sqrt{3})^2+12\sqrt{3}+9}}{8}=$

$=\dfrac{-2\sqrt{3}+3\pm(2\sqrt{3}+3)}{8};$

$\left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin x=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{3}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z};\\ x=(-1)^n\arcsin\left(\dfrac{3}{4}\right)+\pi n \mid n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Ответ: $\left\{(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{3}+\pi k;\,(-1)^n\arcsin\left(\dfrac{3}{4}\right)+\pi n \mid k,n\in\mathbb{Z}\right\}.$

Однородным тригонометрическим уравнением n-й степени называется уравнение вида
$$\boldsymbol{A_0 \sin^n x + A_1 \sin^{n-1} x \cos x + A_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \ldots + A_n \cos^n x = 0.}$$

Примечания.

1. При $n = 1$ $A_0 \sin x + A_1 \cos x = 0$ — уравнение первой степени.

При $n=2$ $A_0 \sin^2 x + A_1 \sin x \cdot \cos x + A_2 \cos^2 x = 0$ — уравнение второй степени и т. д.

2. Если в однородном уравнении $\sin x = 0$, то тогда и $\cos x = 0$ и наоборот, что одновременно выполняться не может. Значит, возможно поделить обе части уравнения на $(\sin x)^k$ или $(\cos x)^k$ $(k \leqslant n)$, и при этом потери корней не произойдет.

8) $2\cos^2 x + \sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x = 0.$

Здесь мы имеем дело с однородным уравнением. Поделим обе части уравнения на $\sin^2 x$, получим

$2\operatorname{ctg}^2 x + 1 - 3\operatorname{ctg} x = 0;$

$$(\operatorname{ctg} x)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg} x = 1 \\ \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \\ x = \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \pi k; \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{2} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

9) $1 - \sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x = 0.$

$1 + \sin x - (\sin x \cdot \cos x + \cos x) = 0;$

$1 + \sin x - \cos x(\sin x + 1) = 0;$ $(\sin x + 1)(1 - \cos x) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos x = 1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

10) $4\sin^3 2x = \sin 2x$.

$\sin 2x(2\sin 2x - 1)(2\sin 2x + 1) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2} \\ \sin 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. ; \qquad \left[\begin{array}{l} 2x = \pi k \\ 2x = (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n \\ 2x = (-1)^t\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \pi t \end{array}\right. ;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2}k \\ x = (-1)^n\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}n \\ x = (-1)^t\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + \dfrac{\pi}{2}t \end{array}\right. \qquad | \, k, n, t \in \mathbb{Z}\,.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2}k; (-1)^n\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}n;\right.$
$\left.(-1)^t\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + \dfrac{\pi}{2}t \,|\, k, n, t \in \mathbb{Z}\right\}.$

11) $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 3\sin\left(1{,}5\pi + x\right).$

$2\sin^2 x = -3\cos x; \qquad 2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0;$

$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0;$

$$(\cos x)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4};$$

а) $\cos x = 2;$
$2 \notin E(y = \cos x); \qquad 2 \notin [-1; 1],$
тогда $x \in \emptyset$.

б) $\cos x = -\dfrac{1}{2};$

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k.$$

Ответ: $\left\{\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

12) $2\cos^2 x - \cos x \cdot \sin x = 0.$

$\cos x \cdot (2\cos x - \sin x) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \operatorname{tg} x = 2\end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k\\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n\end{array}\right. \quad | \, k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} 2 + \pi n \,|\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

13) $2\cos(x - 1{,}5\pi) - 5\cos(x + \pi) = 0.$

$-2\sin x + 5\cos x = 0; \qquad \operatorname{tg} x = 2{,}5;$

$x = \operatorname{arctg}(2{,}5) + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\{\operatorname{arctg}(2{,}5) + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$

14) $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x = 0.$

$\sin x\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l}x = \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z};\\ x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n \,|\, n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\pi k; \dfrac{\pi}{3} + \pi n \,|\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

15) $2(\cos^4 x - \sin^4 x) = 1.$

$2(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = 1;$

$2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1; \qquad 2(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) = 1;$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4}; \quad \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\\ x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\end{array}\right. \quad | \, k, n \in \mathbb{Z}.$$

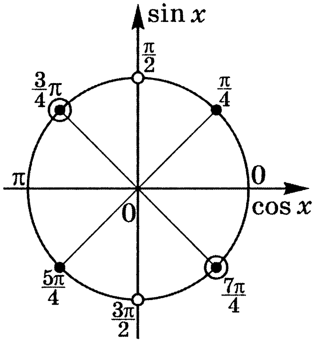
Можно объединить: $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi t \,|\, t \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi t \,|\, t \in \mathbb{Z}\right\}.$

16) $\dfrac{\cos 2x}{1+\operatorname{tg} x}=0.$

$$\begin{cases}\cos 2x=0\\ 1+\operatorname{tg} x\neq 0\end{cases};\qquad \begin{cases}\cos 2x=0\\ \cos x\neq 0\\ \operatorname{tg} x\neq -1\end{cases};$$

$$\begin{cases}2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi t\qquad \mid k,t,n\in\mathbb{Z}\,;\\ x\neq-\dfrac{\pi}{4}+\pi n\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k\\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi t\\ x\neq-\dfrac{\pi}{4}+\pi n\end{cases};$$



$$x=\frac{\pi}{4}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$

17) $\dfrac{1-2\cos 2x}{\cos 2x-2}=0.$

$$\begin{cases}1-2\cos 2x=0\\ \cos 2x-2\neq 0\end{cases};\qquad 2\notin E(y=\cos x);\qquad 2\notin[-1;1];$$

$$\cos 2x=\frac{1}{2};\quad 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\mid k\in\mathbb{Z};$$

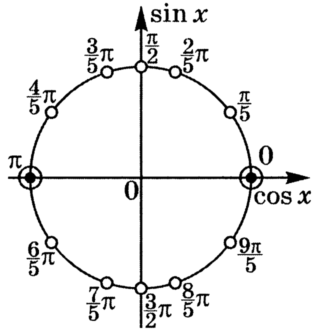
$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$

18) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 5x} = 0.$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin 5x \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \pi k \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi t \\ 5x \neq \pi n \end{cases} \mid k, t, n \in \mathbb{Z}; \quad x \in \emptyset.$$

$$\begin{cases} x = \pi k \\ x \neq \dfrac{\pi}{5} n \end{cases}.$$

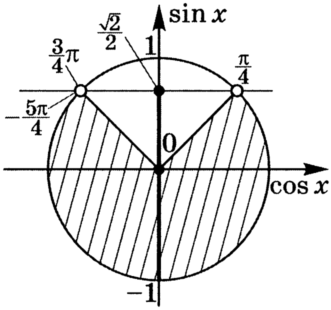


При n, кратном 5, $\pi k = \dfrac{\pi}{5} n$, поэтому уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет.

3. Решите неравенства:

1) $\sqrt{2} - 2\sin x > 0.$



$2\sin x - \sqrt{2} < 0$; $\quad \sin x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Исходя из построения на тригонометрической окружности может показаться, что, с одной стороны, $x < \dfrac{\pi}{4}$, а с другой, $x > \dfrac{3\pi}{4}$, и тогда выполняется двойное неравенство $\dfrac{3}{4}\pi < x < \dfrac{\pi}{4}$ — но это ложь.

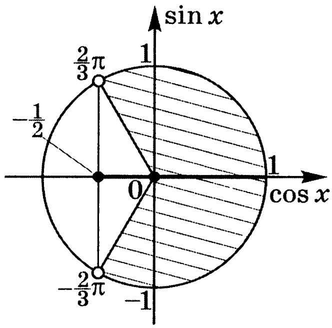
Учтем, что для $\forall \alpha$ выполняется $\sin(\alpha - 2\pi) = \sin \alpha$, тогда $\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{5}{4}\pi\right)$, и неравенство принимает вид $-\dfrac{5}{4}\pi < x < \dfrac{\pi}{4}$ — верно.

Значит, учитывая полное число оборотов, получим

$-\dfrac{5}{4}\pi + 2\pi k < x < \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{ \left(-\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k; \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

2) $\cos x > -\dfrac{1}{2}$.



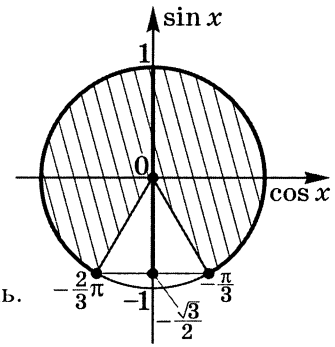
Исходя из построения на тригонометрической окружности $-\dfrac{2}{3}\pi < x < \dfrac{2}{3}\pi$, тогда, учитывая полное число оборотов, получаем

$$\frac{2}{3}\pi + 2\pi k > x > -\frac{2}{3}\pi + 2\pi k.$$

Ответ: $\left\{\left(-\dfrac{2}{3}\pi + 2\pi k; \dfrac{2}{3}\pi + 2\pi k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3) $2\sin x + \sqrt{3} \geqslant 0$.

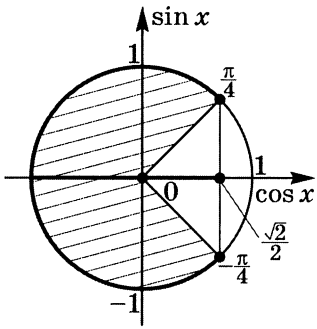
$\sin x \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Исходя из построения на тригонометрической окружности может показаться, что $-\dfrac{2}{3}\pi \geqslant x \geqslant -\dfrac{\pi}{3}$, но это — ложь.

Так как $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$, то $\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right) = \sin\dfrac{4}{3}\pi$, и $\dfrac{4\pi}{3} \geqslant x \geqslant -\dfrac{\pi}{3}$ — верно. Значит, учитывая полное число оборотов, получим $\dfrac{4}{3}\pi + 2\pi k \geqslant x \geqslant -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$.

Ответ: $\left\{\left[-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k; \dfrac{4}{3}\pi + 2\pi k\right] \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.



4) $2\cos x \leqslant \sqrt{2}$.

$\cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Исходя из построения на тригонометрической окружности может показаться, что $x \geqslant \dfrac{\pi}{4}$ и $x \leqslant -\dfrac{\pi}{4}$, получим $-\dfrac{\pi}{4} \geqslant x \geqslant \dfrac{\pi}{4}$, но это — ложь.

Так как $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$, то $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{7}{4}\pi$, и $\dfrac{7\pi}{4} \geqslant x \geqslant \dfrac{\pi}{4}$ — верно. Значит, учитывая полное число оборотов, получим $\dfrac{7}{4}\pi + 2\pi k \geqslant x \geqslant \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$.

Ответ: $\left\{\left[\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k; 1\dfrac{3}{4}\pi + 2\pi k\right] \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Тренировочная работа 5

1. Докажите тождества (без указания условий существования):

1) $$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha;$$

2) $$\frac{\cos^2(90^\circ+x)}{\cos(x+180^\circ)+\cos(90^\circ-x)}-$$
$$-\frac{\sin(360^\circ+x)-\sin(x-90^\circ)}{\operatorname{ctg}^2(x+90^\circ)-1}=\sin x+\cos x;$$

3) $\cos(360^\circ-\alpha)(\operatorname{cosec}\alpha-\sec\alpha)+$
$+\cos(90^\circ-\alpha)(\operatorname{cosec}\alpha+\sec\alpha)=\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha.$

2. Решите уравнения:

1) $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=0{,}5;$

2) $\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+3\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0;$

3) $6\cos^2x+\cos x=1;$

4) $2\sin\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2};$

5) $\cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right);$

6) $4\cos^2x+2\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x+\sqrt{3}=0;$

7) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=-3;$

8) $4\cos^3x-3\cos x=0;$

9) $6\sin^2x+\sin x\cdot\cos x-\cos^2x=2;$

10) $3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\cos x+2\cos^2x=0;$

11) $\sqrt{3}\cos^2 x - \sin x \cdot \cos x = 0;$

12) $\dfrac{\cos x}{1 - \cos 4x} = 0;$

13) $\cos^2 x + 3\sin^2 x = 2;$

14) $2\sin^2 x - \cos x \cdot \sin x = 0;$

15) $\dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0;$

16) $\operatorname{ctg} x \cdot \cos x - \operatorname{ctg} x - \cos x + 1 = 0;$

17) $3\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = 4\cos(1{,}5\pi - x);$

18) $\dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = 0.$

Решение тренировочной работы 5

1. Докажите тождества (без указания условий существования):

1) $$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

$$\text{L}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$$
$$=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$$
$$=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)}=$$
$$=\frac{2\sin\alpha}{\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{2\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=$$
$$=\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L}=2\operatorname{tg}^2\alpha\\ \Pi=2\operatorname{tg}^2\alpha\end{array}\right|\Rightarrow \text{L}=\Pi.$$

2) $$\frac{\cos^2(90^\circ+x)}{\cos(x+180^\circ)+\cos(90^\circ-x)}-$$
$$-\frac{\sin(360^\circ+x)-\sin(x-90^\circ)}{\operatorname{ctg}^2(x+90^\circ)-1}=\sin x+\cos x.$$

$$\text{L}=\frac{\cos^2(90^\circ+x)}{\cos(x+180^\circ)+\cos(90^\circ-x)}-$$
$$-\frac{\sin(360^\circ+x)-\sin(x-90^\circ)}{\operatorname{ctg}^2(x+90^\circ)-1}=$$
$$=\frac{\sin^2x}{\sin x-\cos x}-\frac{\sin x+\cos x}{\operatorname{tg}^2x-1}=$$
$$=\frac{\sin^2x}{\sin x-\cos x}-\frac{(\sin x+\cos x)\cos^2x}{\sin^2x-\cos^2x}=$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x} = \sin x + \cos x.$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L} = \sin x + \cos x \\ \Pi = \sin x + \cos x \end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

3) $\cos(360^\circ - \alpha)(\operatorname{cosec}\alpha - \sec\alpha) +$
$+ \cos(90^\circ - \alpha)(\operatorname{cosec}\alpha + \sec\alpha) = \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha.$

$$\mathrm{L} = \cos(360^\circ - \alpha)(\operatorname{cosec}\alpha - \sec\alpha) +$$
$$+ \cos(90^\circ - \alpha)(\operatorname{cosec}\alpha + \sec\alpha) =$$
$$= \cos\alpha\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha}\right) + \sin\alpha\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right) =$$
$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - 1 + 1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$$
$$= \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}.$$

$$\Pi = \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\alpha};$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L} = \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha \\ \Pi = \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

2. Решите уравнения:

1) $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = 0{,}5.$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{12} + 2\pi k \\ \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 4\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = 1{,}5\pi + 4\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6} + 4\pi k; 1{,}5\pi + 4\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

2) $\sqrt{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+3\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0.$

Разделим обе части на $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$:

$\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+3=0;\quad \operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{3}{\sqrt{3}};$

$x-\dfrac{\pi}{3}=\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{3}{\sqrt{3}}\right)+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z};$

$x=\dfrac{\pi}{3}-\operatorname{arctg}\left(\dfrac{3}{\sqrt{3}}\right)+\pi k.$

Так как $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ и $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$, то $x=\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\{\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$.

3) $6\cos^2 x+\cos x=1.$

$6\cos^2 x+\cos x-1=0;$

$(\cos x)_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 6}}{2\cdot 6}=\dfrac{-1\pm 5}{12};$

$$\left[\begin{aligned}&\cos x=-\frac{1}{2}\\&\cos x=\frac{1}{3}\end{aligned}\right.;$$

$$\left[\begin{aligned}&x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\\&x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right.;$$

$$\left[\begin{aligned}&x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\\&x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right..$$

Ответ: $\left\{\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k;\pm\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi n\,|\,k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

4) $2\sin\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$. $\sin\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\left[\begin{array}{l}\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+2\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\\ \frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=\frac{3\pi}{4}+2\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\frac{3}{4}x=\frac{-2+\pi}{4}+2\pi k\\ \frac{3}{4}x=\frac{-2+3\pi}{4}+2\pi n\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{-2+\pi}{3}+\frac{8\pi}{3}k\\ x=\frac{-2+3\pi}{3}+\frac{8\pi}{3}n\end{array}\right.\,|\,k,n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{-2+\pi}{3}+\frac{8\pi}{3}k;\,\frac{-2+3\pi}{3}+\frac{8\pi}{3}n\,|\,k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

5) $\cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)$. $\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}$.

Зная, что $\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{6}$, и используя общую формулу решения уравнения $\operatorname{ctg}x=m$, получим

$$x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{6}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z};\quad x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{5}+\pi k;$$

$$x=\frac{11\pi}{30}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{11\pi}{30}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

6) $4\cos^2x+2(\sqrt{3}+1)\cos x+\sqrt{3}=0$.

$$(\cos x)_{1,2}=\frac{-2(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{4\cdot(\sqrt{3}+1)^2-16\sqrt{3}}}{8}=$$

$$=\frac{-2\sqrt{3}-2\pm2(\sqrt{3}-1)}{8};$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{1}{2}\\ \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{aligned} x &= \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ x &= \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{aligned}\right. \quad | \, k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \,|\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

7) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = -3$.

$\operatorname{ctg}\left(5x+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{\sqrt{3}}$; $5x+\frac{\pi}{3} = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right) + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}$;

$5x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + \pi k$; $\quad 5x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \pi k$;

$5x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\quad x = -\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k \,|\, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

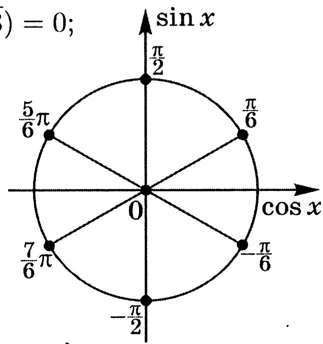
8) $4\cos^3 x - 3\cos x = 0$.

$\cos x(4\cos^2 x - 3) = 0$;

$\cos x(2\cos x - \sqrt{3})(2\cos x + \sqrt{3}) = 0$;

$$\left[\begin{aligned} &\cos x = 0 \\ &2\cos x - \sqrt{3} = 0 \\ &2\cos x + \sqrt{3} = 0 \end{aligned}\right.;$$

$$\left[\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z} \\ x &= \pm\frac{\pi}{6} + \pi n \,|\, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right..$$



Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm\frac{\pi}{6} + \pi n \,|\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}$

или $\left\{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

9) $6\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 2.$

$6\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 0;$

$4\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0;$

$4\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 3 = 0;$

$(\mathrm{tg}\, x)_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 4 \cdot 3}}{8} = \dfrac{-1 \pm 7}{8};$

$\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = -1 \\ \mathrm{tg}\, x = \dfrac{3}{4} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z} \\ x = \mathrm{arctg}\,\dfrac{3}{4} + \pi n \,|\, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right..$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + \pi k; \mathrm{arctg}\,\dfrac{3}{4} + \pi n \,|\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

10) $3\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - 2\cos x + 2\cos^2 x = 0.$

$3\sin^2 x - 2\cos x + 2\cos^2 x = 0;$

$3(1 - \cos^2 x) - 2\cos x + 2\cos^2 x = 0;$

$3 - 3\cos^2 x - 2\cos x + 2\cos^2 x = 0;$

$-\cos^2 x - 2\cos x + 3 = 0; \quad \cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0.$

По теореме Виета

$\left[\begin{array}{l} \cos x = -3 \notin [-1; 1] \\ \cos x = 1 \end{array}\right.; \quad \cos x = 1; \quad x = 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\{2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$

11) $\sqrt{3}\cos^2 x - \sin x \cdot \cos x = 0.$

$\cos x(\sqrt{3}\cos x - \sin x) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \end{array}\right.;$

$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sqrt{3} - \mathrm{tg}\, x = 0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \mathrm{tg}\, x = \sqrt{3} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n \,|\, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right..$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \dfrac{\pi}{3} + \pi n \,|\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

12) $\dfrac{\cos x}{1-\cos 4x}=0.$

$$\begin{cases}\cos x=0\\ 1-\cos 4x\neq 0\end{cases};\quad \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\\ 4x\neq 2\pi n\mid n\in\mathbb{Z}\end{cases};$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\\ x\neq \dfrac{\pi}{2}n\mid n\in\mathbb{Z}\end{cases};\quad \emptyset.$$

Ответ: уравнение решения не имеет.

13) $\cos^2 x+3\sin^2 x=2.$

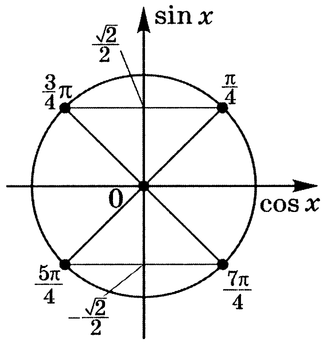
$\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin^2 x=2;$

$1+2\sin^2 x=2;\quad 2\sin^2 x=1;$

$\sin^2 x=\dfrac{1}{2};$

$\sin x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

$x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k\mid k\in\mathbb{Z}.$



Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$

14) $2\sin^2 x-\cos x\cdot\sin x=0.$

$\sin x(2\sin x-\cos x)=0;$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ 2\sin x-\cos x=0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ 2-\operatorname{ctg} x=0\end{array}\right.;$$

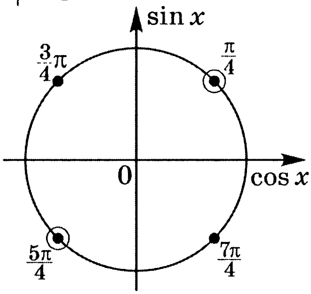
$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \operatorname{ctg} x=2\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=\pi n\mid n\in\mathbb{Z}\\ x=\operatorname{arcctg} 2+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.;$$

Ответ: $\{\pi n;\operatorname{arcctg} 2+\pi k\mid k,n\in\mathbb{Z}\}.$

15) $\dfrac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=0.$

$\begin{cases}\cos 2x=0\\ \sin 2x\neq 1\end{cases};\quad \begin{cases}2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\\ 2x\neq\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\end{cases};$

$\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k\\ x\neq\dfrac{\pi}{4}+\pi n\end{cases};$



$x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi t\,|\,t\in\mathbb{Z}.$

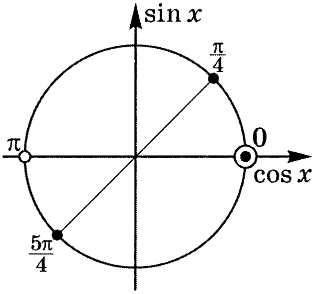
Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{4}+\pi t\,|\,t\in\mathbb{Z}\right\}.$

16) $\operatorname{ctg}x\cdot\cos x-\operatorname{ctg}x-\cos x+1=0.$

$\operatorname{ctg}x(\cos x-1)-(\cos x-1)=0;\quad (\cos x-1)(\operatorname{ctg}x-1)=0;$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \operatorname{ctg}x=1\end{array}\right.;\\ \sin x\neq 0\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.;\\ x\neq\pi t\,|\,t\in\mathbb{Z}\end{cases}$



$x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\right\}.$

17) $3\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=4\cos(1{,}5\pi-x).$

$3\cos x=4\cdot(-\sin x);\quad 3\cos x+4\sin x=0;\quad 3+4\operatorname{tg}x=0;$

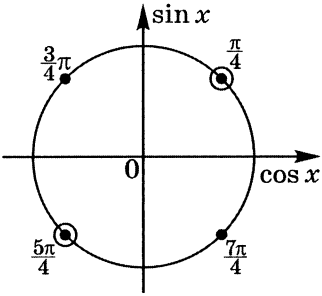
$\operatorname{tg}x=-\dfrac{3}{4};\quad x=\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{3}{4}\right)+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{3}{4}\right)+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

18) $\dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = 0.$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos x - \sin x \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{tg} x \neq 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases}; \quad x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi t \mid t \in \mathbb{Z}.$$



Ответ: $\left\{ -\dfrac{\pi}{4} + \pi t \mid t \in \mathbb{Z} \right\}$.

Теоремы сложения

Напомним теоремы сложения.

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta;$ **4.1**

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha;$ **4.2**

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta;$ **4.3**

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta;$ **4.4**

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \quad \begin{cases} \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n \\ \alpha + \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi t \end{cases} \quad | k, n, t \in \mathbb{Z};$$ **4.5**

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \quad \begin{cases} \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n \\ \alpha - \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi t \end{cases} \quad | k, n, t \in \mathbb{Z}.$$ **4.6**

Практикум 7

1. Вычислите:

1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ при $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$;

2) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$ и $\sin\beta = \dfrac{7}{25}$ при $90° < \beta < 180°$;

3) $\operatorname{tg}(45° - \alpha)$, если $\sec\alpha = \dfrac{25}{24}$ при $0° < \alpha < 90°$.

2. Вычислите:

1) $\sin 75°$;

2) $\sin 127° \cdot \cos 23° + \cos 194° + \cos 37° \cdot \cos 383°$;

3) $\cos(150° - \alpha) - \cos(210° + \alpha)$;

4) $\sin(65° + \alpha)$, если $\sin(20° + \alpha) = 0{,}6$ при $0° < \alpha < 30°$.

3. Упростите:

1) $\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cdot\sin\beta$;

2) $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$;

3) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{30}\cdot\cos\frac{\pi}{15}+\sin\frac{\pi}{30}\cdot\sin\frac{\pi}{15}}{\sin\frac{7\pi}{30}\cdot\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{7\pi}{30}\cdot\sin\frac{4\pi}{15}}$;

4) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{2\pi}{15}-\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{15}}$.

4. Докажите:

1) $\sin(30^\circ+x)\cdot\cos x-\cos(30^\circ+x)\cdot\sin x=\dfrac{1}{2}$;

2) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha+1=\sec 2\alpha$;

3) $\alpha+\beta=45^\circ$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2}{5}$ и $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{3}{7}$ при $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$.

5. Решите уравнения:

1) $\sin 2x\cdot\cos x+\cos 2x\cdot\sin x=0$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\sqrt{3}$;

3) $\cos(m+x)-\cos(m-x)=0$;

4) $\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\sin x$;

5) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}-x\right)-2\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{12}-x\right)+2\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin x}=1$;

6) $\operatorname{tg}^2 x-5\sec x+7=0$;

7) $2\sin^2 x-3\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x=0$.

Решение практикума 7

1. Вычислите:

1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$, если $\sin\alpha=-0{,}6$ при $\pi<\alpha<1{,}5\pi$.

4.4 $$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha=\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha;$$

$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ 1.4

$\alpha\in$ III четверти, т. е. $\cos\alpha<0$, значит

$\cos\alpha=-\sqrt{1-(-0{,}6)^2}=-\sqrt{1-0{,}36}=-0{,}8.$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=\boxed{-\frac{4+3\sqrt{3}}{10}}.$$

2) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$ и $\sin\beta=\dfrac{7}{25}$ при $90^\circ<\beta<180^\circ$.

Так как $\beta\in$ II, значит $\cos\beta<0$.

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2}=-\frac{24}{25};$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{7}{25}:\left(-\frac{24}{25}\right)=-\frac{7}{24};$$

$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$ 4.6

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{1+2\cdot\left(-\frac{7}{24}\right)}{2+\frac{7}{24}}=\frac{24-14}{48+7}=\frac{10}{55}=\boxed{\frac{2}{11}}.$$

3) $\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)$, если $\sec\alpha=\dfrac{25}{24}$ при $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

$$\sec\alpha=\frac{25}{24};\quad \cos\alpha=\frac{24}{25};$$

$\alpha\in$ I, значит $\sin\alpha>0$.

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2}=\frac{7}{25};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{7}{25}:\frac{24}{25}=\frac{7}{24};$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha};$$ 4.6

$$\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)=\frac{1-\frac{7}{24}}{1+\frac{7}{24}}=\boxed{\frac{17}{31}}.$$

2. Вычислите:

1) $\sin 75^\circ =$

$= \sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cdot\cos 45^\circ+\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ =$ 4.1

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}.$

2) $\sin 127^\circ\cdot\cos 23^\circ+\cos 194^\circ+\cos 37^\circ\cdot\cos 383^\circ.$

а) $\sin 127^\circ=\sin(37^\circ+90^\circ)=\cos 37^\circ;$
б) $\cos 194^\circ=\cos(14^\circ+180^\circ)=-\cos 14^\circ;$
в) $\cos 383^\circ=\cos(23^\circ+360^\circ)=\cos 23^\circ.$

$\sin 127^\circ\cdot\cos 23^\circ+\cos 194^\circ+\cos 37^\circ\cdot\cos 383^\circ=$

$=\cos 37^\circ\cdot\cos 23^\circ+\cos 37^\circ\cdot\cos 23^\circ-\cos 14^\circ=$

$=-\cos 14^\circ+2\cos 37^\circ\cdot\cos 23^\circ=$

$=-\cos(37^\circ-23^\circ)+2\cos 37^\circ\cdot\cos 23^\circ=$

$=-\cos 37^\circ\cdot\cos 23^\circ-\sin 37^\circ\cdot\sin 23^\circ+2\cos 37^\circ\cdot\cos 23^\circ=$

$=-\sin 37^\circ\cdot\sin 23^\circ+\cos 37^\circ\cdot\cos 23^\circ=$

$=\cos(37^\circ+23^\circ)=\cos 60^\circ=\boxed{\dfrac{1}{2}}.$

3) $\cos(150^\circ-\alpha)-\cos(210^\circ+\alpha).$

а) $\cos(150^\circ-\alpha)=\cos 150^\circ\cdot\cos\alpha+\sin 150^\circ\cdot\sin\alpha=$ 4.4
$=\cos(180^\circ-30^\circ)\cdot\cos\alpha+\sin(180^\circ-30^\circ)\cdot\sin\alpha=$
$=-\cos 30^\circ\cdot\cos\alpha+\sin 30^\circ\cdot\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\sin\alpha;$

б) $\cos(210^\circ+\alpha)=\cos\Big(30^\circ+(180^\circ+\alpha)\Big)=$
$=\cos 30^\circ\cdot\cos(180^\circ+\alpha)-\sin 30^\circ\cdot\sin(180^\circ+\alpha)=$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\cos\alpha)-\dfrac{1}{2}\cdot(-\sin\alpha)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\sin\alpha.$

Тогда $\cos(150^\circ - \alpha) - \cos(210^\circ + \alpha) =$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha = \boxed{0}.$$

4) $\sin(65^\circ + \alpha)$, если $\sin(20^\circ + \alpha) = 0{,}6$ при $0^\circ < \alpha < 30^\circ$.

$\cos(20^\circ + \alpha) > 0$, так как $20^\circ + \alpha \in$ I четверти, тогда

$\cos(20^\circ + \alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(20^\circ + \alpha)}$, т. е.

$\cos(20^\circ + \alpha) = \sqrt{1 - (0{,}6)^2} = 0{,}8$.

$\sin(65^\circ + \alpha) = \sin\left[45^\circ + (20^\circ + \alpha)\right] =$

$= \sin 45^\circ \cdot \cos(20^\circ + \alpha) + \cos 45^\circ \cdot \sin(20^\circ + \alpha) =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(20^\circ + \alpha) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(20^\circ + \alpha);$$

$$\sin(65^\circ + \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}(0{,}8 + 0{,}6) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1{,}4 = \boxed{0{,}7\sqrt{2}}.$$

3. Упростите:

1) $\sin(\alpha + \beta) - \cos\alpha \cdot \sin\beta =$

$= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta = \boxed{\sin\alpha \cdot \cos\beta}$.

2) $$\frac{\sin\frac{3\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{8} - \cos\frac{3\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} =$$

$$= \frac{-\cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \frac{-\cos\frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \frac{0}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = 0$$

при $\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) \neq 0 \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + \alpha \neq \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\pi}{4} + \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases}$;

$$\begin{cases} \alpha \neq -\dfrac{\pi}{4} + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \pi n \,|\, n \in \mathbb{Z} \end{cases}; \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} t \,|\, t \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{8} \cdot \sin\frac{\pi}{8} - \cos\frac{3\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = 0$

при $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} t \,|\, t \in \mathbb{Z}$.

3) $$\frac{\cos\frac{\pi}{30} \cdot \cos\frac{\pi}{15} + \sin\frac{\pi}{30} \cdot \sin\frac{\pi}{15}}{\sin\frac{7\pi}{30} \cdot \cos\frac{4\pi}{15} + \cos\frac{7\pi}{30} \cdot \sin\frac{4\pi}{15}} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{15} - \frac{\pi}{30}\right)}{\sin\left(\frac{7\pi}{30} + \frac{4\pi}{15}\right)} = \frac{\cos\frac{\pi}{30}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \boxed{\cos\frac{\pi}{30}}.$$

4) $$\frac{\sin\frac{\pi}{10} \cdot \sin\frac{\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{10} \cdot \cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5} \cdot \sin\frac{2\pi}{15} - \cos\frac{\pi}{5} \cdot \cos\frac{2\pi}{15}} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{10}\right)}{-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \boxed{-2\cos\frac{\pi}{10}}.$$

4. Докажите:

1) $\sin(30^\circ + x) \cdot \cos x - \cos(30^\circ + x) \cdot \sin x = \dfrac{1}{2}$.

$$\text{L} = \sin(30^\circ + x) \cdot \cos x - \cos(30^\circ + x) \cdot \sin x =$$

$$= \sin(30^\circ + x - x) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{L} = \dfrac{1}{2} \\ \Pi = \dfrac{1}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi.$$

2) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 1 = \sec 2\alpha$.

$$\mathrm{L} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 1 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + 1 =$$

$$= \frac{\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha + \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\cos 2\alpha} = \sec 2\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L} = \sec 2\alpha \\ \Pi = \sec 2\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

Примечание. На будущее, если нет специального требования установить область определения равенства, то мы по умолчанию не будем выяснять множество, на котором данное равенство есть тождество.

3) $\alpha + \beta = 45^\circ$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{5}$ и $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{3}{7}$ при $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

Так как $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{3}{7}$; то $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{5}$; $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{7}$.

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}} \quad \textbf{4.5}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{7}}{1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}} = \frac{14+15}{35-6} = \frac{29}{29} = 1,$$

тогда $\alpha + \beta = 45^\circ + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}$, но $0 < \alpha + \beta < 180^\circ$, тогда $\alpha + \beta = 45^\circ$, что и требовалось доказать.

5. Решите уравнения:

1) $\sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x = 0$.

$\sin(2x + x) = 0$; $\sin 3x = 0$; $3x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$;

$x = \dfrac{\pi}{3} k \mid k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{3} k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\sqrt{3}.$

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3};$$

$$\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+\pi k;\quad x=\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2}{3}\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

3) $\cos(m+x)-\cos(m-x)=0.$

$$\cos m\cdot\cos x-\sin m\cdot\sin x-\cos m\cdot\cos x-\sin m\cdot\sin x=0;$$

$$-2\sin m\cdot\sin x=0;$$

$$\sin x=0;\quad x=\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z};$$

$$\sin m=0;\quad m=\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=\pi k$, если $m\neq\pi n\,|\,k,n\in\mathbb{Z}$;
x — любое, если $m=\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}$.

4) $\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\sin x.$

$$\cos x\cdot\cos\frac{2\pi}{3}-\sin x\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}\sin x;$$

$$-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\sqrt{3}\sin x=0;$$

$$-\cos x+\sqrt{3}\sin x=0;\quad \operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{3};\quad x=\frac{\pi}{6}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{6}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

5) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}-x\right)-2\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{12}-x\right)+2\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin x}=1.$

$$\frac{\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos x+\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin x-2\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin x}{\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos x-\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin x+2\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin x}=1;$$

$$\frac{\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos x-\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin x}{\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{12}}=1;\qquad \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}=1;$$

$$\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=1;\quad x+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\pi k;\quad x=\frac{\pi}{6}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

6) $\operatorname{tg}^2 x-5\sec x+7=0.$

$D(\text{У}):\ \cos x\neq 0;$

$$\operatorname{tg}^2 x-\frac{5}{\cos x}+7=0;\quad \sin^2 x-5\cos x+7\cos^2 x=0;$$

$$6\cos^2 x-5\cos x+1=0;$$

$$(\cos x)_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\frac{5\pm1}{12};\quad \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x=\frac{1}{3}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\in D(\text{У}).$$

Ответ: $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k;\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n\,|\,k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

7) $2\sin^2 x-3\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x=0.\qquad :\cos^2 x$

($\cos x=0$ не является корнем однородного уравнения).

$$2\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-3=0;$$

$$(\operatorname{tg} x)_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\frac{-1\pm5}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=1\\ \operatorname{tg} x=-\frac{3}{2}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\\ x=-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k;-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n\,|\,k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

Тренировочная работа 6

1. Вычислите:

1) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ при $1{,}5\pi < \alpha < 2\pi$.

2) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$ при $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$;

3) $\alpha - \beta$, если $\sin\alpha = -\frac{40}{41}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{9}{40}$ при $270^\circ < \alpha < 360^\circ$, $180^\circ < \beta < 270^\circ$.

2. Вычислите:

1) $\dfrac{\sin 65^\circ \cdot \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \cdot \cos 65^\circ}{\cos 40^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cdot \sin 40^\circ}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{tg} 213^\circ}{1 - \operatorname{tg} 192^\circ \cdot \operatorname{ctg} 237^\circ}$;

3) $\cos(120^\circ - \alpha) + \cos(\alpha + 60^\circ)$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{15} + \operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}}{1 + \operatorname{tg}\frac{14\pi}{15} \cdot \operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}}$.

3. Упростите:

1) $\sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin(\alpha - \beta)$;

2) $\dfrac{\sin 65^\circ \cdot \cos 85^\circ - \sin 85^\circ \cdot \cos 65^\circ}{\cos 55^\circ \cdot \cos 35^\circ + \sin 55^\circ \cdot \sin 35^\circ}$;

3) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sqrt{2}\sin\alpha}$;

4) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{ctg}\beta} \cdot \dfrac{\cos(\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)}$ (не выясняя условия области определения выражения).

4. Докажите:

1) $\cos(45^\circ - x)\cdot\cos x - \sin(45^\circ - x)\cdot\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

2) $\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin(\alpha-3) - \sin\alpha\cdot\cos(3-\alpha)}{\cos\left(3-\frac{\pi}{6}\right) - 0{,}5\sin 3} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}3$;

3) $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)} - \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \sin\alpha$

при $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

5. Решите уравнения:

1) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\cos 2x - \cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\sin 2x = 0{,}5$;

2) $5\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = 7\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

3) $\sin\left(\dfrac{7\pi}{4} + x\right) + \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = 0$;

4) $3\cos x = 8\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$;

5) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = 1$;

6) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x}$.

Решение тренировочной работы 6

1. Вычислите:

1) $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ при $1{,}5\pi < \alpha < 2\pi$.

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha - 1) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{5}{12} - 1\right) \cdot \cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}\cdot 17}{24}\cos\alpha =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}\cdot 17}{24}\cdot\frac{12}{13} = \boxed{-\frac{17\sqrt{2}}{26}},$$

так как $\cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, а $\alpha \in \mathrm{IV}$, значит

$$\cos\alpha > 0; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{5}{12}\right)^2}} = \frac{12}{13}.$$

2) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$ при $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$.

$$\left[\begin{array}{l}
\text{Так как } \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right], \text{ то} \\
\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) = \pi - \arccos\frac{3}{5}, \text{ значит} \\
\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \cos\left(\pi - \arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right) = \\
= -\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{5}; \\
\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)} = \\
= \sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.
\end{array}\right]$$

$$\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)-\alpha\right)=$$

$$=\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)\cdot\cos\alpha+\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)\cdot\sin\alpha=$$

$$=-\frac{3}{5}\cos\alpha+\frac{4}{5}\sin\alpha=-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{24}{25}\right)+\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{7}{25}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Так как } \alpha\in \text{III}, \quad \cos\alpha<0, \text{ то}\\ \cos\alpha=-\sqrt{1-\left(-\frac{7}{25}\right)^2}=-\frac{24}{25}.\end{array}\right]$$

$$=\frac{72-28}{125}=\boxed{\frac{44}{125}}.$$

3) $\alpha-\beta$, если $\sin\alpha=-\dfrac{40}{41}$ и $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{9}{40}$ при $270^\circ<\alpha<360^\circ$, $180^\circ<\beta<270^\circ$.

а) $\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}}$ **1.7** $\alpha\in \text{IV}$, значит $\operatorname{tg}\alpha<0$.

Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{-\frac{40}{41}}{\sqrt{1-\left(-\frac{40}{41}\right)^2}}=-\dfrac{\frac{40}{41}}{\frac{9}{41}}=-\dfrac{40}{9}$.

б) Так как $\begin{cases}270^\circ<\alpha<360^\circ\\ -270^\circ<-\beta<-180^\circ\end{cases}$, то $0<\alpha-\beta<180^\circ$.

в) Если $\alpha-\beta=90^\circ$, то мы не можем воспользоваться формулой $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$. Проверим это равенство:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{-\frac{40}{9}-\frac{9}{40}}{1+\frac{9}{40}\cdot\left(-\frac{40}{9}\right)}=\frac{-\frac{1681}{360}}{0}.$$

Значит, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ не существует, т. е. $\alpha-\beta=\boxed{90^\circ}$.

2. Вычислите:

1) $\dfrac{\sin 65^\circ\cdot\cos 5^\circ-\sin 5^\circ\cdot\cos 65^\circ}{\cos 40^\circ\cdot\cos 10^\circ+\sin 10^\circ\cdot\sin 40^\circ}=$

$$=\frac{\sin(65^\circ-5^\circ)}{\cos(40^\circ-10^\circ)}=\frac{\sin 60^\circ}{\cos 30^\circ}=\boxed{1}.$$

2) $\dfrac{\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{tg} 213^\circ}{1 - \operatorname{tg} 192^\circ \cdot \operatorname{ctg} 237^\circ} =$

$$= \frac{\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{tg}(180^\circ + 33^\circ)}{1 - \operatorname{tg}(180^\circ + 12^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(270^\circ - 33^\circ)} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{tg} 33^\circ}{1 - \operatorname{tg} 12^\circ \cdot \operatorname{tg} 33^\circ} = \operatorname{tg}(12^\circ + 33^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = \boxed{1}.$$

3) $\cos(120^\circ - \alpha) + \cos(\alpha + 60^\circ)$.

а) $\cos(120^\circ - \alpha) = \cos 120^\circ \cdot \cos\alpha + \sin 120^\circ \cdot \sin\alpha =$

$$= -\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha;$$

б) $\cos(\alpha + 60^\circ) = \cos\alpha \cdot \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin\alpha =$

$$= \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

Тогда $\cos(120^\circ - \alpha) + \cos(\alpha + 60^\circ) =$

$$= -\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \boxed{0}.$$

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{15} + \operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}}{1 + \operatorname{tg}\frac{14\pi}{15} \cdot \operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}} =$

$$= \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{15} + \operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}}{1 + \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{15}\right) \cdot \operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{15} + \operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{15} \cdot \operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}} =$$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{15} + \frac{4\pi}{15}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \boxed{\sqrt{3}}.$$

3. Упростите:

1) $\sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin(\alpha - \beta) =$

$$= \sin\alpha \cdot \cos\beta - (\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta) =$$

$$= \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta = \boxed{\cos\alpha \cdot \sin\beta}.$$

2) $\dfrac{\sin 65^\circ \cdot \cos 85^\circ - \sin 85^\circ \cdot \cos 65^\circ}{\cos 55^\circ \cdot \cos 35^\circ + \sin 55^\circ \cdot \sin 35^\circ} =$

$$= \frac{\sin(65^\circ - 85^\circ)}{\cos(55^\circ - 35^\circ)} = \frac{-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \boxed{-\operatorname{tg} 20^\circ}.$$

3) $$\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \sqrt{2}\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha + 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha}{2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha + 2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha} = \boxed{\operatorname{tg}\alpha}.$$

4) $$\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) + \operatorname{ctg}\beta}\cdot\frac{\cos(\pi+\alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}}\cdot\frac{-\cos\alpha}{\sin\beta} =$$

$$= \frac{\sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta) + \cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)}\cdot\frac{-\cos\alpha}{\sin\beta} =$$

$$= \frac{-\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta-\beta)} = \frac{-\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= \boxed{-\cos(\alpha+\beta)}.$$

4. Докажите:

1) $$\cos(45^\circ - x)\cdot\cos x - \sin(45^\circ - x)\cdot\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\mathrm{L} = \cos(45^\circ - x)\cdot\cos x - \sin(45^\circ - x)\cdot\sin x =$$

$$= \cos(45^\circ - x + x) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \Pi = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

2) $$\frac{\cos\alpha\cdot\sin(\alpha-3)-\sin\alpha\cdot\cos(3-\alpha)}{\cos\left(3-\frac{\pi}{6}\right)-0{,}5\sin 3}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}3.$$

$$\text{L}=\frac{\cos\alpha\cdot\sin(\alpha-3)-\sin\alpha\cdot\cos(3-\alpha)}{\cos\left(3-\frac{\pi}{6}\right)-0{,}5\sin 3}=$$

$$=\frac{\sin(\alpha-3-\alpha)}{\cos 3\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin 3\cdot\sin\frac{\pi}{6}-0{,}5\sin 3}=$$

$$=\frac{\sin(-3)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}3.$$

$$\left.\begin{aligned}\text{L}&=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}3\\ \Pi&=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}3\end{aligned}\right|\Rightarrow \text{L}=\Pi.$$

3) $$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)}-\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\sin\alpha$$

при $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

$$\text{L}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)}-\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=$$

$$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}}=$$

$$=\sin\alpha+\cos\alpha-|\cos\alpha|=\sin\alpha+\cos\alpha-\cos\alpha=\sin\alpha$$

(так как на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $\cos\alpha>0$).

$$\left.\begin{aligned}\text{L}&=\sin\alpha\\ \Pi&=\sin\alpha\end{aligned}\right|\Rightarrow \text{L}=\Pi.$$

5. Решите уравнения:

1) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\cos 2x-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\sin 2x=0{,}5.$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}+(-2x)\right)=0{,}5;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0{,}5;\quad \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2};$$

$$x-\frac{\pi}{3}=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z};$$

$$x=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{(-1)^k\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\pi}{3}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2) $5\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=7\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right).$

$$5\left(\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin x\right)=7\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{5}{2}\sin x=\frac{7}{2}\sin x-\frac{7\sqrt{3}}{2}\cos x;$$

$$6\sqrt{3}\cos x=\sin x;\quad \operatorname{tg} x=6\sqrt{3};\quad x=\operatorname{arctg}6\sqrt{3}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\operatorname{arctg}6\sqrt{3}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3) $\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}+x\right)+\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=0.$

$$\sin\frac{7\pi}{4}\cdot\cos x+\cos\frac{7\pi}{4}\cdot\sin x-\sqrt{2}\sin x=0;$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\sqrt{2}\sin x=0;$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x;\quad \operatorname{tg} x=-1;\quad x=-\frac{\pi}{4}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{4}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4) $3\cos x = 8\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

$$3\cos x = 8\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x - 8\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin x;$$

$$3\cos x = 4\cos x - 4\sqrt{3}\sin x; \quad 4\sqrt{3}\sin x = \cos x;$$

$$\operatorname{ctg} x = 4\sqrt{3}; \quad x = \operatorname{arcctg} 4\sqrt{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\operatorname{arcctg} 4\sqrt{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$.

$$\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin x = 1;$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 1;$$

$$\sqrt{2}(\cos x - \sin x) = 1.$$

Так как $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, то

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}; \quad x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Примечание.

1. $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right) =$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

2. $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right) =$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

Аналогично можно доказать, что:

3. $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

6) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x}$.

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x};$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} - \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} = 0; \qquad \frac{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x};$$

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x};$$

$$\cos x - \sin x = \cos x; \qquad \sin x = 0; \qquad x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Подстановкой можно убедиться, что корни уравнения принадлежат $D(У)$:

при $x = \pi k$ $\operatorname{tg} x$ существует;

при $x = \pi k$ $\cos\pi k + \sin\pi k = \cos\pi k + 0 = \cos\pi k \neq 0$.

Ответ: $\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Тригонометрические функции двойного и половинного угла

Напомним основные формулы двойного и половинного угла.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$; **5.1**

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; **5.2**

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$ **5.3**

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$ **5.4**

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \begin{cases} \alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k \\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z};$$ **5.5**

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} \quad \begin{cases} \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}n \end{cases}; \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}n \mid k, n \in \mathbb{Z};$$ **5.6**

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$ **5.7**

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$ **5.8**

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$ **5.9**

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$ **5.10**

Примечание. Знаки определяются по тому, какой знак имеет тригонометрическая функция в левой части в данной четверти.

Практикум 8

1. Вычислите:

1) $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$;

2) $\sin(2\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ и $\sin\beta = \dfrac{1}{2}$ при $1{,}5\pi < \alpha < 2\pi$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$;

3) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$;

4) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = \dfrac{15}{17}$ при $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

5) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\dfrac{161}{289}$ при $90^\circ < \dfrac{\alpha}{2} < 180^\circ$;

6) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{4}{3}$ при $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

7) $\cos\left(\pi + \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{8}{17}\right)$;

8) $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$, если $\sin\beta = -\dfrac{40}{41}$ при $540^\circ < \beta < 630^\circ$;

9) $\cos x$, если $\cos 2x = \dfrac{11}{61}$ при $0^\circ < 2x < 90^\circ$.

2. Упростите:

1) $\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha$;

2) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

3) $\dfrac{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}$;

4) $\dfrac{1-\cos 20^\circ}{1+\sin 70^\circ}$.

3. Докажите тождества:

1) $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 4$;

2) $\dfrac{1 - \sin 25^\circ 30'}{1 + \sin 25^\circ 30'} = \operatorname{tg}^2 32^\circ 15'$.

4. Решите уравнения:

1) $\sin x = \sin 2x$;

2) $2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 1$;

3) $\sin^4 x - \cos^4 x = 0{,}5$;

4) $2\cos^2(x - \pi) + 3\sin(\pi + x) = 0$;

5) $3\operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x = 1$;

6) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos^2 2x$.

Решение практикума 8

1. Вычислите:

1) $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$.

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot(-0{,}6)^2 = 1 - 0{,}72 = \boxed{0{,}28}$.

2) $\sin(2\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ и $\sin\beta = \dfrac{1}{2}$ при $1{,}5\pi < \alpha < 2\pi$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

$\sin(2\alpha+\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos 2\alpha$;

$\cos\beta = -\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad(\cos\beta < 0)$;

$\sin\alpha = -\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ $\quad(\sin\alpha < 0)$;

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\dfrac{2}{3} = -\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$;

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\dfrac{4}{9} - 1 = -\dfrac{1}{9}$;

$\sin(2\alpha+\beta) = -\dfrac{4\sqrt{5}}{9}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{9}\right) = \boxed{\dfrac{4\sqrt{15}-1}{18}}$.

3) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$.

Так как $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, то

$$\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)}.$$

$\arcsin\dfrac{4}{5} = \alpha$; $\quad \alpha \in$ I четверти, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$;

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4}{3};$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{24}{7}, \text{ т. е. } \operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right) = \boxed{-\frac{24}{7}}.$$

4) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = \dfrac{15}{17}$ при $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$\cos\alpha < 0$; $\quad \cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$, так как $\dfrac{\alpha}{2} \in \mathrm{I}$ четверти.

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2} = -\frac{8}{17};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{8}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{34}} = \boxed{\frac{3\sqrt{34}}{34}}.$$

5) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\dfrac{161}{289}$ при $90^\circ < \dfrac{\alpha}{2} < 180^\circ$.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{161}{289}}{2}} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \boxed{\frac{15}{17}}.$$

6) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{4}{3}$ при $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

$\cos\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$; $\quad \alpha \in \mathrm{III}$ четверти, поэтому

$$\cos\alpha < 0; \quad \cos\alpha = \frac{\frac{4}{3}}{-\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = -\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};$$

$$\frac{\alpha}{2} \in \mathrm{II}; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < 0; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}} = \boxed{-3}.$$

7) $\cos\left(\pi+\frac{1}{2}\arcsin\frac{8}{17}\right)$.

$$\cos\left(\pi+\frac{1}{2}\arcsin\frac{8}{17}\right)=-\cos\frac{1}{2}\arcsin\frac{8}{17};$$

так как $\arcsin\frac{8}{17}=\alpha\in\mathrm{I}$ четверти и $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, то

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}=\frac{15}{17}.$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\quad \frac{\alpha}{2}\in\mathrm{I}\text{ четверти};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{15}{17}}{2}}=\sqrt{\frac{16}{17}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}.$$

Таким образом, $\cos\left(\pi+\frac{1}{2}\arcsin\frac{8}{17}\right)=\boxed{-\frac{4\sqrt{17}}{17}}$.

8) $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, если $\sin\beta=-\frac{40}{41}$ при $540^\circ<\beta<630^\circ$.

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\left(-\frac{40}{41}\right)^2}=-\frac{9}{41};\quad \beta\in\mathrm{III};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}};\quad \frac{\beta}{2}\in\mathrm{IV};\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}<0;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\frac{9}{41}}{1-\frac{9}{41}}}=-\sqrt{\frac{50}{32}}=\boxed{-\frac{5}{4}}.$$

9) $\cos x$, если $\cos 2x=\frac{11}{61}$ при $0^\circ<2x<90^\circ$.

$x\in\mathrm{I}$ четверти, значит

$$\cos x=\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}};\quad \cos x=\sqrt{\frac{1+\frac{11}{61}}{2}}=\sqrt{\frac{72}{2\cdot 61}}=\boxed{\frac{6\sqrt{61}}{61}}.$$

2. Упростите:

1) $\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha =$

$= (\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha)(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha) =$

$= 1 \cdot \cos 4\alpha = \boxed{\cos 4\alpha}.$

2) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} =$

$$= \frac{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha} =$$

$= \boxed{\sin\alpha + \cos\alpha}.$

3) $\dfrac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha} = 1.$

4) $\dfrac{1-\cos 20^\circ}{1+\sin 70^\circ} =$

$$= \frac{1-\cos 20^\circ}{1+\cos 20^\circ} = \frac{2\sin^2 10^\circ}{2\cos^2 10^\circ} = \boxed{\operatorname{tg}^2 10^\circ},$$

так как $1+\cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ и $1-\cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

3. Докажите тождества:

1) $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 4.$

$$\mathrm{L} = \operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} =$$

$$= \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ}{\cos 15^\circ\cdot\sin 15^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 2\cos 15^\circ\cdot\sin 15^\circ} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ} = 4.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L} = 4\\ \Pi = 4\end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

2) $\dfrac{1-\sin 25^\circ 30'}{1+\sin 25^\circ 30'} = \operatorname{tg}^2 32^\circ 15'$.

$$\text{L} = \frac{1-\sin 25^\circ 30'}{1+\sin 25^\circ 30'} = \frac{1-\cos 64^\circ 30'}{1+\cos 64^\circ 30'} =$$

$$= \frac{2\sin^2 32^\circ 15'}{2\cos^2 32^\circ 15'} = \operatorname{tg}^2 32^\circ 15';$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{L} = \operatorname{tg}^2 32^\circ 15' \\ &\Pi = \operatorname{tg}^2 32^\circ 15' \end{aligned}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi.$$

4. Решите уравнения:

1) $\sin x = \sin 2x$.

$\sin x - 2\sin x \cdot \cos x = 0; \quad \sin x(1 - 2\cos x) = 0;$

$$\left[\begin{aligned} &\sin x = 0 \\ &1 - 2\cos x = 0 \end{aligned}\right.; \quad \left[\begin{aligned} &\sin x = 0 \\ &\cos x = \frac{1}{2} \end{aligned}\right.; \quad \left[\begin{aligned} &x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ &x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right..$$

Ответ: $\left\{\pi k; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

2) $2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 1$.

$2(1 - \cos^2 x - \cos^2 x) = 1; \quad -2\cos 2x = 1; \quad \cos 2x = -\dfrac{1}{2};$

$2x = \pm\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \quad x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3) $\sin^4 x - \cos^4 x = 0{,}5$.

$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0{,}5;$

$-\cos 2x = 0{,}5; \quad \cos 2x = -0{,}5; \quad 2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k;$

$x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{2}k; \quad x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4) $2\cos^2(x-\pi)+3\sin(\pi+x)=0.$

$2\cos^2 x-3\sin x=0; \quad 2(1-\sin^2 x)-3\sin x=0;$

$2\sin^2 x+3\sin x-2=0;$

$$(\sin x)_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=-2 \quad \notin [-1;1] \\ \sin x=\frac{1}{2}; \quad x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

5) $3\operatorname{tg}^2 x-\sec^2 x=1.$

$3\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}=1; \quad \cos x\neq 0$ при $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z};$

$3\sin^2 x-1=\cos^2 x; \quad 3\sin^2 x-1=1-\sin^2 x;$

$4\sin^2 x-2=0; \quad -2(1-2\sin^2 x)=0; \quad -2\cos 2x=0;$

$\cos 2x=0; \quad 2x=\frac{\pi}{2}+\pi n; \quad x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n \mid n\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$.

6) $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos^2 2x.$

$-\cos 2x=\cos^2 2x; \quad \cos 2x(\cos 2x+1)=0;$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0 \\ \cos 2x=-1\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{2}+\pi k \\ 2x=\pi+2\pi n\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k \\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right. \mid k,n\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{2}+\pi n \mid k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

Тренировочная работа 7

1. Вычислите:

1) $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$ при $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\sin\left(2\arccos\dfrac{3}{5}\right)$;

3) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arctg}\,0{,}28\right)$;

4) $\sin\left(2\pi - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{4}{5}\right)$;

5) $\sin\left(\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{arcctg}\,\dfrac{5}{12}\right)$;

6) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right)\right)$;

7) $\mathrm{tg}\left(\pi - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{5}{13}\right)$.

2. Упростите:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$;

2) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$;

3) $2\sin^2\left(45^\circ + \dfrac{3}{2}\alpha\right) - 1$;

4) $\dfrac{1 - 2\cos\frac{x}{2} + \cos x}{1 + 2\cos\frac{x}{2} + \cos x}$.

3. Докажите:

1) $\sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ = \dfrac{1}{4}$;

2) $\dfrac{1 - \cos 25^\circ 30'}{1 + \cos 25^\circ 30'} = \operatorname{ctg}^2 77^\circ 15'$.

4. Решите уравнения:

1) $\sin 2x = \cos^4 \dfrac{x}{2} - \sin^4 \dfrac{x}{2}$;

2) $\operatorname{tg} 2x = 3 \sin x$;

3) $\cos^2 \dfrac{3}{2}x = \sin^2 \dfrac{3}{2}x + 2 \cos 4x \cdot \cos 3x$;

4) $2 \cos^2(2\pi - x) = 3 \sin(\pi - x) + 2$;

5) $1 - \sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$;

6) $4 \sin^2 x(1 + \cos 2x) = 1 - \cos 2x$.

Решение тренировочной работы 7

1. Вычислите:

1) $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$ при $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha; \quad \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha};$$
$$\sin\alpha > 0; \quad \sin\alpha = \sqrt{1-(-0{,}8)^2} = 0{,}6;$$
$$\sin 2\alpha = 2\cdot 0{,}6\cdot(-0{,}8) = \boxed{-0{,}96}.$$

2) $\sin\left(2\arccos\dfrac{3}{5}\right) = 2\sin\left(\arccos\dfrac{3}{5}\right)\cdot\cos\left(\arccos\dfrac{3}{5}\right) =$

$$\left[\begin{array}{l} \text{а) } \cos\left(\arccos\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{3}{5}; \\ \text{б) } \arccos\dfrac{3}{5} \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right), \text{ значит } \sin\left(\arccos\dfrac{3}{5}\right) > 0. \end{array}\right]$$

$$= 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\sqrt{1-\left[\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)\right]^2} =$$
$$= 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\sqrt{1-\frac{9}{25}} = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \boxed{\frac{24}{25}}.$$

3) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}0{,}28\right)$.

$$\alpha = \operatorname{arctg}0{,}28; \quad \operatorname{tg}\alpha = 0{,}28; \quad \alpha\in\left(0; \frac{\pi}{2}\right);$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(0{,}28)^2}} = \frac{25}{\sqrt{674}};$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}0{,}28\right) = \cos(2\operatorname{arctg}0{,}28) =$$
$$= 2\cdot\frac{625}{674} - 1 = \boxed{\frac{288}{337}}.$$

4) $\sin\left(2\pi - \frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$;

$\arccos\frac{4}{5} = \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, тогда $\frac{\alpha}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$, поэтому

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, значит

$\sin\left(2\pi - \frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{10}}{10}}$.

5) $\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arcctg}\frac{5}{12}\right)$.

Так как $\operatorname{arcctg}\frac{5}{12} = \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\cos\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$,

то $\cos\alpha = \frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}} = \frac{5}{13}$.

$\frac{\alpha}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = \boxed{\frac{2\sqrt{13}}{13}}$.

6) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right) =$

$= -\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}}$, так как

$\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, тогда $\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$;

$$\cos\frac{\alpha}{2} > 0; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \cos\left(\pi - \arccos\frac{3}{4}\right) =$$

$$= -\cos\left(\arccos\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{4}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

7) $$\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}\right);$$

$$\arccos\frac{5}{13} = \alpha; \quad \cos\alpha = \frac{5}{13}; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};$$

$$\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \text{ тогда } \frac{\alpha}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right); \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 0;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{1+\frac{5}{13}}} = \sqrt{\frac{8}{18}} = \frac{2}{3}; \quad \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}\right) = \boxed{-\frac{2}{3}}.$$

2. Упростите:

1) $$\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha - \cos\alpha\cdot\sin 2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{\sin(\alpha - 2\alpha)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} =$$

$$= \frac{-\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = -\frac{1}{\cos\alpha} = \boxed{-\mathrm{scc}\,\alpha} \text{ при } \alpha \neq \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}.$$

2) $$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha\cdot\sin 3\alpha - \cos 3\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \boxed{2}.$$

3) $$2\sin^2\left(45^\circ + \frac{3}{2}\alpha\right) - 1 = -\cos(90^\circ + 3\alpha) = \boxed{\sin 3\alpha}.$$

4) $$\frac{1-2\cos\frac{x}{2}+\cos x}{1+2\cos\frac{x}{2}+\cos x}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)}{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+1\right)}=$$
$$=-\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}=-\frac{2\sin^2\frac{x}{4}}{2\cos^2\frac{x}{4}}=\boxed{-\operatorname{tg}^2\frac{x}{4}}.$$

3. Докажите:

1) $\sin 15^\circ\cdot\sin 75^\circ=\dfrac{1}{4}$.

$$\text{L}=\sin 15^\circ\cdot\sin 75^\circ=\sin 15^\circ\cdot\sin(90^\circ-15^\circ)=$$
$$=\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L}=\frac{1}{4}\\ \Pi=\frac{1}{4}\end{array}\right|\Rightarrow \text{L}=\Pi.$$

2) $\dfrac{1-\cos 25^\circ 30'}{1+\cos 25^\circ 30'}=\operatorname{ctg}^2 77^\circ 15'$.

$$\text{L}=\frac{1-\cos 25^\circ 30'}{1+\cos 25^\circ 30'}=\frac{2\sin^2 12^\circ 45'}{2\cos^2 12^\circ 45'}=$$
$$=\operatorname{tg}^2 12^\circ 45'=\operatorname{tg}^2(90^\circ-77^\circ 15')=\operatorname{ctg}^2 77^\circ 15'.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L}=\operatorname{ctg}^2 77^\circ 15'\\ \Pi=\operatorname{ctg}^2 77^\circ 15'\end{array}\right|\Rightarrow \text{L}=\Pi.$$

4. Решите уравнения:

1) $\sin 2x=\cos^4\dfrac{x}{2}-\sin^4\dfrac{x}{2}$.

$$\sin 2x=\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin x^2\frac{x}{2}\right);$$
$$2\sin x\cdot\cos x=\cos x\cdot 1;\qquad 2\cos x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0;$$
$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\\ x=(-1)^n\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+\pi n\mid n\in\mathbb{Z}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k;(-1)^n\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+\pi n\mid k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

2) $\operatorname{tg} 2x = 3\sin x$.

$\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = 3\sin x\ (\cos 2x \neq 0);$

$2\sin x \cdot \cos x = 3\sin x \cdot \cos 2x; \quad \sin x(2\cos x - 3\cos 2x) = 0;$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \qquad x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ 2\cos x - 3(2\cos^2 x - 1) = 0 \end{array}\right.; \quad 6\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0;$

$(\cos x)_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+18}}{6} = \dfrac{1 \pm \sqrt{19}}{6};$

$x = \pm \arccos \dfrac{1 \pm \sqrt{19}}{6} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}.$

Очевидно, что корни уравнения удовлетворяют условию $\cos 2x \neq 0$.

Ответ: $\left\{ x = \pi k; \pm \arccos \dfrac{1 \pm \sqrt{19}}{6} + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

3) $\cos^2 \dfrac{3}{2}x = \sin^2 \dfrac{3}{2}x + 2\cos 4x \cdot \cos 3x$.

$\cos^2 \dfrac{3}{2}x - \sin^2 \dfrac{3}{2}x - 2\cos 4x \cdot \cos 3x = 0;$

$\cos 3x - 2\cos 4x \cdot \cos 3x = 0; \quad \cos 3x(1 - 2\cos 4x) = 0;$

$\left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0 \\ \cos 4x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ 4x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}n \mid n \in \mathbb{Z} \end{array}\right..$

Ответ: $\left\{ \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}k; \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

4) $2\cos^2(2\pi - x) = 3\sin(\pi - x) + 2$.

$2\cos^2 x - 3\sin x - 2 = 0; \quad 2(1 - \sin^2 x) - 3\sin x - 2 = 0;$

$2\sin^2 x + 3\sin x = 0; \quad 2\sin x(\sin x + 1{,}5) = 0;$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -1{,}5 \notin [-1; 1] \end{array}\right.; \quad x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z};$

Ответ: $\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

5) $1-\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$.

Так как $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{x}{2}$,

то $1-\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}$.

$1-2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$;

$\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$;

$\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0.$

а) $\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0;\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1;$

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k;\quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\mid k\in\mathbb{Z};$

б) $\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0;$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2};\quad \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2};$

$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\mid n\in\mathbb{Z};\quad x=-\frac{\pi}{2}\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n\mid n\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{2}\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi k\mid k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

6) $4\sin^2 x(1+\cos 2x)=1-\cos 2x.$

$4\sin^2 x(1+\cos 2x)-2\sin^2 x=0;$

$2\sin^2 x(2+2\cos 2x-1)=0;$

$$\left[\begin{aligned}&\sin x=0\\&\cos 2x=-\frac{1}{2}\end{aligned}\right.;\quad\left[\begin{aligned}&x=\pi k\\&2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n\end{aligned}\right.;\quad\left[\begin{aligned}&x=\pi k\\&x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n\end{aligned}\right.\mid k,n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\pi k;\pm\frac{\pi}{3}+\pi n\mid k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

Тренировочная работа 8

1. Вычислите:

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$, если $\cos\alpha=-\dfrac{8}{17}$ при $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{7}{24}$ при $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

3) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$, если $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$ при $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

4) $\operatorname{tg}(\alpha-45^\circ)$, если $\sin\alpha=\dfrac{7}{25}$ при $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;

5) $\cos(\arcsin\dfrac{5}{13}-\alpha)$, если $\cos\alpha=0{,}8$ при $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

6) $\sin\left(\alpha-\operatorname{arcctg}\dfrac{4}{3}\right)$, если $\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{5}{3}$ при $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

7) $\sin\left(\arcsin\dfrac{40}{41}+\arcsin\dfrac{9}{41}\right)$.

2. Докажите тождества:

1) $\cos(60^\circ+\alpha)\cdot\cos\alpha+\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$;

2) $\sin(45^\circ-\alpha)\cdot\cos\alpha+\cos(45^\circ-\alpha)\cdot\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha=\operatorname{cosec}2\alpha$;

4) $\dfrac{\sin^2\alpha-1}{(\cos\alpha-\sec\alpha)\cdot\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha$;

5) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha}-1+\cos\alpha+\dfrac{\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha}=\cos\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha$.

Решение тренировочной работы 8

1. Вычислите:

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$, если $\cos\alpha = -\dfrac{8}{17}$ при $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

$\alpha \in$ III, значит $\sin\alpha < 0$; $\quad \sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha}$;

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{64}{289}} = -\frac{15}{17};$$

Так как $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right) = \sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos\alpha + \cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\sin\alpha =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \dfrac{1}{2}\sin\alpha$, то

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{8}{17}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{15}{17}\right) = \boxed{-\frac{8\sqrt{3}+15}{34}}.$$

2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{7}{24}$ при $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

$\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$, значит $\cos\alpha < 0$; $\quad \sin\alpha > 0$;

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}; \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{49}{576}}} = \frac{24}{25};$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}; \quad \cos\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{24}{25}\right)^2} = -\frac{7}{25};$$

Так как $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sin\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha + \cos\dfrac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)$, то

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{24}{25}-\frac{7}{25}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{17}{25} = \boxed{\frac{17\sqrt{2}}{50}}.$$

3) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$, если $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$ при $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Из условия следует, что $\sin\alpha>0$;

$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{9}{25}}=\dfrac{3}{5}$;

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\quad\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\dfrac{9}{25}}:\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{4}=-\dfrac{3}{4}$;

$\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$;

$\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{4}:\dfrac{7}{4}=\dfrac{1}{7}$, значит $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\boxed{7}$.

4) $\operatorname{tg}(\alpha-45^\circ)$, если $\sin\alpha=\dfrac{7}{25}$ при $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

$\alpha\in\mathrm{I}$, значит $\cos\alpha>0$;

$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{7}{25}\right)^2}=\dfrac{24}{25}$; $\quad\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{7}{25}:\dfrac{24}{25}=\dfrac{7}{24}$;

так как $\operatorname{tg}(\alpha-45^\circ)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}45^\circ}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}45^\circ}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$,

то $\operatorname{tg}(\alpha-45^\circ)=\dfrac{\frac{7}{24}-1}{1+\frac{7}{24}}=-\dfrac{17}{24}:\dfrac{31}{24}=\boxed{-\dfrac{17}{31}}$.

5) $\cos\left(\arcsin\dfrac{5}{13}-\alpha\right)$, если $\cos\alpha=0{,}8$ при $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

Из условия следует, что $\sin\alpha<0$;

$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $\quad\sin\alpha=-\sqrt{1-0{,}8^2}=-0{,}6$;

$\arcsin\dfrac{5}{13}\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, значит $\cos\left(\arcsin\dfrac{5}{13}\right)>0$, тогда

$\cos\left(\arcsin\dfrac{5}{13}\right)=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=\sqrt{1-\dfrac{25}{169}}=\dfrac{12}{13}$.

Так как $\cos\left(\arcsin\dfrac{5}{13}-\alpha\right)=$

$=\cos\left(\arcsin\dfrac{5}{13}\right)\cdot\cos\alpha+\sin\left(\arcsin\dfrac{5}{13}\right)\cdot\sin\alpha,$

то $\cos\left(\arcsin\dfrac{5}{13}-\alpha\right)=\dfrac{12}{13}\cdot 0{,}8-0{,}6\cdot\dfrac{5}{13}=$

$=\dfrac{48}{65}-\dfrac{15}{65}=\boxed{\dfrac{33}{65}}.$

6) $\sin\left(\alpha-\operatorname{arcctg}\dfrac{4}{3}\right)$, если $\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{5}{3}$ при $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Так как $\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{5}{3}$, то $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$.

$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$, значит $\cos\alpha<0$;

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=-\dfrac{4}{5};$

$\operatorname{arcctg}\dfrac{4}{3}=\beta;\quad \operatorname{ctg}\beta=\dfrac{4}{3};\quad \beta\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right);\quad \sin\beta>0.$

Тогда $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\beta}}$, значит $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}}=\dfrac{3}{5}$.

$\cos\beta>0;\quad \cos\beta=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}.$

Учтем, что $\sin\left(\alpha-\operatorname{arcctg}\dfrac{4}{3}\right)=$

$=\sin\alpha\cdot\cos\left(\operatorname{arcctg}\dfrac{4}{3}\right)-\sin\left(\operatorname{arcctg}\dfrac{4}{3}\right)\cdot\cos\alpha$, тогда

$\sin\left(\alpha-\operatorname{arcctg}\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=$

$=\dfrac{12}{25}+\dfrac{12}{25}=\boxed{\dfrac{24}{25}}.$

7) $\sin\left(\arcsin\dfrac{40}{41}+\arcsin\dfrac{9}{41}\right)=$

$$\left[\begin{array}{l} \text{а) Обозначим } \alpha=\arcsin\dfrac{40}{41}\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right); \\ \sin\alpha=\dfrac{40}{41};\quad \cos\alpha>0;\quad \cos\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{40}{41}\right)^2}=\dfrac{9}{41}. \\ \text{б) Обозначим } \beta=\arcsin\dfrac{9}{41}\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right); \\ \sin\beta=\dfrac{9}{41};\quad \cos\beta>0;\quad \cos\beta=\sqrt{1-\left(\dfrac{9}{41}\right)^2}=\dfrac{40}{41}. \end{array}\right]$$

$=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha=$

$=\dfrac{40}{41}\cdot\dfrac{40}{41}+\dfrac{9}{41}\cdot\dfrac{9}{41}=\dfrac{1600}{1681}+\dfrac{81}{1681}=\boxed{1}.$

2. Докажите тождества:

1) $\cos(60^\circ+\alpha)\cdot\cos\alpha+\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin\alpha=\dfrac{1}{2}.$

а) $\cos(60^\circ+\alpha)\cdot\cos\alpha=$

$=(\cos 60^\circ\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin 60^\circ)\cdot\cos\alpha=$

$=\left(\dfrac{1}{2}\cos\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)\cdot\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\cos^2\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$

б) $\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin\alpha=$

$=(\sin 60^\circ\cdot\cos\alpha+\cos 60^\circ\cdot\sin\alpha)\cdot\sin\alpha=$

$=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\sin\alpha\right)\cdot\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\sin^2\alpha.$

$\text{L}=\cos(60^\circ+\alpha)\cdot\cos\alpha+\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin\alpha=$

$=\dfrac{1}{2}\cos^2\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\cdot\sin\alpha+\dfrac{1}{2}\sin^2\alpha=$

$=\dfrac{1}{2}\cos^2\alpha+\dfrac{1}{2}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\dfrac{1}{2}.$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L}=\dfrac{1}{2}\\ \Pi=\dfrac{1}{2}\end{array}\right|\Rightarrow \text{L}=\Pi.$$

Примечание. Можно проще, если сразу увидеть, что

$$\cos(60^\circ + \alpha) \cdot \cos\alpha + \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin\alpha =$$
$$= \cos(60^\circ + \alpha - \alpha) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

2) $\sin(45^\circ - \alpha) \cdot \cos\alpha + \cos(45^\circ - \alpha) \cdot \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Докажем по аналогии с предыдущим примером:

$$\text{L} = \sin(45^\circ - \alpha) \cdot \cos\alpha + \cos(45^\circ - \alpha) \cdot \sin\alpha =$$
$$= \sin(45^\circ - \alpha + \alpha) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\left.\begin{aligned} \text{L} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Pi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi.$$

3) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{cosec} 2\alpha.$

$$\text{L} = \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} =$$
$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} =$$
$$= \frac{2\cos^2\alpha - (2\cos^2\alpha - 1)}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

$$\Pi = \operatorname{cosec} 2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

Итак, $\left.\begin{aligned} \text{L} &= \frac{1}{\sin 2\alpha} \\ \Pi &= \frac{1}{\sin 2\alpha} \end{aligned}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi; \qquad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}.$

4) $$\frac{\sin^2\alpha - 1}{(\cos\alpha - \sec\alpha)\cdot\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha.$$

$$\Pi = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}.$$

$$\mathrm{L} = \frac{\sin^2\alpha - 1}{(\cos\alpha - \sec\alpha)\cdot\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha =$$
$$= \frac{-\cos^2\alpha}{\left(\cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}\right)\cdot\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} =$$
$$= \frac{-\cos^2\alpha}{\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\cos^2\alpha}{\frac{-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} =$$
$$= \frac{-\cos^3\alpha}{-\sin^3\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos^3\alpha + \cos\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\sin^3\alpha} =$$
$$= \frac{\cos\alpha\cdot(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{\sin^3\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}.$$

Итак, $\left.\begin{aligned} \mathrm{L} &= \frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha} \\ \Pi &= \frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha} \end{aligned}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi$ при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k \mid k\in\mathbb{Z}$.

5) $$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha} - 1 + \cos\alpha + \frac{\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha} = \cos\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha.$$

$$\mathrm{L} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha} - 1 + \cos\alpha + \frac{\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha} =$$
$$= \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) : \frac{1}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha} - 1 + \cos\alpha + \frac{\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha} =$$
$$= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{1} - 1 + \cos\alpha + \frac{\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha} =$$
$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 1 + \frac{\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha + \cos^3\alpha}{\sin^2\alpha} =$$
$$= 1 - 1 + \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \cos\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha.$$

Итак, $\left.\begin{aligned} \mathrm{L} &= \cos\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha \\ \Pi &= \cos\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha \end{aligned}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi$ при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k \mid k\in\mathbb{Z}$.

Тренировочная работа 9

Упростите:

1) $\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \cdot \sin\beta$;

2) $\cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos(\alpha - \beta)$;

3) $\sin(\alpha + 120°) - \sin(60° - \alpha)$;

4) $\dfrac{\cos 65° \cdot \cos 40° - \sin 65° \cdot \sin(-40°)}{\sin 17° \cdot \cos 8° + \cos 17° \cdot \sin 8°}$;

5) $\dfrac{\cos\frac{5\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)}$;

6) $\dfrac{\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}{2}$;

7) $\dfrac{\cos 75° \cdot \cos 25° - \sin 75° \cdot \sin 25°}{\sin 20° \cdot \cos 10° - \cos 20° \cdot \sin 10°}$;

8) $\sin 740° - \cos 77° \cdot \cos 213° - \cos 13° \cdot \sin 33°$;

9) $\dfrac{\operatorname{tg} 225° + \operatorname{tg} 171° \cdot \operatorname{tg} 21°}{\operatorname{tg}(-171°) + \operatorname{tg} 201°}$;

10) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos(45° - \alpha)}{2\sin(30° + \alpha) - \sqrt{3}\sin\alpha}$;

11) $\dfrac{\cos\alpha - 2\cos(60° - \alpha)}{2\sin(\alpha - 30°) - \sqrt{3}\sin\alpha}$;

12) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}(45° + \beta) \cdot \operatorname{tg}(45° + 3\beta)}{\operatorname{tg}(45° + \beta) + \operatorname{ctg}(45° - 3\beta)}$.

Решение тренировочной работы 9

Упростите:

1) $\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \cdot \sin\beta =$

$= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \sin\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\beta = \boxed{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$.

2) $\cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos(\alpha - \beta) =$

$= \cos\alpha \cdot \cos\beta - (\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta) = \boxed{-\sin\alpha \cdot \sin\beta}$.

3) $\sin(\alpha + 120^\circ) - \sin(60^\circ - \alpha) =$

$= \sin\alpha \cdot \cos 120^\circ + \sin 120^\circ \cdot \cos\alpha -$

$- (\sin 60^\circ \cdot \cos\alpha - \cos 60^\circ \cdot \sin\alpha) =$

$= -\cos 60^\circ \cdot \sin\alpha + \sin 60^\circ \cdot \cos\alpha -$

$- \sin 60^\circ \cdot \cos\alpha + \cos 60^\circ \cdot \sin\alpha = \boxed{0}$.

4) $$\frac{\cos 65^\circ \cdot \cos 40^\circ - \sin 65^\circ \cdot \sin(-40^\circ)}{\sin 17^\circ \cdot \cos 8^\circ + \cos 17^\circ \cdot \sin 8^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 65^\circ \cdot \cos 40^\circ + \sin 65^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\sin(17^\circ + 8^\circ)} =$$

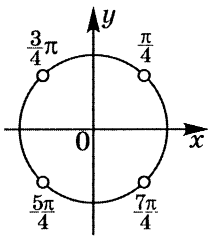
$$= \frac{\cos(65^\circ - 40^\circ)}{\sin(17^\circ + 8^\circ)} = \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} = \boxed{\operatorname{ctg} 25^\circ}.$$

5) $$\frac{\cos\frac{5\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)} = 0$$

$$\text{при} \begin{cases} \sin\left(\dfrac{3\pi}{4} - \alpha\right) \neq 0 \\ \cos\left(\dfrac{3\pi}{4} - \alpha\right) \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \alpha \neq \dfrac{3\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ \alpha \neq \dfrac{5\pi}{4} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

При $\alpha \neq \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi k$

$$\frac{\cos\frac{5\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)} = \boxed{0}.$$



6) $\dfrac{\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha}{2}=$

$$=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\cos 60^\circ\cdot\cos\alpha-\sin 60^\circ\cdot\sin\alpha=\cos(60^\circ+\alpha).$$

Или $\dfrac{\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}\cos\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=$

$$=\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin\alpha=\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}.$$

7) $\dfrac{\cos 75^\circ\cdot\cos 25^\circ-\sin 75^\circ\cdot\sin 25^\circ}{\sin 20^\circ\cdot\cos 10^\circ-\cos 20^\circ\cdot\sin 10^\circ}=$

$$=\frac{\cos(75^\circ+25^\circ)}{\sin(20^\circ-10^\circ)}=\frac{\cos 100^\circ}{\sin 10^\circ}=$$

$$=\frac{\cos(90^\circ+10^\circ)}{\sin 10^\circ}=\frac{-\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}=\boxed{-1}.$$

8) $\sin 740^\circ-\cos 77^\circ\cdot\cos 213^\circ-\cos 13^\circ\cdot\sin 33^\circ=$

$$=\sin 20^\circ-\cos(90^\circ-13^\circ)\cdot\cos(180^\circ+33^\circ)-\cos 13^\circ\cdot\sin 33^\circ=$$

$$=\sin 20^\circ-\sin 13^\circ\cdot(-\cos 33^\circ)-\cos 13^\circ\cdot\sin 33^\circ=$$

$$=\sin 20^\circ+\sin 13^\circ\cdot\cos 33^\circ-\cos 13^\circ\cdot\sin 33^\circ=$$

$$=\sin 20^\circ+\sin(13^\circ-33^\circ)=\sin 20^\circ+\sin(-20^\circ)=$$

$$=\sin 20^\circ-\sin 20^\circ=\boxed{0}.$$

9) $\dfrac{\operatorname{tg}225^\circ+\operatorname{tg}171^\circ\cdot\operatorname{tg}21^\circ}{\operatorname{tg}(-171^\circ)+\operatorname{tg}201^\circ}=$

$$=\frac{\operatorname{tg}(180^\circ+45^\circ)+\operatorname{tg}(180^\circ-9^\circ)\cdot\operatorname{tg}21^\circ}{-\operatorname{tg}(180^\circ-9^\circ)+\operatorname{tg}(180^\circ+21^\circ)}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}(-9^\circ)\cdot\operatorname{tg}21^\circ}{-\operatorname{tg}(-9^\circ)+\operatorname{tg}21^\circ}=\frac{1-\operatorname{tg}9^\circ\cdot\operatorname{tg}21^\circ}{\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{tg}21^\circ}=$$

$$=\operatorname{ctg}(9^\circ+21^\circ)=\operatorname{ctg}30^\circ=\boxed{\sqrt{3}}.$$

10) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos(45^\circ-\alpha)}{2\sin(30^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha} =$

$$= \frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2(\cos 45^\circ\cdot\cos\alpha + \sin 45^\circ\cdot\sin\alpha)}{2(\sin 30^\circ\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\cos 30^\circ) - \sqrt{3}\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)}{2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) - \sqrt{3}\sin\alpha} = \frac{-\sqrt{2}\sin\alpha}{\cos\alpha} = \boxed{-\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

11) $\dfrac{\cos\alpha - 2\cos(60^\circ-\alpha)}{2\sin(\alpha-30^\circ)-\sqrt{3}\sin\alpha} =$

$$= \frac{\cos\alpha - 2(\cos 60^\circ\cdot\cos\alpha + \sin 60^\circ\cdot\sin\alpha)}{2(\sin\alpha\cdot\cos 30^\circ - \cos\alpha\cdot\sin 30^\circ) - \sqrt{3}\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\cos\alpha - 2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha\right) - \sqrt{3}\sin\alpha} = \frac{-\sqrt{3}\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \boxed{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

12) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2} - \mathrm{tg}(45^\circ+\beta)\cdot\mathrm{tg}(45^\circ+3\beta)}{\mathrm{tg}(45^\circ+\beta)+\mathrm{ctg}(45^\circ-3\beta)}.$

Обозначим $\mathrm{tg}\,\beta = a$; $\mathrm{tg}\,3\beta = b$. Тогда

$$\frac{1-\frac{1+a}{1-a}\cdot\frac{1+b}{1-b}}{\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}} =$$

$$= \frac{(1-a)(1-b)-(1+a)(1+b)}{(1-a)(1-b)} : \frac{(1+a)(1-b)+(1+b)(1-a)}{(1-a)(1-b)} =$$

$$= \frac{1-b-a+ab-1-b-a-ab}{(1-a)(1-b)} : \frac{1-b+a-ab+1-a+b-ab}{(1-a)(1-b)} =$$

$$= \frac{-2a-2b}{(1-a)(1-b)}\cdot\frac{(1-a)(1-b)}{2-2ab} = \frac{-2(a+b)}{2(1-ab)} = -\frac{a+b}{1-ab};$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2} - \mathrm{tg}(45^\circ+\beta)\cdot\mathrm{tg}(45^\circ+3\beta)}{\mathrm{tg}(45^\circ+\beta)+\mathrm{ctg}(45^\circ-3\beta)} = \frac{1-\frac{1+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\beta}\cdot\frac{1+\mathrm{tg}\,3\beta}{1-\mathrm{tg}\,3\beta}}{\frac{1+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\beta}+\frac{1+\mathrm{tg}\,3\beta}{1-\mathrm{tg}\,3\beta}} =$$

$$= -\frac{\mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{tg}\,3\beta}{1-\mathrm{tg}\,\beta\cdot\mathrm{tg}\,3\beta} = -\,\mathrm{tg}(\beta+3\beta) = \boxed{-\,\mathrm{tg}\,4\beta}.$$

Тренировочная работа 10

Решите уравнения:

1) $\cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = 1$;

2) $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) \cdot \cos x + \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) \cdot \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1}{1 - \operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{6})} = 1$;

4) $\cos x = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$;

5) $\sin 5x \cdot \cos 2x = \cos 5x \cdot \sin 2x - 1$;

6) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 1$;

7) $\sin(m + x) - \sin(m - x) = 0$;

8) $3\cos x = 8\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$;

9) $2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} - \operatorname{tg} x = 2\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} - 1$;

10) $\dfrac{\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + 2\sin x \cdot \sin\frac{\pi}{12}}{\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) - 2\cos x \cdot \sin\frac{\pi}{12}} = 1$;

11) $5\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 7\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

12) $4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 3\sin x - 3 = 0$;

13) $3\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right) = \sin x$;

14) $2\sec^2 x - 3\operatorname{tg}^2 x = 1$;

15) $\sin 3x = 4\sin x \cdot \cos 2x$.

Решение тренировочной работы 10

Решите уравнения:

1) $\cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = 1.$

$\cos(2x + x) = 1; \quad \cos 3x = 1; \quad 3x = 2\pi k; \quad x = \dfrac{2\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\dfrac{2\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

2) $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) \cdot \cos x + \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) \cdot \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

$\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2};$

$\left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{array}\right..$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{12} + 2\pi k; -\dfrac{5\pi}{12} + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1}{1 - \operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{6})} = 1.$

$\dfrac{\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = 1; \quad \operatorname{tg}\left(2x - \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1;$

$2x - \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \quad 2x - \dfrac{\pi}{6} = \pi k;$

$2x = \dfrac{\pi}{6} + \pi k; \quad x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

4) $\cos x = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

$2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \cos x = 0;$

$2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin x\right) - \cos x = 0;$

$2\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) - \cos x = 0;$

$\cos x + \sqrt{3}\sin x - \cos x = 0;$

$\sqrt{3}\sin x = 0; \quad \sin x = 0; \quad x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

5) $\sin 5x \cdot \cos 2x = \cos 5x \cdot \sin 2x - 1$.

$\sin 5x \cdot \cos 2x - \cos 5x \cdot \sin 2x = -1;$

$\sin(5x - 2x) = -1; \quad \sin 3x = -1;$

$3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

6) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$.

$\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin x + \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin x = 1;$

$2\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos x = 1; \quad 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos x = 1;$

$\cos x = 1; \quad x = 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

7) $\sin(m + x) - \sin(m - x) = 0$.

$(\sin m\cdot\cos x + \cos m\cdot\sin x) - (\sin m\cdot\cos x - \sin x\cdot\cos m) = 0;$

$2\sin x\cdot\cos m = 0;$

а) $\cos m = 0$ $(\forall x)$ при $m = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$;

б) $\cos m \neq 0$; $\quad \sin x = 0$;

$m \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \quad x = \pi n \mid n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: при $m = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$ x — любое;

при $m \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$ $x = \pi n \mid n \in \mathbb{Z}$.

8) $3\cos x = 8\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$.

$$3\cos x = 8\left(\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin x\right);$$

$$3\cos x = 8\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right); \quad 3\cos x = 4\cos x - 4\sqrt{3}\sin x;$$

$$\cos x - 4\sqrt{3}\sin x = 0; \quad 1 - 4\sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0; \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12};$$

$$x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{12} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{12} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

9) $2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} - \operatorname{tg} x = 2\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} - 1$.

$$2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} - 2\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} + 1 - \operatorname{tg} x = 0;$$

$$2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}(1-\operatorname{tg} x) + (1-\operatorname{tg} x) = 0; \quad (1-\operatorname{tg} x)\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} + 1\right) = 0;$$

$$1 - \operatorname{tg} x = 0; \quad \operatorname{tg} x = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

10) $$\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+2\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{12}}{\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-2\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{12}}=1.$$

$$\frac{\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{12}-\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{12}+2\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{12}}{\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{12}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{12}-2\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{12}}=1;$$

$$\frac{\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{12}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{12}}{\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{12}-\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{12}}=1;\quad \frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)}=1;$$

$$\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=1;\ x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\pi k;\ x=\frac{\pi}{3}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{3}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

11) $$5\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=7\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

$$5\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)=7\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

$$2\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}-12\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{3}=0;$$

$$\sin x-12\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0;\quad \sin x-6\sqrt{3}\cos x=0;$$

$$\operatorname{tg}x-6\sqrt{3}=0;\quad \operatorname{tg}x=6\sqrt{3};\quad x=\operatorname{arctg}6\sqrt{3}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\operatorname{arctg}6\sqrt{3}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

12) $$4\sin^3 x+4\sin^2 x-3\sin x-3=0.$$

$$4\sin^2 x\cdot(\sin x+1)-3(\sin x+1)=0;$$

$$(\sin x+1)(4\sin^2 x-3)=0;$$

$$(\sin x+1)(2\sin x-\sqrt{3})(2\sin x+\sqrt{3})=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\\ x=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{3}+\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\\ x=(-1)^t\cdot\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\pi t\,|\,t\in\mathbb{Z}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{aligned} &x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ &x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right. .$$

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pm\frac{\pi}{3} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

13) $3\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \sin x.$

$$3\left(\cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos x - \sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin x\right) = \sin x;$$

$$3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = \sin x; \quad \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{5}{2}\sin x = 0;$$

$$3\sqrt{3}\cos x - 5\sin x = 0; \quad 3\sqrt{3} - 5\operatorname{tg} x = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3\sqrt{3}}{5}; \quad x = \operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{5} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{5} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

14) $2\sec^2 x - 3\operatorname{tg}^2 x = 1.$

$$\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1; \quad \frac{2 - 3\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1;$$

$$2 - 3\sin^2 x = \cos^2 x; \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k_1 \mid k_1 \in \mathbb{Z};$$

$$2 - 3\sin^2 x = 1 - \sin^2 x;$$

$$1 - 2\sin^2 x = 0; \quad (1 - \sqrt{2}\sin x)(1 + \sqrt{2}\sin x) = 0;$$

$$\left[\begin{aligned} &\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right. \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

15) $\sin 3x = 4\sin x \cdot \cos 2x.$

$\sin(2x + x) = 4\sin x \cdot \cos 2x;$

$\sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x = 4\sin x \cdot \cos 2x;$

$\sin 2x \cdot \cos x - 3\cos 2x \cdot \sin x = 0;$

$2\sin x \cdot \cos x \cdot \cos x - 3(\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \sin x = 0;$

$\sin x \cdot (2\cos^2 x - 3\cos^2 x + 3\sin^2 x) = 0;$

$\sin x \cdot (3\sin^2 x - \cos^2 x) = 0;$ $\quad \sin x \cdot (3\sin^2 x - (1 - \sin^2 x)) = 0;$

$\sin x(3\sin^2 x + \sin^2 x - 1) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 4\sin^2 x - 1 = 0 \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2\sin x - 1 = 0 \\ 2\sin x + 1 = 0 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\pi k; \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

Тренировочная работа 11

Вычислите:

1) $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ при $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

2) $\operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}3$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\cos(2\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$; $\sin\beta=\frac{2\sqrt{6}}{7}$ при $\beta\in$ II четверти;

4) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{7}{24}\right)$;

5) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{7}{25}\right)$;

6) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\arcsin 0{,}96\right)$;

7) $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{119}{120}$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

8) $\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

9) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{224}}$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

10) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$;

11) $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -0{,}8$ при $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;

12) $\cos\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right)\right]$;

13) $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$ при $630^\circ < \alpha < 720^\circ$;

14) $\sin\left(2\pi - \frac{1}{2}\arccos\frac{12}{13}\right)$;

15) $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, если $\cos\beta = -\frac{13}{85}$ при $540^\circ < \beta < 630^\circ$;

16) $\cos\left[2\pi - \frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$;

17) $\cos 5x$, если $\cos 10x = \frac{15}{113}$ при $1080^\circ < 10x < 1200^\circ$;

18) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

Решение тренировочной работы 11

Вычислите:

1) $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ при $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;\quad \cos 2\alpha = 2\cdot\dfrac{4}{9} - 1 = -\dfrac{1}{9};$

$\sin\alpha < 0$, так как $\alpha \in$ IV четверти;

$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha};\quad \sin\alpha = -\sqrt{1-\dfrac{4}{9}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{3};$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;\quad \sin 2\alpha = 2\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\dfrac{2}{3} = -\dfrac{4}{9}\sqrt{5};$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha};\quad \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{-\frac{4}{9}\sqrt{5}}{-\frac{1}{9}};\quad \operatorname{tg} 2\alpha = \boxed{4\sqrt{5}}.$

2) $\operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}3$ при $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;\quad \cos 2\alpha = 1 - 2\cdot(-0{,}3)^2 = 0{,}82;$

$\cos\alpha < 0$, так как $\alpha \in$ III; $\cos\alpha = -\sqrt{1-(-0{,}3)^2} = -\dfrac{\sqrt{91}}{10};$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;\quad \sin 2\alpha = 2\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{91}}{10}\right)\cdot(-0{,}3) = \dfrac{3}{50}\sqrt{91};$

$\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha};\quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{0{,}82}{\frac{3}{50}\sqrt{91}} = \boxed{\dfrac{41\sqrt{91}}{273}}.$

3) $\cos(2\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{5}$; $\sin\beta = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}$ при $\beta \in$ II четверти.

$\cos(2\alpha-\beta) = \cos 2\alpha\cdot\cos\beta + \sin 2\alpha\cdot\sin\beta;$

$\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};\quad \cos 2\alpha = \dfrac{1-\frac{9}{25}}{1+\frac{9}{25}} = \dfrac{16}{34} = \dfrac{8}{17};$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}; \quad \sin 2\alpha = \frac{2\cdot\frac{3}{5}}{1+\frac{9}{25}} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17};$$

$$\cos\beta < 0, \text{ так как } \beta \in \mathrm{II}; \quad \cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta};$$

$$\cos\beta = -\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^2} = -\frac{5}{7};$$

$$\cos(2\alpha-\beta) = -\frac{8}{17}\cdot\frac{5}{7} + \frac{15}{17}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7} = \boxed{-\frac{40-30\sqrt{6}}{119}}.$$

4) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{7}{24}\right)$.

$$\operatorname{arctg}\frac{7}{24} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Пусть $\operatorname{arctg}\dfrac{7}{24} = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{7}{24}$;

$$\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{7}{24}\right) = 2\cos^2\operatorname{arctg}\frac{7}{24} - 1;$$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$; но $\cos\alpha > 0$, $\quad \alpha \in \mathrm{I}$ четверти.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{7}{24}\right)^2}} = \frac{24}{25};$$

$$\cos 2\alpha = 2\cdot\left(\frac{24}{25}\right)^2 - 1 = \frac{2\cdot 576 - 625}{25^2} = \frac{527}{625},$$

т. е. $\cos\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{7}{24}\right) = \boxed{\dfrac{527}{625}}$.

5) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\dfrac{7}{25}\right)$.

Пусть $\arcsin\dfrac{7}{25} = \alpha$; $\quad \alpha \in \mathrm{I}$ четверти, $\sin\alpha = \dfrac{7}{25}$.

$\operatorname{ctg} 2\alpha = ?$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;$

$\cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot \dfrac{49}{625} = \dfrac{527}{625};$

$\cos\alpha > 0$, так как $\alpha \in \mathrm{I}$; $\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{7}{25}\right)^2} = \dfrac{24}{25};$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;$ $\sin 2\alpha = 2 \cdot \dfrac{7}{25} \cdot \dfrac{24}{25} = \dfrac{336}{625};$

$\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha};$ $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\frac{527}{625}}{\frac{336}{625}} = \dfrac{527}{336}.$

Таким образом, $\operatorname{ctg} 2\alpha = \boxed{\dfrac{527}{336}}.$

6) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\arcsin 0{,}96\right).$

$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\arcsin 0{,}96\right) = \sin\left(2\arcsin 0{,}96\right).$

Пусть $\arcsin 0{,}96 = \alpha$; $\sin\alpha = 0{,}96$; $\alpha \in \mathrm{I}$ четверти;

$\cos\alpha > 0;$ $\cos\alpha = \sqrt{1 - (0{,}96)^2} = \dfrac{7}{25};$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;$ $\sin 2\alpha = 2 \cdot \dfrac{24}{25} \cdot \dfrac{7}{25} = \dfrac{336}{625}.$

Таким образом, $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\arcsin 0{,}96\right) = \boxed{\dfrac{336}{625}}.$

7) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{119}{120}$ при $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}.$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}};$ $\cos\alpha < 0;$ $\alpha \in \mathrm{III};$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{-\sqrt{1 + \left(\frac{119}{120}\right)^2}} = -\dfrac{120}{169};$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4};\quad \sin\frac{\alpha}{2}>0;$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{120}{169}}{2}}=\sqrt{\frac{289}{169}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{17}{13}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\boxed{\frac{17\sqrt{2}}{26}}.$$

8) $\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Пусть $\arcsin\frac{3}{5}=\alpha;\quad \alpha\in\mathrm{I};\quad \sin\alpha=\frac{3}{5}$.

Требуется найти $\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad \cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)=\boxed{-\frac{1}{3}}$.

9) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{224}}$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

$$\cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}};\quad \cos\alpha>0;\quad \alpha\in\text{I четверти};$$

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{224}}}=\frac{\sqrt{224}}{\sqrt{225}}=\frac{4\sqrt{14}}{15};$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha};\quad \sin\alpha>0;\quad \alpha\in\text{I четверти};$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{224}{225}}=\frac{1}{15};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\frac{4\sqrt{14}}{15}}{\frac{1}{15}}=\boxed{15-4\sqrt{14}}.$$

10) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\right)$.

Пусть $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}=\alpha;\quad \alpha\in\mathrm{I};\quad \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{4};$

$\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2};\quad \dfrac{\alpha}{2}\in\mathrm{I}$ четверти;

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}};\quad \cos\alpha>0;\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}}=\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}}=\frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\right)=\boxed{\dfrac{1}{3}}$.

11) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=-0{,}8$ при $180^\circ<\alpha<270^\circ$.

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-(-0{,}8)^2}=-\sqrt{0{,}36}=-0{,}6;$$

$$90^\circ<\frac{\alpha}{2}<135^\circ;\quad \sin\frac{\alpha}{2}>0;$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+0{,}6}{2}}=\sqrt{0{,}8}=\boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}.$$

12) $\cos\left[\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{12}{5}\right)\right]$.

Пусть $\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{12}{5}\right)=\alpha;\quad \alpha\in\mathrm{IV};\quad \operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{12}{5}.$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}};\quad \cos\alpha>0;$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{12}{5}\right)^2}}=\frac{5}{13};$$

$$\frac{\alpha}{2} \in \mathrm{IV}; \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0;$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \quad -\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < 0; \quad \cos\frac{\alpha}{2} > 0;$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

Таким образом, $\cos\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right)\right] = \boxed{\frac{3\sqrt{13}}{13}}$.

13) $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$ при $630^\circ < \alpha < 720^\circ$.

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$; так как $\alpha \in \mathrm{IV}$, то $\cos\alpha > 0$;

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(-\frac{15}{17}\right)^2} = \frac{8}{17};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \text{ так как } \frac{\alpha}{2} \in \mathrm{IV};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{8}{17}}{2}} = \boxed{\frac{5\sqrt{34}}{34}}.$$

14) $\sin\left(2\pi - \frac{1}{2}\arccos\frac{12}{13}\right)$.

$$\sin\left(2\pi - \frac{1}{2}\arccos\frac{12}{13}\right) = \sin\left(-\arccos\frac{12}{13}\right).$$

Пусть $\arccos\frac{12}{13} = \alpha; \quad \alpha \in \mathrm{I}; \quad \cos\alpha = \frac{12}{13}$.

$$\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = -\sin\frac{\alpha}{2}; \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \quad \frac{\alpha}{2} \in \mathrm{I};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{12}{13}}{2}} = \frac{\sqrt{26}}{26};$$

$$\sin\left(2\pi - \frac{1}{2}\arccos\frac{12}{13}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{26}}{26}}.$$

15) $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, если $\cos\beta = -\frac{13}{85}$ при $540^\circ < \beta < 630^\circ$.

$\frac{\beta}{2} \in \mathrm{IV}$; $\quad \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} < 0$; $\quad \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}}$;

$$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\frac{13}{85}}{1+\frac{13}{85}}} = -\sqrt{\frac{72}{98}} = \boxed{-\frac{6}{7}}.$$

16) $\cos\left[2\pi - \frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$.

Пусть $\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right) = \alpha$; $\quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$; $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$.

$\cos\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}$;

$\cos\alpha > 0$, так как $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$;

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$; $\quad \cos\alpha = \sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$;

так как $-\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < 0$, то $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$;

$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$; $\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$.

Таким образом, $\cos\left[2\pi - \frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right] = \boxed{\frac{5\sqrt{26}}{26}}$.

17) $\cos 5x$, если $\cos 10x = \frac{15}{113}$ при $1080^\circ < 10x < 1200^\circ$.

$540^\circ < 5x < 600^\circ$; $\quad 5x \in \mathrm{III}$; $\quad \cos 5x < 0$;

$$\cos 5x = -\sqrt{\frac{1+\cos 10x}{2}};$$

$$\cos 5x = -\sqrt{\frac{1+\frac{15}{113}}{2}} = -\sqrt{\frac{64}{113}} = \boxed{-\frac{8\sqrt{113}}{113}}.$$

18) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{12}{13}\right)$.

Пусть $\arcsin\dfrac{12}{13}=\alpha;\quad \alpha\in\mathrm{I};\quad \sin\alpha=\dfrac{12}{13}$.

$\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)=-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$;

$\cos\alpha>0$, так как $\alpha\in\mathrm{I}$; $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2}=\dfrac{5}{13}$;

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

Так как $\dfrac{\alpha}{2}\in\mathrm{I}$ четверти, то

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};\quad \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{5}{13}}{1+\frac{5}{13}}}=\dfrac{2}{3}$;

$\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{12}{13}\right)=\boxed{-\dfrac{2}{3}}$.

Тренировочная работа 12

Упростите:

1) $\sin^2\alpha - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

2) $1 - 8\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

3) $\cos^2\alpha - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$;

4) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$;

5) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$;

6) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}2\alpha$;

7) $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3\alpha}{2}\right) - 1$;

8) $\dfrac{1+\cos 42^\circ}{1-\sin 48^\circ}$;

9) $\dfrac{1-2\sin\frac{x}{2}-\cos x}{1+2\sin\frac{x}{2}-\cos x}$;

10) $\dfrac{1+2\cos\frac{x}{2}+\cos x}{1-2\cos\frac{x}{2}+\cos x}$.

Решение тренировочной работы 12

Упростите:

1) $\sin^2\alpha - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) =$

$= \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \boxed{-\cos 2\alpha}$.

2) $1 - 8\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha =$

$= 1 - 2\cdot(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin^2 2\alpha = \boxed{\cos 4\alpha}$.

3) $\cos^2\alpha - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2} =$

$= \cos^2\alpha - \left(2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \boxed{\cos 2\alpha}$.

4) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha} =$

$= \dfrac{\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha - \sin 2\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \dfrac{\cos 3\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \boxed{\dfrac{2\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha}}$.

5) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} =$

$= \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \dfrac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\sin\alpha-\cos\alpha} =$

$= \boxed{\sin\alpha - \cos\alpha}$.

6) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}2\alpha =$

$= \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \dfrac{\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha - \sin\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha} =$

$= \dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha} = \dfrac{1}{\sin 2\alpha} = \boxed{\operatorname{cosec} 2\alpha}$.

7) $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3\alpha}{2}\right) - 1 =$

$= \cos 2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3\alpha}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3\alpha\right) = \boxed{\sin 3\alpha}$.

8) $$\frac{1+\cos 42^\circ}{1-\sin 48^\circ} =$$

$$= \frac{1+\cos 42^\circ}{1-\sin(90^\circ - 42^\circ)} = \frac{1+\cos 42^\circ}{1-\cos 42^\circ} = \frac{2\cos^2 21^\circ}{2\sin^2 21^\circ} = \boxed{\operatorname{ctg}^2 21^\circ}.$$

9) $$\frac{1-2\sin\frac{x}{2}-\cos x}{1+2\sin\frac{x}{2}-\cos x} =$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-1\right)}{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+1\right)} = \frac{\sin\frac{x}{2}-1}{\sin\frac{x}{2}+1} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+1} = \frac{-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{4}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{4}\right)} = \boxed{-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{4}\right)}.$$

10) $$\frac{1+2\cos\frac{x}{2}+\cos x}{1-2\cos\frac{x}{2}+\cos x} =$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}}{2\cos x^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+1\right)}{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)} =$$

$$= -\frac{1+\cos\frac{x}{2}}{1-\cos\frac{x}{2}} = -\frac{2\cos^2\frac{x}{4}}{2\sin^2\frac{x}{4}} = \boxed{-\operatorname{ctg}^2\frac{x}{4}}.$$

Тренировочная работа 13

Докажите тождества:

1) $\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$;

2) $\dfrac{1 + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cos 4\alpha}{\cos\alpha(1 + 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha)} = 2\sin\alpha$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta) + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}} = 2\cos\beta$;

4) $\cos\alpha(1 - 2\cos^2\alpha)(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}2\alpha) = \sin\alpha$;

5) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha - 2\operatorname{ctg}2\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$;

6) $\dfrac{1 - 8\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} = 1$;

7) $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{\sin\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}$;

8) $\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} - 2\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(\cos^2\dfrac{\alpha}{4} - \sin^2\dfrac{\alpha}{4}\right) = \sin\dfrac{\alpha}{2}$;

9) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sec 3\alpha} - \dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\operatorname{cosec}3\alpha} = \cos 5\alpha$;

10) $\dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}} = -\operatorname{cosec}\dfrac{\alpha}{2}$;

11) $\dfrac{\cos 6\alpha}{\sec 4\alpha} - \dfrac{2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\operatorname{cosec}6\alpha} = \cos 10\alpha$;

12) $\dfrac{\cos^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}2\alpha - \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}2\alpha$;

13) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha - \sin 2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$;

14) $\dfrac{1+\sin 3\alpha+\cos 3\alpha}{1+\sin 3\alpha-\cos 3\alpha}=\operatorname{ctg} 1{,}5\alpha;$

15) $\dfrac{4\sin\frac{\alpha}{3}\cdot\cos^3\frac{\alpha}{3}-4\sin^3\frac{\alpha}{3}\cdot\cos\frac{\alpha}{3}}{2\cos\frac{2\alpha}{3}}=\sin\dfrac{2\alpha}{3};$

16) $\dfrac{4\sin^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\right)+\sin^2\left(\sqrt{2}\alpha\right)}{1-\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\right)}=4.$

Решение тренировочной работы 13

Доказите тождества:

1) $\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

$$\text{L} = \sin\alpha - \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha - \cos\alpha \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{L} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \\ \Pi = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi.$$

2) $\dfrac{1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \cos 4\alpha}{\cos\alpha(1 + 4\sin\alpha \cdot \cos\alpha)} = 2\sin\alpha$.

$$\text{L} = \frac{1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \cos 4\alpha}{\cos\alpha(1 + 4\sin\alpha \cdot \cos\alpha)} = \frac{2\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos\alpha(1 + 2\sin 2\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha(2\sin 2\alpha + 1)}{\cos\alpha(1 + 2\sin 2\alpha)} = \frac{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha} = 2\sin\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{L} = 2\sin\alpha \\ \Pi = 2\sin\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi.$$

3) $\dfrac{\sin(\alpha - \beta) + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} = 2\cos\beta$.

$$\text{L} = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\frac{1}{2}\sin\alpha} = 2\cos\beta.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{L} = 2\cos\beta \\ \Pi = 2\cos\beta \end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi.$$

4) $\cos\alpha(1-2\cos^2\alpha)(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}2\alpha)=\sin\alpha.$

$$\mathrm{L}=\cos\alpha(1-2\cos^2\alpha)(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}2\alpha)=$$
$$=-\cos\alpha\cdot\cos2\alpha\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos2\alpha-\cos\alpha\cdot\sin2\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos2\alpha}=$$
$$=\frac{-\cos\alpha\cdot\cos2\alpha\cdot(-\sin\alpha)}{\cos\alpha\cdot\cos2\alpha}=\sin\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=\sin\alpha\\ \Pi=\sin\alpha\end{array}\right|\Rightarrow\mathrm{L}=\Pi.$$

5) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{\cos\alpha}.$

$$\mathrm{L}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{2\cos2\alpha}{\sin2\alpha}}{\sin\alpha}=$$
$$=\frac{\cos\alpha\cdot\sin2\alpha-2\cos2\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\sin2\alpha}=$$
$$=\frac{\cos\alpha\cdot\sin2\alpha-\cos2\alpha\cdot\sin\alpha-\cos2\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin^2\alpha\cdot2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$$
$$=\frac{\sin\alpha-\cos2\alpha\cdot\sin\alpha}{2\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha(1-\cos2\alpha)}{2\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha}=$$
$$=\frac{\sin\alpha\cdot2\sin^2\alpha}{2\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=\frac{1}{\cos\alpha}\\ \Pi=\frac{1}{\cos\alpha}\end{array}\right|\Rightarrow\mathrm{L}=\Pi.$$

6) $\dfrac{1-8\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}=1.$

$$\mathrm{L}=\frac{1-8\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}=\frac{1-2\cdot(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^2}{\cos4\alpha}=$$
$$=\frac{1-2\sin^2 2\alpha}{\cos4\alpha}=\frac{\cos4\alpha}{\cos4\alpha}=1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=1\\ \Pi=1\end{array}\right|\Rightarrow\mathrm{L}=\Pi.$$

7) $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{\sin\alpha}=1+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}.$

$$\text{L}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{\sin\alpha}=\frac{\frac{\cos\frac{\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{4}}-\frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{4}}}{\sin\alpha}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}-\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=1+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$\left.\begin{aligned}\text{L}&=1+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\\ \Pi&=1+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\end{aligned}\right|\Rightarrow \text{L}=\Pi.$$

8) $\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-2\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(\cos^2\dfrac{\alpha}{4}-\sin^2\dfrac{\alpha}{4}\right)=\sin\dfrac{\alpha}{2}.$

$$\text{L}=\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-2\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(\cos^2\frac{\alpha}{4}-\sin^2\frac{\alpha}{4}\right)=$$

$$=\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha-2\cos\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}(1-\cos\alpha)\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$\left.\begin{aligned}\text{L}&=\sin\frac{\alpha}{2}\\ \Pi&=\sin\frac{\alpha}{2}\end{aligned}\right|\Rightarrow \text{L}=\Pi.$$

9) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sec 3\alpha} - \dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\operatorname{cosec} 3\alpha} = \cos 5\alpha.$

$$\text{L} = \frac{\cos 2\alpha}{\sec 3\alpha} - \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\operatorname{cosec} 3\alpha} =$$

$$= \cos 2\alpha\cdot\cos 3\alpha - \sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha = \cos 5\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L} = \cos 5\alpha\\ \Pi = \cos 5\alpha\end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi.$$

10) $\dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}} = -\operatorname{cosec}\dfrac{\alpha}{2}.$

$$\text{L} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \alpha\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= -\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = -\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L} = -\operatorname{cosec}\dfrac{\alpha}{2}\\ \Pi = -\operatorname{cosec}\dfrac{\alpha}{2}\end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi.$$

11) $\dfrac{\cos 6\alpha}{\sec 4\alpha} - \dfrac{2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\operatorname{cosec} 6\alpha} = \cos 10\alpha.$

$$\text{L} = \frac{\cos 6\alpha}{\sec 4\alpha} - \frac{2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\operatorname{cosec} 6\alpha} = \frac{\cos 6\alpha}{\frac{1}{\cos 4\alpha}} - \frac{\sin 4\alpha}{\frac{1}{\sin 6\alpha}} =$$

$$= \cos 6\alpha\cdot\cos 4\alpha - \sin 4\alpha\cdot\sin 6\alpha = \cos 10\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L} = \cos 10\alpha\\ \Pi = \cos 10\alpha\end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi.$$

12) $\dfrac{\cos^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg} 2\alpha - \sin 4\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$

$$\mathrm{L} = \frac{\cos^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg} 2\alpha - \sin 4\alpha} = \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - 2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha\cdot\frac{1-2\sin^2 2\alpha}{\sin 2\alpha}} = \frac{\sin 2\alpha\cdot\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L} = \operatorname{tg} 2\alpha\\ \Pi = \operatorname{tg} 2\alpha\end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

13) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha - \sin 2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$

$$\mathrm{L} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \sin 2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{\cos\alpha(1-2\sin^2\alpha)}{\sin\alpha}}{\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L} = \operatorname{ctg}\alpha\\ \Pi = \operatorname{ctg}\alpha\end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

14) $\dfrac{1+\sin 3\alpha + \cos 3\alpha}{1+\sin 3\alpha - \cos 3\alpha} = \operatorname{ctg} 1{,}5\alpha.$

$$\mathrm{L} = \frac{1+\sin 3\alpha + \cos 3\alpha}{1+\sin 3\alpha - \cos 3\alpha} =$$

$$= \frac{2\cos^2 1{,}5\alpha + 2\sin 1{,}5\alpha\cdot\cos 1{,}5\alpha}{2\sin^2 1{,}5\alpha + 2\sin 1{,}5\alpha\cdot\cos 1{,}5\alpha} =$$

$$= \frac{2\cos 1{,}5\alpha(\cos 1{,}5\alpha + \sin 1{,}5\alpha)}{2\sin 1{,}5\alpha(\sin 1{,}5\alpha + \cos 1{,}5\alpha)} = \operatorname{ctg} 1{,}5\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L} = \operatorname{ctg} 1{,}5\alpha\\ \Pi = \operatorname{ctg} 1{,}5\alpha\end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

15) $$\frac{4\sin\frac{\alpha}{3}\cdot\cos^3\frac{\alpha}{3}-4\sin^3\frac{\alpha}{3}\cdot\cos\frac{\alpha}{3}}{2\cos\frac{2\alpha}{3}}=\sin\frac{2\alpha}{3}.$$

$$\mathrm{L}=\frac{4\sin\frac{\alpha}{3}\cdot\cos^3\frac{\alpha}{3}-4\sin^3\frac{\alpha}{3}\cdot\cos\frac{\alpha}{3}}{2\cos\frac{2\alpha}{3}}=$$

$$=\frac{4\sin\frac{\alpha}{3}\cdot\cos\frac{\alpha}{3}\left(\cos^2\frac{\alpha}{3}-\sin^2\frac{\alpha}{3}\right)}{2\cos\frac{2\alpha}{3}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{2\alpha}{3}\cdot\cos\frac{2\alpha}{3}}{\cos\frac{2\alpha}{3}}=\sin\frac{2\alpha}{3}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=\sin\dfrac{2\alpha}{3}\\ \Pi=\sin\dfrac{2\alpha}{3}\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi.$$

16) $$\frac{4\sin^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\right)+\sin^2\left(\sqrt{2}\alpha\right)}{1-\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\right)}=4.$$

$$\mathrm{L}=\frac{4\sin^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\right)+\sin^2\left(\sqrt{2}\alpha\right)}{1-\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\right)}=$$

$$=\frac{4\sin^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\right)\left(\sin^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\right)}=$$

$$=4\left(\sin^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\right)\right)=4.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=4\\ \Pi=4\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi.$$

Тренировочная работа 14

1. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, $\operatorname{tg}2\beta$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = 0{,}6$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\cos\beta = 0{,}28$ при $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$;

2) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$, если $\cos\alpha - \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg}2\alpha + 5\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4) $\cos(\alpha-\beta)$, $\cos2\beta$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{15}{8}$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\beta = -\frac{20}{21}$ при $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

2. Решите уравнения:

1) $\sin 3x \cdot \cos 5x + \sin 5x \cdot \cos 3x = -1$;

2) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \sin\frac{x}{2} = 1$;

3) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 1$;

4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \operatorname{tg}(\pi - x) - 2\sqrt{3} = 0$;

5) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin^2(2\pi - x) = 2$;

6) $\sin\frac{5\pi}{2} - \operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Решение тренировочной работы 14

1. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, $\operatorname{tg}2\beta$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=0{,}6$ при $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $\cos\beta=0{,}28$ при $\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.

а) $\cos\alpha<0$; $\quad \cos\alpha=-\sqrt{1-(0{,}6)^2}=-0{,}8$;

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{0{,}6}{-0{,}8}=-\frac{3}{4};$$

б) $\sin\beta<0$; $\quad \sin\beta=-\sqrt{1-(0{,}28)^2}=-0{,}96$;

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{-0{,}96}{0{,}28}=-3\frac{3}{7};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{-\frac{3}{4}-\left(-3\frac{3}{7}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-3\frac{3}{7}\right)}=\frac{-21+96}{28+72}=\boxed{0{,}75};$$

$$\operatorname{tg}2\beta=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta};\quad \operatorname{tg}2\beta=\frac{2\cdot\left(-3\frac{3}{7}\right)}{1-\left(-3\frac{3}{7}\right)^2}=\frac{-48\cdot 7}{49-(24)^2}=$$

$$=\frac{48\cdot 7}{(24+7)(24-7)}=\frac{336}{31\cdot 17}=\boxed{\frac{336}{527}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+0{,}8}{0{,}6}=\frac{1{,}8}{0{,}6}=\boxed{3}.$$

2) $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$, если $\cos\alpha-\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как $\cos\alpha-\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

то $\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha=\dfrac{3}{4}$.

Значит, $\sin 2\alpha=\dfrac{1}{4}$.

Тогда $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha =$

$= (\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin^2\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha) =$

$= -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\right) =$

$= -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{9}{8} = \boxed{-\dfrac{9\sqrt{3}}{16}}.$

3) $\operatorname{tg} 2\alpha + 5\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$ при $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

а) $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$; $\quad \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \frac{9}{16}} = \dfrac{-24}{7} = -3\dfrac{3}{7}$;

б) $\sin\alpha > 0$; $\quad \sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}$;

$\sin\alpha = \dfrac{-\frac{3}{4}}{-\sqrt{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = \dfrac{3}{5}$;

$\cos\alpha < 0$; $\quad \cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$; $\quad \cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$;

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\quad \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = 3$;

в) $\operatorname{tg} 2\alpha + 5\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = -3\dfrac{3}{7} + 5\cdot 3 = \boxed{11\dfrac{4}{7}}.$

4) $\cos(\alpha-\beta)$, $\cos 2\beta$ и $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{15}{8}$ при $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{20}{21}$ при $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

а) $\sin\alpha < 0$; $\quad \sin\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}}$;

$\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{15}{8}\right)^2}} = -\dfrac{8}{17}$;

$\cos\alpha < 0$; $\quad \cos\alpha = -\sqrt{1 - \left(-\dfrac{8}{17}\right)^2} = -\dfrac{15}{17}$;

б) $\sin\beta > 0$; $\quad \sin\beta = \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}$;

$$\sin\beta = \frac{-\frac{20}{21}}{-\sqrt{1+\left(-\frac{20}{21}\right)^2}} = \frac{20}{29};$$

$$\cos\beta < 0; \quad \cos\beta = -\sqrt{1-\left(\frac{20}{29}\right)^2} = -\frac{21}{29};$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta) = -\frac{15}{17}\cdot\left(-\frac{21}{29}\right) + \left(-\frac{8}{17}\right)\cdot\frac{20}{29} = \frac{315-160}{17\cdot 29} =$$

$$= \frac{155}{17\cdot 29} = \boxed{\frac{155}{493}};$$

$$\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta;$$

$$\cos 2\beta = 1 - 2\cdot\left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{841-800}{841} = \boxed{\frac{41}{841}};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \quad \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} > 0; \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{15}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{17}} = \boxed{\frac{4\sqrt{17}}{17}}.$$

2. Решите уравнения:

1) $\sin 3x\cdot\cos 5x + \sin 5x\cdot\cos 3x = -1.$

$\sin(3x+5x) = -1; \quad \sin 8x = -1;$

$8x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad x = -\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi}{4}k \mid k\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi}{4}k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$

2) $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) + \sin\dfrac{x}{2} = 1.$

$$\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\right) + \sin\frac{x}{2} = 1;$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}=1;$$

$$\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=1; \quad \cos\frac{x}{2}=1; \quad \frac{x}{2}=2\pi k;$$

$x=4\pi k \mid k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\{4\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

3) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)=1.$

$$-\cos 2x-\cos 2x=1; \quad \cos 2x=-\frac{1}{2};$$

$$2x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2\pi k; \quad x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)+\operatorname{tg}(\pi-x)-2\sqrt{3}=0.$

$$-\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x-2\sqrt{3}=0; \quad \operatorname{tg}x=-\sqrt{3}; \quad x=-\frac{\pi}{3}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{3}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

5) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+\sin^2(2\pi-x)=2.$

$$\sin^2 x+\sin^2 x=2; \quad \sin^2 x=1; \quad \cos^2 x=0;$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

6) $\sin\dfrac{5\pi}{2}-\operatorname{tg}\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)=4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right).$

$$\sin\frac{\pi}{2}-\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=4\cos x; \quad 1+1=4\cos x;$$

$$\cos x=\frac{1}{2}; \quad x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Проверочная работа 1

1. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}2\alpha$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$, если $\cos\alpha=-0{,}8$ при $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $\sin\beta=-\dfrac{12}{13}$ при $\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$;

2) $\cos(\alpha-\beta)$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ и $\sin2\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{8}{15}$ при $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{21}{20}$ при $\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\cos2x\cdot\operatorname{ctg}4x$, если $\cos x+\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\operatorname{tg}2\alpha+3\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{4}{3}$ при $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

2. Решите уравнения:

1) $\cos6x\cdot\cos5x+\sin6x\cdot\sin5x=-1$;

2) $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\cos x=1$;

3) $\cos(\pi-x)+\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sqrt{2}$;

4) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{19\pi}{9}+x\right)-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{11\pi}{18}+x\right)=-2$;

5) $\left[1-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)\right][1+\cos(\pi-x)]=1$;

6) $\cos^2\dfrac{13\pi}{15}+\sin^2\dfrac{28\pi}{15}=\sqrt{3}\operatorname{tg}2x$.

Решение проверочной работы 1

1. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}2\alpha$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$, если $\cos\alpha = -0{,}8$ при $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\sin\beta = -\dfrac{12}{13}$ при $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$.

а) $\sin\alpha > 0$; $\sin\alpha = \sqrt{1-(-0{,}8)^2} = 0{,}6$;
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{0{,}6}{-0{,}8} = -\dfrac{3}{4}$;

б) $\cos\beta < 0$; $\cos\beta = -\sqrt{1-\left(-\dfrac{12}{13}\right)^2} = -\dfrac{5}{13}$;
$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{-\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = \dfrac{12}{5}$;

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{-\frac{3}{4}+\frac{12}{5}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{12}{5}} = \frac{33}{20+36} = \boxed{\frac{33}{56}}.$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};\quad \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{-\frac{6}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \boxed{-\frac{24}{7}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{\sin\beta};\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1+\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = \frac{18}{-12} = \boxed{-1{,}5}.$$

2) $\cos(\alpha-\beta)$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ и $\sin2\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{8}{15}$ при $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{21}{20}$ при $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$.

а) $\cos\alpha < 0$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$;

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{8}{15}\right)^2}} = -\frac{15}{17};$$

$$\sin\alpha > 0; \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\left(-\frac{15}{17}\right)^2} = \frac{8}{17};$$

б) $\cos\beta < 0; \quad \cos\beta = \dfrac{\operatorname{ctg}\beta}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\beta}};$

$$\cos\beta = \frac{\frac{21}{20}}{-\sqrt{1+\left(\frac{21}{20}\right)^2}} = -\frac{21}{29};$$

$$\sin\beta < 0; \quad \sin\beta = -\sqrt{1-\left(-\frac{21}{29}\right)^2} = -\frac{20}{29};$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta) = -\frac{15}{17}\cdot\left(-\frac{21}{29}\right) + \frac{8}{17}\cdot\left(-\frac{20}{29}\right) =$$

$$= \frac{315-160}{17\cdot 29} = \boxed{\frac{155}{493}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} > 0; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{15}{17}}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{17}}{17}};$$

$$\sin 2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}; \quad \sin 2\beta = \frac{2\cdot\frac{20}{21}}{1+\left(\frac{20}{21}\right)^2} = \boxed{\frac{840}{841}}.$$

3) $\cos 2x\cdot\operatorname{ctg}4x$, если $\cos x + \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos x + \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, тогда $\cos^2 x + 2\sin x\cdot\cos x + \sin^2 x = \dfrac{1}{2}$;

$$\sin 2x = -\frac{1}{2};$$

$$\cos 2x \cdot \operatorname{ctg} 4x = \frac{\cos 2x \cdot \cos 4x}{\sin 4x} = \frac{\cos 2x \cdot \cos 4x}{2\sin 2x \cdot \cos 2x} = \frac{\cos 4x}{2\sin 2x},$$

но $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$; $\quad \cos 4x = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Тогда $\cos 2x \cdot \operatorname{ctg} 4x = \dfrac{\frac{1}{2}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \boxed{-\frac{1}{2}}$.

4) $\operatorname{tg} 2\alpha + 3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

а) $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$;

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{24}{9 - 16} = -\frac{24}{7} = -3\frac{3}{7};$$

б) $\cos\alpha < 0$; $\quad \cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}$;

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} = -\frac{3}{5};$$

$$\sin\alpha < 0; \quad \sin\alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5};$$

в) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$; $\quad \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{-\frac{4}{5}}{1 + \left(-\frac{3}{5}\right)} = -2$;

г) $\operatorname{tg} 2\alpha + 3\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = -3\dfrac{3}{7} + 3 \cdot (-2) = \boxed{-9\frac{3}{7}}$.

2. Решите уравнения:

1) $\cos 6x \cdot \cos 5x + \sin 6x \cdot \sin 5x = -1$.

$\cos(6x - 5x) = -1$;

$\cos x = -1$; $\quad x = \pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\{\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2) $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\cos x=1.$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin x\right)-\cos x=1;$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)-\cos x=1;$$

$$\cos x-\sin x-\cos x=1;$$

$$\sin x=-1;\quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k\mid k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3) $\cos(\pi-x)+\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sqrt{2}.$

$$-\cos x-\cos x=\sqrt{2};\quad \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2\pi k;$$

$$x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k\mid k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{19\pi}{9}+x\right)-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{11\pi}{18}+x\right)=-2.$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{9}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{9}+x\right)=-2;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{9}+x\right)=-1;\quad \frac{\pi}{9}+x=-\frac{\pi}{4}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{13\pi}{36}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

5) $\left[1-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)\right][1+\cos(\pi-x)]=1.$

$(1+\cos x)(1-\cos x)=1;$

$1-\cos^2 x=1;\quad \cos^2 x=0;\quad x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

6) $\cos^2\dfrac{13\pi}{15}+\sin^2\dfrac{28\pi}{15}=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,2x.$

$\cos^2\dfrac{2\pi}{15}+\sin^2\dfrac{2\pi}{15}=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,2x;$

$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,2x=1;\quad \mathrm{tg}\,2x=\dfrac{1}{\sqrt{3}};\quad 2x=\dfrac{\pi}{6}+\pi k;$

$x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}k\,|\,k\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Тренировочная работа 15

1. Вычислите:

1) $2\sin 30^\circ - \sqrt{3}\sin 60^\circ \operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$;

2) $\dfrac{6\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ}$;

3) $\dfrac{\cos 64^\circ \cdot \cos 4^\circ - \cos 86^\circ \cos 26^\circ}{\cos 71^\circ \cdot \cos 41^\circ - \cos 49^\circ \cdot \cos 19^\circ}$;

4) $\cos 75^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ + \sin 75^\circ$;

5) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{15}$ при $360^\circ < \alpha < 450^\circ$;

6) $\operatorname{tg}\beta$, $\cos 2\beta$ и $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, если $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \dfrac{2}{3}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = 5$ $(\alpha \in (0; 2\pi))$;

7) $\sqrt{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$, если $\sin x - \cos x = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}$ при $0 < x < \dfrac{2\pi}{3}$.

2. Упростите:

1) $\dfrac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} \cdot \operatorname{ctg}\left(\alpha - \dfrac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\alpha - \pi)$;

2) $\dfrac{\sin(2\alpha - 3\pi) + 2\cos\left(\frac{7\pi}{6} + 2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) + \sqrt{3}\cos(2\alpha - 3\pi)}$;

3) $\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$;

4) $\cos^2\alpha + \cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha)$;

3. Решите уравнения:

1) $(2\sin\pi x - \sqrt{3})(\sqrt{2}\cos\pi x + 1) = 0$;

2) $\dfrac{\sin 2x}{1 + \cos x} = 0$;

3) $\sin\dfrac{2\pi x}{3}+\sin^2\dfrac{\pi x}{6}=\cos^2\dfrac{\pi x}{6}$;

4) $2\cos^2\dfrac{\pi x}{6}+3\sin\dfrac{\pi x}{6}=0$;

5) $\sin^2\dfrac{\pi x}{3}+5\cos\dfrac{\pi x}{3}=5$;

6) $\sin 3x+\sin x=0$.

Решение тренировочной работы 15

1. Вычислите:

1) $2\sin 30^\circ - \sqrt{3}\sin 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ =$

$$= 2\cdot\frac{1}{2} - \sqrt{3}\cdot\cos 30^\circ\cdot 1\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \boxed{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

2) $\dfrac{6\sin 30^\circ\cdot\cos 30^\circ}{\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ} =$

$$= \frac{3\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = 3\operatorname{tg} 60^\circ = \boxed{3\sqrt{3}}.$$

3.5 3) $\dfrac{\cos 64^\circ\cdot\cos 4^\circ - \cos 86^\circ\cdot\cos 26^\circ}{\cos 71^\circ\cdot\cos 41^\circ - \cos 49^\circ\cdot\cos 19^\circ} =$

$$= \frac{\sin 26^\circ\cdot\cos 4^\circ - \sin 4^\circ\cdot\cos 26^\circ}{\sin 19^\circ\cdot\cos 41^\circ - \sin 41^\circ\cdot\cos 19^\circ} = \frac{\sin 22^\circ}{-\sin 22^\circ} = \boxed{-1}.$$

4) $\cos 75^\circ\cdot\operatorname{ctg} 30^\circ + \sin 75^\circ =$

$$= \frac{\cos 75^\circ\cdot\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} + \sin 75^\circ =$$

$$= \frac{\cos 75^\circ\cdot\cos 30^\circ + \sin 75^\circ\cdot\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{2}}.$$

5) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{15}$ при $360^\circ < \alpha < 450^\circ$.

а) $\cos\alpha > 0$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+15}} = \dfrac{1}{4}$;

$180^\circ < \dfrac{\alpha}{2} < 225^\circ$; $\cos\dfrac{\alpha}{2} < 0$;

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}}{2}} = -\sqrt{\frac{5}{8}} = \boxed{-\frac{1}{4}\sqrt{10}};$$

б) $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\cdot\sqrt{15}}{1-15} = \boxed{-\dfrac{\sqrt{15}}{7}}$.

6) $\operatorname{tg}\beta$, $\cos 2\beta$ и $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, если $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\dfrac{2}{3}$ и $\operatorname{ctg}\alpha=5$ $(\alpha\in(0;2\pi))$.

а) $\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\dfrac{2}{3}$;

$\dfrac{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{2}{3}$.

Так как $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{5}$, то $\dfrac{1-\frac{1}{5}\operatorname{tg}\beta}{1+\frac{1}{5}\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{5-\operatorname{tg}\beta}{5+\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{2}{3}$;

$15-3\operatorname{tg}\beta=10+2\operatorname{tg}\beta$; $5\operatorname{tg}\beta=5$; $\operatorname{tg}\beta=1$;

б) $\cos 2\beta=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}$; $\cos 2\beta=\dfrac{1-1}{1+1}=0$; $\cos 2\beta=0$;

в) $\cos\alpha=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$;

Поскольку $\operatorname{ctg}\alpha=5$, $\alpha\in\mathrm{I}$ или $\alpha\in\mathrm{III}$. Рассмотрим оба варианта.

г) Пусть $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$; $\cos\alpha>0$, тогда

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{5}\right)^2}}=\frac{5}{26}\sqrt{26};$$

$$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4};\quad \sin\frac{\alpha}{2}>0;$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{5}{26}\sqrt{26}}{2}}=\sqrt{\frac{26-5\sqrt{26}}{52}}.$$ 5.8

д) Пусть $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$; $\cos\alpha<0$;

$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$ $\left(\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{3\pi}{4}\right)$. Тогда $\cos\alpha=-\dfrac{5}{26}\sqrt{26}$;

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{5}{26}\sqrt{26}}{2}}=\sqrt{\frac{26+5\sqrt{26}}{52}}.$$ 5.8

Ответ: если $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \dfrac{2}{3}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = 5$ $(\alpha \in (0; 2\pi))$

то $\operatorname{tg}\beta = 1$; $\cos 2\beta = 0$;

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{26-5\sqrt{26}}{52}} \text{ при } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{26+5\sqrt{26}}{52}} \text{ при } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

7) $\sqrt{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$, если $\sin x - \cos x = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}$ при $0 < x < \dfrac{2\pi}{3}$.

а) $\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \dfrac{1+4\sqrt{2}+8}{9}$;

так как $\sin x > \cos x$,

то $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$ и $0 < x < \dfrac{2\pi}{3}$,

значит $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{2\pi}{3}\right)$;

$1 - \sin 2x = 1 + \dfrac{4}{9}\sqrt{2}$; $\sin 2x = -\dfrac{4}{9}\sqrt{2}$;

$\sin 2x < 0$, тогда $2x \in (\pi; 2\pi)$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{2\pi}{3} \\ \pi < x < 2\pi \end{cases}; \quad \pi < 2x < \frac{4\pi}{3}; \quad \cos 2x < 0;$$

$$\cos 2x = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{9}\sqrt{2}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{32}{81}} = -\frac{7}{9}.$$

б) Так как $\pi < 2x < \dfrac{4\pi}{3}$, то $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{2\pi}{3}$, значит

$$\begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin x > 0 \end{cases};$$

5.7 $$\cos x = -\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{7}{9}\right)}{2}} = -\frac{1}{3}; \quad \sin x = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{1}.$$

Ответ: $\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 1$, если $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$.

Примечание. При $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$ условие $\sin x - \cos x = \frac{1+2\sqrt{2}}{3}$ не выполняется.

2. Упростите:

1) $$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\cdot\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\alpha-\pi) =$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]}\cdot\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right) - (-\sin\alpha)(-\sin\alpha) =$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\cdot\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)} - \sin^2\alpha =$$

$$= 1 - \sin^2\alpha = \boxed{\cos^2\alpha}.$$

2) $$\frac{\sin(2\alpha-3\pi)+2\cos\left(\frac{7\pi}{6}+2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\sqrt{3}\cos(2\alpha-3\pi)} =$$

$$= \frac{-\sin 2\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)-\sqrt{3}\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{-\sin 2\alpha - 2\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos 2\alpha + 2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin 2\alpha}{2\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos 2\alpha + 2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin 2\alpha - \sqrt{3}\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{-\sin 2\alpha - \sqrt{3}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\sqrt{3}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha - \sqrt{3}\cos 2\alpha} = \boxed{-\sqrt{3}\operatorname{ctg}2\alpha}.$$

3) $\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} =$

$$= \sin\alpha - \cos\alpha \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

4) $\cos^2\alpha + \cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha)$.

а) $\cos^2(60^\circ + \alpha) = (\cos 60^\circ \cdot \cos\alpha - \sin 60^\circ \cdot \sin\alpha)^2 =$

$$= \left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\cos^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha =$$

$$= \frac{1}{4}\cos^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha.$$

б) $\cos^2(60^\circ - \alpha) = (\cos 60^\circ \cdot \cos\alpha + \sin 60^\circ \cdot \sin\alpha)^2 =$

$$= \left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\cos^2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha =$$

$$= \frac{1}{4}\cos^2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha.$$

в) $\cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha) =$

$$= \frac{1}{4}\cos^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha +$$

$$+ \frac{1}{4}\cos^2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2\alpha + \frac{3}{2}\sin^2\alpha.$$

Значит, $\cos^2\alpha + \cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha) =$

$$= \cos^2\alpha + \frac{1}{2}\cos^2\alpha + \frac{3}{2}\sin^2\alpha = \frac{3}{2}\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = \boxed{1{,}5}.$$

Возможен другой способ:

$$\cos^2\alpha + \cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha) =$$

$$= \cos^2\alpha + \frac{1+\cos(120^\circ + 2\alpha)}{2} + \frac{1+\cos(120^\circ - 2\alpha)}{2} =$$

$$= \cos^2\alpha + 1 + \frac{1}{2}\Big(\cos(120^\circ + 2\alpha) + \cos(120^\circ - 2\alpha)\Big) =$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{а)} & \cos(120^\circ + 2\alpha) = \cos 120^\circ \cdot \cos 2\alpha - \sin 120^\circ \cdot \sin 2\alpha = \\ & = -\frac{1}{2}\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha; \\ \text{б)} & \cos(120^\circ - 2\alpha) = \cos 120^\circ \cdot \cos 2\alpha + \sin 120^\circ \cdot \sin 2\alpha = \\ & = -\frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha; \\ \text{в)} & -\frac{1}{2}\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha = -\cos 2\alpha. \end{array}\right]$$

$$= \cos^2\alpha + 1 - \frac{1}{2}\cos 2\alpha = 1 + \cos^2\alpha + \frac{1}{2}(1 - 2\cos^2\alpha) = \boxed{1{,}5}.$$

3. Решите уравнения:

1) $(2\sin\pi x - \sqrt{3})(\sqrt{2}\cos\pi x + 1) = 0.$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\pi x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\pi x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \pi x = (-1)^k\dfrac{\pi}{3} + \pi k \\ \pi x = \pm\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\pi n \end{array}\right.;$$

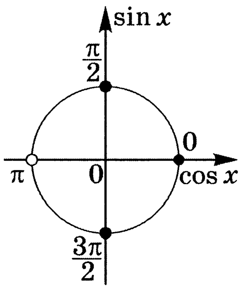
$$\left[\begin{array}{l} x = (-1)^k\dfrac{1}{3} + k \\ x = \pm\dfrac{3}{4} + 2n \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{(-1)^k\dfrac{1}{3} + k; \pm\dfrac{3}{4} + 2n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

2) $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos x} = 0.$

$$\left\{\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos x \neq -1 \end{array}\right.; \quad \left\{\begin{array}{l} 2x = \pi k \\ x \neq \pi + 2\pi n \end{array}\right.; \quad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2}k \\ x \neq \pi + 2\pi n \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x = 2\pi n \end{array}\right. .$$



Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k; 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

3) $\sin\dfrac{2\pi x}{3} + \sin^2\dfrac{\pi x}{6} = \cos^2\dfrac{\pi x}{6}$.

$$\sin\frac{2\pi x}{3} + \sin^2\frac{\pi x}{6} - \cos^2\frac{\pi x}{6} = 0;$$

$$2\sin\frac{\pi x}{3}\cdot\cos\frac{\pi x}{3} - \cos\frac{\pi x}{3} = 0;$$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ **5.1**

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ **5.2**

$$2\cos\frac{\pi x}{3}\left[\sin\frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2}\right] = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{\pi x}{3} = 0 \\ \sin\dfrac{\pi x}{3} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. ;$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi x}{3} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ \dfrac{\pi x}{3} = (-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \pi n \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x = 1{,}5 + 3k \\ x = (-1)^n\cdot\dfrac{1}{2} + 3n \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{1{,}5 + 3k; (-1)^n\cdot\dfrac{1}{2} + 3n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

4) $2\cos^2\dfrac{\pi x}{6} + 3\sin\dfrac{\pi x}{6} = 0; \quad 2 - 2\sin^2\dfrac{\pi x}{6} + 3\sin\dfrac{\pi x}{6} = 0;$

$$2\sin^2\frac{\pi x}{6} - 3\sin\frac{\pi x}{6} - 2 = 0;$$

$$\left(\sin\frac{\pi x}{6}\right)_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4} = \frac{3\pm 5}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{\pi x}{6} = 2 \notin [-1; 1] \\ \sin\dfrac{\pi x}{6} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. ; \quad \frac{\pi x}{6} = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k;$$

$$x = (-1)^k\cdot(-1) + 6k.$$

Ответ: $\left\{(-1)^{k+1} + 6k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5) $\sin^2 \dfrac{\pi x}{3} + 5\cos \dfrac{\pi x}{3} = 5.$

$1 - \cos^2 \dfrac{\pi x}{3} + 5\cos \dfrac{\pi x}{3} = 5;\quad \cos^2 \dfrac{\pi x}{3} - 5\cos \dfrac{\pi x}{3} + 4 = 0;$

$\left[\begin{array}{l} \cos \dfrac{\pi x}{3} = 4 \notin [-1; 1] \\ \cos \dfrac{\pi x}{3} = 1 \end{array}\right.;\quad \dfrac{\pi x}{3} = 2\pi k;\quad x = 6k \mid k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

6) $\sin 3x + \sin x = 0.$

Для решения этого уравнения необходимо знать формулу тройного угла для $\sin 3\alpha$. Выведем ее.

$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha =$

$= \sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) + \cos\alpha \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha =$

$= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha =$

$= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2(1 - \sin^2\alpha)\sin\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$

т. е. $\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$. **6.1**

Тогда уравнение примет вид $3\sin x - 4\sin^3 x + \sin x = 0;$

$4\sin x(1 - \sin^2 x) = 0;\quad 4\sin x \cdot \cos^2 x = 0;$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos^2 x = 0 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x = \pi k \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right.;\quad x = \dfrac{\pi}{2}n \mid n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2}n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Примечание. Несколько позже, зная новые формулы, переводящие суммы тригонометрических отношений в их произведение, получим более изящное решение.

Проверочная работа 2

1. Вычислите:

1) $2\cos 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ - 3\sin 45^\circ$;

2) $\dfrac{1-2\sin^2 60^\circ}{2\cos^2 60^\circ - 1}$;

3) $\dfrac{\cos 66^\circ \cdot \cos 6^\circ + \cos 84^\circ \cdot \cos 24^\circ}{\cos 65^\circ \cdot \cos 5^\circ + \cos 85^\circ \cdot \cos 25^\circ}$;

4) $\sin 75^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + \cos 75^\circ$;

5) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{15}$ при $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

6) $\operatorname{tg}\beta$, $\sin 2\alpha$ и $\cos\dfrac{\beta}{2}$, если $2\cos(\alpha-\beta) = 3\cos(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{ctg}\alpha = 2$;

7) $3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, если $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{5}$ при $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{4}$.

2. Упростите:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) - \cos(\pi-\alpha)\cdot\sin(3\pi+\alpha)}{[\cos(3{,}5\pi-\alpha)+\sin(1{,}5\pi+\alpha)]^2 - 1}$;

2) $\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{11\pi}{6}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$;

3) $\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$;

4) $\sin^2\alpha + \sin^2(60^\circ+\alpha) + \sin^2(60^\circ-\alpha)$.

3. Решите уравнения:

1) $\left(\sqrt{2}\sin\pi x - 1\right)\left(2\cos\pi x + \sqrt{3}\right) = 0$;

2) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} = 0$;

3) $\sin \pi x + \cos^2 \dfrac{\pi x}{4} = \sin^2 \dfrac{\pi x}{4}$;

4) $2\sin^2 \dfrac{\pi x}{6} + 3\cos \dfrac{\pi x}{6} = 0$;

5) $\cos^2 \dfrac{\pi x}{3} + 5\sin \dfrac{\pi x}{3} = 5$;

6) $\cos 3x - \cos x = 0$.

Решение проверочной работы 2

1. Вычислите:

1) $2\cos 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ - 3\sin 45^\circ =$

$$= 2\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

2) $\dfrac{1 - 2\sin^2 60^\circ}{2\cos^2 60^\circ - 1} = \dfrac{\cos 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \boxed{1}.$

3) $\dfrac{\cos 66^\circ \cdot \cos 6^\circ + \cos 84^\circ \cdot \cos 24^\circ}{\cos 65^\circ \cdot \cos 5^\circ + \cos 85^\circ \cdot \cos 25^\circ} =$

$$= \frac{\sin 24^\circ \cdot \cos 6^\circ + \sin 6^\circ \cdot \cos 24^\circ}{\sin 25^\circ \cdot \cos 5^\circ + \sin 5^\circ \cdot \cos 25^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \boxed{1}.$$

4) $\sin 75^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + \cos 75^\circ =$

$$= \sin 75^\circ \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} + \cos 75^\circ =$$

$$= \frac{\sin 75^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos 75^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}.$$

5) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{15}$ при $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

а) $\cos\alpha < 0;\quad \sin\dfrac{\alpha}{2} > 0;$

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}};\quad \cos\alpha = \frac{-\sqrt{15}}{\sqrt{1 + 15}} = -\frac{\sqrt{15}}{4};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}};\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{15}}{4}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 + \sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{4}};$$

б) $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{15}}$;

в) $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\quad \operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{15}}\right)}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2} =$

$= -\dfrac{2}{\sqrt{15}}\cdot\dfrac{1}{\frac{15-1}{15}} = -\dfrac{15}{7}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{15}} = \boxed{-\dfrac{\sqrt{15}}{7}}$.

6) $\operatorname{tg}\beta$, $\sin 2\alpha$ и $\cos\dfrac{\beta}{2}$, если $2\cos(\alpha-\beta) = 3\cos(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{ctg}\alpha = 2$.

а) $\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \dfrac{3}{2}$;

$\dfrac{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}} = \dfrac{3}{2}$; $\quad \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1} = \dfrac{3}{2}$;

тогда $\dfrac{2\operatorname{ctg}\beta+1}{2\operatorname{ctg}\beta-1} = \dfrac{3}{2}$; $\quad 4\operatorname{ctg}\beta+2 = 6\operatorname{ctg}\beta-3$;

$2\operatorname{ctg}\beta = 5$; $\quad \operatorname{ctg}\beta = 2{,}5$; $\quad \operatorname{tg}\beta = \boxed{0{,}4}$;

б) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\quad \sin 2\alpha = \dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \boxed{\dfrac{4}{5}}$;

Учтем, что $\operatorname{tg}\beta = 0{,}4$, значит $\beta\in\mathrm{I}$ или $\beta\in\mathrm{III}$.

в) при $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ $\quad \cos\beta>0$, $\quad \cos\dfrac{\beta}{2}>0$;

$\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}$;

$\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+(0{,}4)^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{29}} = \dfrac{5\sqrt{29}}{29}$;

$\cos\dfrac{\beta}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\beta}{2}}$;

$\cos\dfrac{\beta}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\frac{5\sqrt{29}}{29}}{2}} = \boxed{\sqrt{\dfrac{29+5\sqrt{29}}{58}}}$;

г) при $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$ $\cos\beta < 0$; $\cos\dfrac{\beta}{2} < 0$;

$$\cos\beta = -\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta}};\quad \cos\beta = -\frac{5\sqrt{29}}{29};$$

$$\cos\frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\frac{5\sqrt{29}}{29}}{2}} = \boxed{-\sqrt{\frac{29-5\sqrt{29}}{58}}}.$$

7) $3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, если $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{5}$ при $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{4}$.

$\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{4}$, тогда $\pi < 2x < \dfrac{3\pi}{2}$

$\left(\sin x > -\cos x \text{ на } \left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$.

$$\sin^2 x + 2\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x = \frac{1}{25};\quad \sin 2x = -\frac{24}{25};$$

$\cos 2x < 0$;

$$\cos 2x = -\sqrt{1-\left(-\frac{24}{25}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{576}{625}} = -\frac{7}{25};$$

$$\cos x = -\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}};\quad \cos x = -\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = -\frac{3}{5};$$

$$\sin x = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5};$$

$$3\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 3\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x} = 3\cdot\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \boxed{6}.$$

2. Упростите:

$$1)\ \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) - \cos(\pi-\alpha)\cdot\sin(3\pi+\alpha)}{[\cos(3{,}5\pi-\alpha)+\sin(1{,}5\pi+\alpha)]^2-1} =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}\alpha - (-\cos\alpha)\cdot(-\sin\alpha)}{(-\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1} =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha - 1} =$$

$$= \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{\cos\alpha\left(\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\right)}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha} = \boxed{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

2) $$\frac{\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{11\pi}{6} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} =$$

$$= \frac{\sin\alpha + 2\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6} - \alpha\right)}{2\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\alpha + 2\cos\frac{\pi}{3} \cdot \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha + 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha + 2\cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos\alpha - 2\sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{\sin\alpha} = \boxed{\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha}.$$

3) $$\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \cos\alpha - \sin\alpha\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos\alpha - (1 + \cos\alpha) = \boxed{-1}.$$

4) $\sin^2\alpha + \sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ - \alpha)$.

а) $$\sin^2(60^\circ + \alpha) = (\sin 60^\circ \cdot \cos\alpha + \cos 60^\circ \cdot \sin\alpha)^2 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{4}\cos^2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{1}{4}\sin^2\alpha =$$

$$= \frac{3}{4}\cos^2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha + \frac{1}{4}\sin^2\alpha.$$

$$\text{б)}\ \sin^2(60^\circ-\alpha)=(\sin 60^\circ\cdot\cos\alpha-\cos 60^\circ\cdot\sin\alpha)^2=$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2=$$
$$=\frac{3}{4}\cos^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha+\frac{1}{4}\sin^2\alpha.$$

$$\text{в)}\ \sin^2(60^\circ+\alpha)+\sin^2(60^\circ-\alpha)=$$
$$=\frac{3}{4}\cos^2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha+\frac{1}{4}\sin^2\alpha+$$
$$+\frac{3}{4}\cos^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha+\frac{1}{4}\sin^2\alpha=$$
$$=\frac{3}{2}\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\sin^2\alpha.$$

Поэтому $\sin^2\alpha+\sin^2(60^\circ+\alpha)+\sin^2(60^\circ-\alpha)=$

$$=\sin^2\alpha+\frac{3}{2}\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\sin^2\alpha=\frac{3}{2}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\boxed{1{,}5}.$$

Возможен другой способ:

$$\sin^2\alpha+\sin^2(60^\circ+\alpha)+\sin^2(60^\circ-\alpha)=$$
$$=\sin^2\alpha+\frac{1-\cos(120^\circ+2\alpha)}{2}+\frac{1-\cos(120^\circ-2\alpha)}{2}=$$
$$=\sin^2\alpha+1-\frac{1}{2}\left(\cos(120^\circ+2\alpha)+\cos(120^\circ-2\alpha)\right)=$$

$$\left[\begin{array}{l}
\text{а)}\ \cos(120^\circ+2\alpha)=\cos 120^\circ\cdot\cos 2\alpha-\sin 120^\circ\cdot\sin 2\alpha=\\
\qquad=-\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha;\\
\text{б)}\ \cos(120^\circ-2\alpha)=\cos 120^\circ\cdot\cos 2\alpha+\sin 120^\circ\cdot\sin 2\alpha=\\
\qquad=-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha;\\
\text{в)}\ \cos(120^\circ+2\alpha)+\cos(120^\circ-2\alpha)=\\
\qquad=-\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha=-\cos 2\alpha.
\end{array}\right]$$

$$=\sin^2\alpha+1-\frac{1}{2}\cdot(-\cos 2\alpha)=$$
$$=\sin^2\alpha+1-\frac{1}{2}(2\sin^2\alpha-1)=\boxed{1{,}5}.$$

3. Решите уравнения:

1) $\left(\sqrt{2}\sin\pi x - 1\right)\left(2\cos\pi x + \sqrt{3}\right) = 0.$

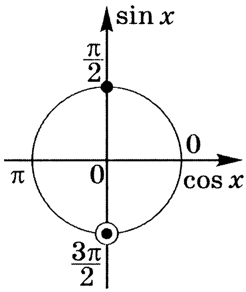
$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\pi x - 1 = 0\\ 2\cos\pi x + \sqrt{3} = 0\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}\sin\pi x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \cos\pi x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\pi x = (-1)^k\dfrac{\pi}{4} + \pi k\\ \pi x = \pm\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) + 2\pi n\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}x = (-1)^k \cdot \dfrac{1}{4} + k\\ x = \pm\dfrac{5}{6} + 2n\end{array}\right. \; | \, k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{(-1)^k \cdot \dfrac{1}{4} + k; \pm\dfrac{5}{6} + 2n \,|\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

2) $\dfrac{\cos x}{1 + \sin x} = 0.$

$$\left\{\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x \neq -1\end{array}\right.;$$



$$\left\{\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k\\ x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\end{array}\right.;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

3) $\sin\pi x + \cos^2\dfrac{\pi x}{4} = \sin^2\dfrac{\pi x}{4}.$

$$\sin\pi x + \cos^2\frac{\pi x}{4} - \sin^2\frac{\pi x}{4} = 0; \quad \sin\pi x + \cos\frac{\pi x}{2} = 0;$$

$$2\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2} + \cos\frac{\pi x}{2} = 0; \quad 2\cos\frac{\pi x}{2}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{\pi x}{2}=-\dfrac{1}{2}\\ \cos\dfrac{\pi x}{2}=0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi x}{2}=(-1)^k\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\pi k\\ \dfrac{\pi x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=(-1)^{k+1}\cdot\dfrac{1}{3}+2k\\ x=1+2n\end{array}\right. \mid k,n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{(-1)^{k+1}\cdot\dfrac{1}{3}+2k; 1+2n \mid k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

4) $2\sin^2\dfrac{\pi x}{6}+3\cos\dfrac{\pi x}{6}=0.$

$$2\left(1-\cos^2\frac{\pi x}{6}\right)+3\cos\frac{\pi x}{6}=0;\ 2\cos^2\frac{\pi x}{6}-3\cos\frac{\pi x}{6}-2=0;$$

$$\left(\cos\frac{\pi x}{6}\right)_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm5}{4};\quad \left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{\pi x}{6}=2\notin[-1;1]\\ \cos\dfrac{\pi x}{6}=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.;$$

$$\frac{\pi x}{6}=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2\pi k=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\quad x=\pm4+12k\mid k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\{\pm4+12k\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

5) $\cos^2\dfrac{\pi x}{3}+5\sin\dfrac{\pi x}{3}=5.$

$$1-\sin^2\frac{\pi x}{3}+5\sin\frac{\pi x}{3}=5;\quad \sin^2\frac{\pi x}{3}-5\sin\frac{\pi x}{3}+4=0;$$

$$\left(\sin\frac{\pi x}{3}\right)_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm3}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{\pi x}{3}=4\notin[-1;1]\\ \sin\dfrac{\pi x}{3}=1\end{array}\right.;\quad \frac{\pi x}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ x=1{,}5+6k\mid k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\{1{,}5+6k\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

6) $\cos 3x - \cos x = 0$.

Для решения этого уравнения необходимо вывести формулу косинуса тройного угла.

$\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha =$

$= \cos\alpha \cdot (2\cos^2\alpha - 1) - \sin\alpha \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha =$

$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha =$

$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha =$

$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$,

т. е. $\boxed{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$. **6.2**

Тогда уравнение примет вид:

$4\cos^3 x - 3\cos x - \cos x = 0$;

$4\cos x(\cos^2 x - 1) = 0$;

$-4\cos x \cdot \sin^2 x = 0$;

$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \sin x = 0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \pi n\end{array}\right.$, т. е. $x = \dfrac{\pi}{2}t \mid t \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2}t \mid t \in \mathbb{Z}\right\}$.

5

Суммы и произведения тригонометрических функций

Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и наоборот

Напомним известные формулы:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \quad \textbf{7.1}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \quad \textbf{7.2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \quad \textbf{7.3}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}; \quad \textbf{7.4}$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} \text{ при } \begin{cases}\cos\alpha\neq 0\\ \cos\beta\neq 0\end{cases}; \quad \textbf{7.5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} \text{ при } \begin{cases}\cos\alpha\neq 0\\ \cos\beta\neq 0\end{cases}; \quad \textbf{7.6}$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]; \quad \textbf{7.7}$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]; \tag{7.8}$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]; \tag{7.9}$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right); \tag{7.10}$$

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right); \tag{7.11}$$

$$A\sin\alpha+B\cos\alpha=$$

$$=\begin{cases}\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sin\left(\alpha+\operatorname{arctg}\dfrac{A}{B}\right), \text{ если } B>0;\\ -\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sin\left(\alpha+\operatorname{arctg}\dfrac{A}{B}\right), \text{ если } B<0;\\ \sqrt{A^2+B^2}\cdot\cos\left(\alpha-\operatorname{arctg}\dfrac{B}{A}\right), \text{ если } A>0;\\ -\sqrt{A^2+B^2}\cdot\cos\left(\alpha-\operatorname{arctg}\dfrac{B}{A}\right), \text{ если } A<0.\end{cases} \tag{7.12}$$

Практикум 9

1. Разложите на множители:

1) $\sin\dfrac{5\alpha}{3}+\sin\dfrac{3\alpha}{2}$;

2) $\cos 10\alpha\cdot\cos 8\alpha+\cos 8\alpha\cdot\cos 6\alpha$;

3) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$.

2. Докажите тождества:

1) $\dfrac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$;

2) $\dfrac{\sin^2 3\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2 3\alpha-\cos 5\alpha\cdot\cos\alpha}=2\cos 2\alpha$.

3. Вычислите:

1) $\sin^2 68^\circ-\sin^2 38^\circ-0{,}5\sin 106^\circ+3$;

2) $\dfrac{3(\cos 20^\circ-\sin 20^\circ)}{\sqrt{2}\sin 25^\circ}$;

3) $(\operatorname{tg} 14^\circ+\operatorname{ctg} 28^\circ)\cdot\cos 14^\circ\cdot\sin 14^\circ$;

4) $\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{5}\cdot\cos^2\frac{\pi}{5}}{1-\cos^4\frac{2\pi}{5}-\cos^2\frac{2\pi}{5}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{5}}$;

5) $\dfrac{5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14}\right)-\sin\frac{\pi}{14}\right]}{\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{14}}$;

6) $\dfrac{\sin^2 32^\circ+\sin 26^\circ}{5\cos^2 32^\circ}$;

7) $\dfrac{\cos 9^\circ+\cos 51^\circ+\sqrt{3}\cos 21^\circ}{2\sqrt{3}\cos 21^\circ}$;

8) $\dfrac{2\cos^2 16^\circ+2\cos^2 76^\circ-3}{\cos^2 44^\circ}$;

9) $\dfrac{3\cos 196^\circ + 12\cos 164^\circ}{\cos 16^\circ}$;

10) $\dfrac{\sin 43^\circ + \sin 17^\circ}{2\cos 13^\circ + 3\sin 77^\circ}$;

11) $\dfrac{\cos 6^\circ + \cos 12^\circ + \cos 36^\circ + \cos 42^\circ}{\sin 87^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 24^\circ}$;

12) $\dfrac{3\cos 23^\circ - 3\sin 113^\circ + \cos 203^\circ}{\cos 10^\circ \cdot \cos 13^\circ - \cos 80^\circ \cdot \cos 77^\circ}$;

13) $\dfrac{2 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1 + 5\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$;

14) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, если $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

15) $\operatorname{tg} x$, если $\sin(x + 30^\circ) + \sin(x - 30^\circ) = 2\sqrt{3}\cos x$;

16) $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{1}{4}$;

17) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2$;

18) $\sin(\pi + 2\alpha)$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

19) $2\sin 3\alpha \cdot \sin 2\alpha + \cos 5\alpha$, если $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}6}$;

20) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}6$;

21) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{3}$;

22) $\cos\alpha + \cos\beta$, если $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{2}$, а $\alpha + \beta = 4\pi$;

23) $\cos(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{2}$, а $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{2}$;

24) $\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}$ при $\sin x = 0{,}21$;

25) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Решите уравнения:

1) $\sin 2x+\sin 4x=0$;

2) $\cos 3x-\cos 5x=0$;

3) $\sin 3x\cdot\sin 5x=\cos 4x\cdot\cos 2x$;

4) $\sin 2x\cdot\cos 6x=\sin 3x\cdot\cos 5x$;

5) $\sin 3x+\cos 3x=1$;

6) $\cos 4x-\sin 4x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение практикума 9

1. Разложите на множители:

1) $\sin\frac{5\alpha}{3}+\sin\frac{3\alpha}{2}=$

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\ \textbf{7.3}$$

$$=2\sin\left(\frac{\frac{5\alpha}{3}+\frac{3\alpha}{2}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\frac{5\alpha}{3}-\frac{3\alpha}{2}}{2}\right)=\boxed{2\sin\frac{19\alpha}{12}\cdot\cos\frac{\alpha}{12}}.$$

2) $\cos 10\alpha\cdot\cos 8\alpha+\cos 8\alpha\cdot\cos 6\alpha=$

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\ \textbf{7.1}$$

$$=2\cos 8\alpha\cdot\cos\left(\frac{10\alpha+6\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{10\alpha-6\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\cos 8\alpha\cdot\cos 8\alpha\cdot\cos 2\alpha=\boxed{2\cos^2 8\alpha\cdot\cos 2\alpha}.$$

3) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=$

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\ \textbf{7.3}$$

$$=2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha+\sin 2\alpha=\sin 2\alpha(2\cos\alpha+1)=$$

$$=\sin 2\alpha\cdot 2\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=2\sin 2\alpha\cdot\left(\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\ \textbf{7.1}$$

$$=4\sin 2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\frac{\pi}{3}}{2}\right)=$$

$$=\boxed{4\sin 2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}.$$

2. Докажите тождества:

1) $\dfrac{\cos 3\alpha + \cos\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$

$$\text{L} = \frac{\cos 3\alpha + \cos\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha} =$$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ **7.1**

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ **7.4**

$$= \frac{2\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

$\left.\begin{array}{l}\text{L} = \operatorname{ctg}\alpha\\ \Pi = \operatorname{ctg}\alpha\end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi,$ что и требовалось доказать.

2) $\dfrac{\sin^2 3\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha\cdot\cos\alpha} = 2\cos 2\alpha.$

$$\text{L} = \frac{\sin^2 3\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha\cdot\cos\alpha} =$$

$$= \frac{(\sin 3\alpha - \sin\alpha)(\sin 3\alpha + \sin\alpha)}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha\cdot\cos\alpha} =$$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$ **7.7**

$$= \frac{(\sin 3\alpha - \sin\alpha)(\sin 3\alpha + \sin\alpha)}{\cos^2 3\alpha - \frac{1}{2}(\cos 6\alpha + \cos 4\alpha)} =$$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ **7.3**

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ **7.4**

$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha);\quad 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$ **5.2**

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ **5.1**

$$= \frac{2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(1 + \cos 6\alpha) - \frac{1}{2}\cos 6\alpha - \frac{1}{2}\cos 4\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\sin 2\alpha}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6\alpha - \frac{1}{2}\cos 6\alpha - \frac{1}{2}\cos 4\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\alpha} = \frac{2\sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(1 - \cos 4\alpha)} =$$

$$= \frac{2\sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = 2\cos 2\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L} = 2\cos 2\alpha \\ \Pi = 2\cos 2\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi,$$ что и требовалось доказать.

3. Вычислите:

1) $\sin^2 68^\circ - \sin^2 38^\circ - 0{,}5\sin 106^\circ + 3 =$

$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ **5.2**

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 136^\circ) - \frac{1}{2}(1 - \cos 76^\circ) - 0{,}5\sin 106^\circ + 3 =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}5\cos 136^\circ - 0{,}5 + 0{,}5\cos 76^\circ - 0{,}5\sin 106^\circ + 3 =$$

$$= 0{,}5(\cos 76^\circ - \cos 136^\circ) - 0{,}5\sin 106^\circ + 3 =$$

$$= 0{,}5 \cdot (-2) \cdot \sin 106^\circ \cdot \sin(-30^\circ) - 0{,}5^\circ \sin 106^\circ + 3 =$$

$$= 0{,}5\sin 106^\circ - 0{,}5\sin 106^\circ + 3 = \boxed{3}.$$

2) $\dfrac{3(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ)}{\sqrt{2}\sin 25^\circ} =$ $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ **3.6**

$$= \frac{3\left[\cos(90^\circ - 70^\circ) - \sin 20^\circ\right]}{\sqrt{2}\sin 25^\circ} = \frac{3(\sin 70^\circ - \sin 20^\circ)}{\sqrt{2}\sin 25^\circ} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2\sin 25^\circ \cdot \cos 45^\circ}{\sqrt{2}\sin 25^\circ} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{3}.$$

3) $(\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{ctg} 28^\circ) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ =$

$$= \left(\frac{\sin 14^\circ}{\cos 14^\circ} + \frac{\cos 28^\circ}{\sin 28^\circ}\right) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ =$$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ **5.1**

$$= \frac{(\sin 14^\circ \cdot \sin 28^\circ + \cos 14^\circ \cdot \cos 28^\circ) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ}{\cos 14^\circ \cdot 2\sin 14^\circ \cdot \cos 14^\circ} =$$

$$= \frac{\cos(28^\circ - 14^\circ)}{2\cos 14^\circ} = \frac{\cos 14^\circ}{2\cos 14^\circ} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

4) $$\frac{\sin^2\frac{\pi}{5}\cdot\cos^2\frac{\pi}{5}}{1-\cos^4\frac{2\pi}{5}-\cos^2\frac{2\pi}{5}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{5}}=$$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$

$\sin^2 2\alpha = 4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha;\quad \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$

5.1

$$=\frac{\frac{1}{4}\sin^2\frac{2\pi}{5}}{1-\left(\frac{1+\cos\frac{4\pi}{5}}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\sin^2\frac{4\pi}{5}}=$$

$$=\frac{\sin^2\frac{2\pi}{5}}{4-1-2\cos\frac{4\pi}{5}-\cos^2\frac{4\pi}{5}-\sin^2\frac{4\pi}{5}}=$$

$$=\frac{\sin^2\frac{2\pi}{5}}{2-2\cos\frac{4\pi}{5}}=\frac{\sin^2\frac{2\pi}{5}}{2\cdot2\cdot\sin^2\frac{2\pi}{5}}=\boxed{\frac{1}{4}}.$$

5) $$\frac{5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14}\right)-\sin\frac{\pi}{14}\right]}{\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{14}}=$$

$$=\frac{5\left(\sin\frac{3\pi}{14}-\sin\frac{\pi}{14}\right)}{\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{14}}=\frac{5\cdot2\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{14}}=\boxed{10}.$$

6) $$\frac{\sin^2 32^\circ+\sin 26^\circ}{5\cos^2 32^\circ}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(1-\cos 64^\circ)+\sin(90^\circ-64^\circ)}{5\cos^2 32^\circ}=$$

$$=\frac{0{,}5-0{,}5\cos 64^\circ+\cos 64^\circ}{5\cos^2 32^\circ}=$$

$$=\frac{0{,}5+0{,}5\cos 64^\circ}{5\cos^2 32^\circ}=\frac{\cos^2 32^\circ}{5\cos^2 32^\circ}=\boxed{\frac{1}{5}}.$$

7) $$\frac{\cos 9^\circ + \cos 51^\circ + \sqrt{3}\cos 21^\circ}{2\sqrt{3}\cos 21^\circ} =$$

$$= \frac{2\cos 30^\circ \cdot \cos 21^\circ + \sqrt{3}\cos 21^\circ}{2\sqrt{3}\cos 21^\circ} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cos 21^\circ + \sqrt{3}\cos 21^\circ}{2\sqrt{3}\cos 21^\circ} = \boxed{1}.$$

8) $$\frac{2\cos^2 16^\circ + 2\cos^2 76^\circ - 3}{\cos^2 44^\circ} =$$

$$= \frac{1+\cos 32^\circ + 1 + \cos 152^\circ - 3}{\cos^2 44^\circ} = \frac{-1 + 2\cos 92^\circ \cdot \cos 60^\circ}{\cos^2 44^\circ} =$$

$$= \frac{-1 + \cos 92^\circ}{\cos^2 44^\circ} = \frac{-(1 - \cos 92^\circ)}{\cos^2 44^\circ} = \frac{-2\sin^2 46^\circ}{\cos^2 44^\circ} =$$

$$= -\frac{2\sin^2(90^\circ - 44^\circ)}{\cos^2 44^\circ} = -\frac{2\cos^2 44^\circ}{\cos^2 44^\circ} = \boxed{-2}.$$

9) $$\frac{3\cos 196^\circ + 12\cos 164^\circ}{\cos 16^\circ} =$$

$$= \frac{3\cos(180^\circ + 16^\circ) + 12\cos(180 - 16^\circ)}{\cos 16^\circ} =$$

$$= \frac{-3\cos 16^\circ - 12\cos 16^\circ}{\cos 16^\circ} = \boxed{-15}.$$

10) $$\frac{\sin 43^\circ + \sin 17^\circ}{2\cos 13^\circ + 3\sin 77^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin 30^\circ \cdot \cos 13^\circ}{2\cos 13^\circ + 3\sin(90^\circ - 13^\circ)} = \frac{\cos 13^\circ}{2\cos 13^\circ + 3\cos 13^\circ} = \boxed{\frac{1}{5}}.$$

11) $$\frac{\cos 6^\circ + \cos 12^\circ + \cos 36^\circ + \cos 42^\circ}{\sin 87^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 24^\circ} =$$

$$= \frac{2\cos 24^\circ \cdot \cos 12^\circ + 2\cos 24^\circ \cdot \cos 18^\circ}{\sin 87^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 24^\circ} =$$

$$= \frac{2\cos 24^\circ(\cos 12^\circ + \cos 18^\circ)}{\sin(90^\circ - 3^\circ) \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 24^\circ} = \frac{2 \cdot 2\cos 15^\circ \cdot \cos 3^\circ}{\cos 15^\circ \cdot \cos 3^\circ} = \boxed{4}.$$

12) $\dfrac{3\cos 23^\circ - 3\sin 113^\circ + \cos 203^\circ}{\cos 10^\circ \cdot \cos 13^\circ - \cos 80^\circ \cdot \cos 77^\circ} =$

$$= \frac{3\cos 23^\circ - 3\sin(90^\circ + 23^\circ) + \cos(180^\circ + 23^\circ)}{0{,}5(\cos 23^\circ + \cos 3^\circ) - 0{,}5(\cos 157^\circ + \cos 3^\circ)} =$$

$$= \frac{3\cos 23^\circ - 3\cos 23^\circ - \cos 23^\circ}{0{,}5\cos 23^\circ + 0{,}5\cos 3^\circ - 0{,}5\cos(180^\circ - 23^\circ) - 0{,}5\cos 3^\circ} =$$

$$= -\frac{\cos 23^\circ}{0{,}5\cos 23^\circ + 0{,}5\cos 23^\circ} = \boxed{-1}.$$

13) $\dfrac{2 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1 + 5\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

$$\frac{2 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1 + 5\cos^2\alpha} = \frac{(2 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha) : \cos^2\alpha}{(1 + 5\cos^2\alpha) : \cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{2}{\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha} + 5} = \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) + \operatorname{tg}\alpha}{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) + 5} = \frac{2(1+4)+2}{1+4+5} = \boxed{1{,}2}.$$

14) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, если $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{2} \cdot \cos\frac{\left(x + \frac{\pi}{3} + x - \frac{\pi}{3}\right)}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

15) $\operatorname{tg} x$, если $\sin(x + 30^\circ) + \sin(x - 30^\circ) = 2\sqrt{3}\cos x$.

$\sin(x + 30^\circ) + \sin(x - 30^\circ) = 2\sqrt{3}\cos x;$

$$2\sin\frac{x + 30^\circ + x - 30^\circ}{2} \cdot \cos\frac{x + 30^\circ - x + 30^\circ}{2} = 2\sqrt{3}\cos x;$$

$2\sin x\cos 30^\circ = 2\sqrt{3}\cos x; \qquad \sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{3}\cos x;$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x = \boxed{2}.$$

16) $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{1}{4}$.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot\frac{1}{16} = \boxed{\frac{7}{8}}.$$

17) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot 2}{1-4} = \boxed{-\frac{4}{3}}.$$

18) $\sin(\pi + 2\alpha)$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2};$$

$$1 + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2};\quad 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{1}{2};$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{1}{2};\quad \sin(\pi+2\alpha) = -\sin 2\alpha = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

19) $2\sin 3\alpha\cdot\sin 2\alpha + \cos 5\alpha$, если $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}6}$.

$$2\sin 3\alpha\cdot\sin 2\alpha + \cos 5\alpha = \cos\alpha - \cos 5\alpha + \cos 5\alpha =$$ 7.8

$$= \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 2\cdot 0{,}6 - 1 = \boxed{0{,}2}.$$

20) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}6$.

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right] =$$ 5.8

$$= \frac{1}{2}(1+\sin\alpha) = \frac{1+0{,}6}{2} = \boxed{0{,}8}.$$

21) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{3}$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos 2\alpha + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin 2\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(2\sqrt{3}\right)^2}{1+\left(2\sqrt{3}\right)^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\cdot\left(2\sqrt{3}\right)}{1+\left(2\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{1-4\cdot 3+4\cdot 3}{2(1+12)} = \boxed{\frac{1}{26}}.$$

22) $\cos\alpha + \cos\beta$, если $\alpha-\beta = \dfrac{\pi}{2}$, а $\alpha+\beta = 4\pi$.

Если $\alpha+\beta = 4\pi$ и $\alpha-\beta = \dfrac{\pi}{2}$, то

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{4\pi}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2} = 2\cos 2\pi\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \boxed{\sqrt{2}}.$$

23) $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}$, а $\alpha-\beta = \dfrac{\pi}{2}$.

Если $\alpha-\beta = \dfrac{\pi}{2}$, то

$$\boxed{\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]}$$ 7.8

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$1 = 0-\cos(\alpha+\beta);\qquad \cos(\alpha+\beta) = \boxed{-1}.$$

24) $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$ при $\sin x=0{,}21$.

$$\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2=1+\sin x;\quad \sin x=0{,}21;$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0{,}21;\quad 1+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0{,}21+1;$$

$$\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=1{,}21;$$

$$\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2=1{,}21;\ \cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{1{,}21}=\boxed{\pm1{,}1}.$$

25) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2};$$

$$1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2};\quad 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{1}{2};$$

$$\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\frac{1}{16};$$

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=$$
$$=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=$$
$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1-2\cdot\frac{1}{16}=\boxed{\frac{7}{8}}.$$

4. Решите уравнения:

1) $\sin 2x+\sin 4x=0$.

$$2\sin\frac{2x+4x}{2}\cdot\cos\frac{4x-2x}{2}=0;\quad \sin 3x\cdot\cos x=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x=0\\ \cos x=0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}k\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right.\ |\,k,n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{3}k;\,\frac{\pi}{2}+\pi n\,|\,k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

2) $\cos 3x - \cos 5x = 0$.

$2\sin\dfrac{3x+5x}{2}\cdot\sin\dfrac{5x-3x}{2} = 0$; $\left[\begin{array}{l}\sin 4x = 0\\ \sin x = 0\end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4}k\\ x = \pi n\end{array}\right.$, значит, $x = \dfrac{\pi}{4}k$ как более общий случай.

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3) $\sin 3x \cdot \sin 5x = \cos 4x \cdot \cos 2x$.

$\dfrac{1}{2}\left[\cos(5x-3x) - \cos(5x+3x)\right] =$

$= \dfrac{1}{2}\left[\cos(4x+2x) + \cos(4x-2x)\right]$;

$\cos 2x - \cos 8x = \cos 6x + \cos 2x$; $\cos 6x + \cos 8x = 0$;

$2\cos\dfrac{6x+8x}{2}\cdot\cos\dfrac{8x-6x}{2} = 0$; $\cos 7x \cdot \cos x = 0$;

$\left[\begin{array}{l}\cos 7x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}7x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k\\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi}{7}k\\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n\end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi}{7}k; \dfrac{\pi}{2} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

4) $\sin 2x \cdot \cos 6x = \sin 3x \cdot \cos 5x$.

$\dfrac{1}{2}\left[\sin(2x+6x) + \sin(2x-6x)\right] = \dfrac{1}{2}\left[\sin(3x+5x) + \sin(3x-5x)\right]$;

$\sin 8x - \sin 4x = \sin 8x - \sin 2x$;

$\sin 4x - \sin 2x = 0$; $2\sin\dfrac{4x-2x}{2}\cdot\cos\dfrac{4x+2x}{2} = 0$;

$\sin x \cdot \cos 3x = 0$; $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos 3x = 0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x = \pi k\\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}n\end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{\pi k; \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

5) $\sin 3x + \cos 3x = 1.$ **7.10**

$$\sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1; \quad \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$3x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad 3x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k;$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k.$$

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{12} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

6) $\cos 4x - \sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$ **7.11**

$$\sqrt{2}\cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}; \quad 4x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k;$$

$$4x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad x = -\frac{\pi}{16} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k.$$

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{16} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Тренировочная работа 16

1. Разложите на множители:

1) $1+\sin\dfrac{2\alpha}{3}$;

2) $\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha - \cos 4\alpha$;

3) $1+\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$.

2. Докажите тождества:

1) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$;

2) $\dfrac{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - 1} = \operatorname{ctg}^2\alpha$.

3. Вычислите:

1) $\sin 43^\circ\cdot\sin 17^\circ + \sin^2 13^\circ - 2$;

2) $\dfrac{(1+\operatorname{tg}10^\circ)\cdot\cos 10^\circ}{\sqrt{2}\sin 55^\circ}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}15^\circ - \operatorname{ctg}15^\circ}{\operatorname{ctg}30^\circ}$;

4) $\sin\dfrac{2\pi}{7}\cdot\dfrac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}\right)\cdot\cos^2\frac{\pi}{14}}{1+\cos\frac{\pi}{7}}$;

5) $\dfrac{3\left[\cos\frac{\pi}{5} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right)\right]}{2\cos\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}}$;

6) $\operatorname{tg}7^\circ\cdot\left(\dfrac{1}{\sin 14^\circ} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}14^\circ}\right)$;

7) $\dfrac{\cos 48^\circ + \cos 42^\circ + \sqrt{2}\cos 3^\circ}{\sqrt{2}\sin 87^\circ}$;

8) $\cos^2 23^\circ + \cos^2 83^\circ + \cos^2 37^\circ + 3$;

9) $\dfrac{2\cos 201^\circ - 16\sin 111^\circ}{\cos 21^\circ}$;

10) $\dfrac{3\cos 9^\circ + \sin 81^\circ}{\sin 21^\circ + \sin 39^\circ}$;

11) $\dfrac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \sin 44^\circ + \sin 48^\circ}{2\sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ}$;

12) $\dfrac{5\cos 63^\circ + 2\sin 27^\circ - 4\sin 207^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \sin 78^\circ + \sin 75^\circ \cdot \sin 12^\circ}$;

13) $\dfrac{3 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{6\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$;

14) $2\cos 3\alpha \cdot \cos 4\alpha - \cos 7\alpha$, если $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}8}$;

15) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}4$;

16) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

17) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}8$.

4. Решите уравнения:

1) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$;

2) $\cos 2x + \cos 8x = \cos 4x + \cos 6x$;

3) $\sin x + \cos x = \sin 3x + \cos 3x$;

4) $\cos 4x \cdot \cos 2x = \sin 6x \cdot \sin 8x$;

5) $\cos 3x \cdot \sin 5x = \cos 5x \cdot \sin 7x$;

6) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0$.

Решение тренировочной работы 16

1. Разложите на множители:

1) $1+\sin\dfrac{2\alpha}{3}=$

$$=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{2\alpha}{3}=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{3}\right)=$$
$$=2\sin\left(\frac{3\pi+4\alpha}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi-4\alpha}{12}\right).$$

2) $\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha-\cos 4\alpha=$

$$=2\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha-2\sin\left(\frac{2\alpha+4\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\alpha-4\alpha}{2}\right)=$$
$$=2\sin 3\alpha\cdot\sin\alpha+2\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha=$$
$$=2\sin 3\alpha\cdot(\sin\alpha+\sin 2\alpha)=4\sin 3\alpha\cdot\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

3) $1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=$

$$=2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)=$$
$$=2\cos\alpha\cdot\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sqrt{2}\cos\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

2. Докажите тождества:

1) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha.$

$$\mathrm{L}=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha;$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=\operatorname{tg}^2\alpha\\ \Pi=\operatorname{tg}^2\alpha\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi,\ \text{что и требовалось доказать.}$$

2) $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\operatorname{ctg}^2\alpha.$

$$\mathrm{L}=\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\frac{\cos^2\alpha-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1}{\sin^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-1}=$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha - \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha - \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha;$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L} = \operatorname{ctg}^2\alpha \\ \Pi = \operatorname{ctg}^2\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi,$$ что и требовалось доказать.

3. Вычислите:

1) $\sin 43^\circ \cdot \sin 17^\circ + \sin^2 13^\circ - 2 =$

$$= \frac{1}{2}(\cos 26^\circ - \cos 60^\circ) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 26^\circ - 2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 26^\circ - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 26^\circ - 2 = \boxed{-1{,}75}.$$

2) $\dfrac{(1 + \operatorname{tg} 10^\circ)\cdot\cos 10^\circ}{\sqrt{2}\sin 55^\circ} =$

$$= \frac{\cos 10^\circ + \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\cdot\cos 10^\circ}{\sqrt{2}\sin 55^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ}{\sqrt{2}\sin 55^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 10^\circ + \sin(90^\circ - 80^\circ)}{\sqrt{2}\sin 55^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \cos 80^\circ}{\sqrt{2}\sin 55^\circ} =$$

$$= \frac{2\cos 45^\circ\cdot\cos 35^\circ}{\sqrt{2}\sin 55^\circ} = \frac{\sqrt{2}\cos(90^\circ - 55^\circ)}{\sqrt{2}\sin 55^\circ} = \frac{\sin 55^\circ}{\sin 55^\circ} = \boxed{1}.$$

3) $\dfrac{\operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ}{\operatorname{ctg} 30^\circ} =$

$$= \frac{1}{\operatorname{ctg} 30^\circ}\left(\operatorname{tg} 15^\circ - \frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ}\right) =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ctg} 30^\circ}\cdot\frac{\operatorname{tg}^2 15^\circ - 1}{\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{1}{\operatorname{ctg} 30^\circ}\cdot(-2\operatorname{ctg} 30^\circ) = \boxed{-2}.$$

4) $$\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}\right)\cdot\cos^2\frac{\pi}{14}}{1+\cos\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\frac{\left(\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}}+\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\right)\cdot\cos^2\frac{\pi}{14}}{1+\cos\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\frac{\left(\frac{\sin^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{7}}\right)\cdot\cos^2\frac{\pi}{14}}{1+\cos\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\frac{1}{0{,}5\sin\frac{2\pi}{7}}\cdot\cos^2\frac{\pi}{14}}{2\cos^2\frac{\pi}{14}}=\frac{2\cos^2\frac{\pi}{14}}{2\cos^2\frac{\pi}{14}}=\boxed{1}.$$

5) $$\frac{3\left[\cos\frac{\pi}{5}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)\right]}{2\cos\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}}=$$

$$=\frac{3\left(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)}{2\cos\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{3\cdot2\cos\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}}{2\cos\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}}=\boxed{3}.$$

6) $$\operatorname{tg}7^\circ\cdot\left(\frac{1}{\sin14^\circ}+\frac{1}{\operatorname{tg}14^\circ}\right)=$$

$$=\operatorname{tg}7^\circ\cdot\left(\frac{1}{\sin14^\circ}+\frac{\cos14^\circ}{\sin14^\circ}\right)=$$

$$=\operatorname{tg}7^\circ\cdot\left(\frac{1+\cos14^\circ}{\sin14^\circ}\right)=\operatorname{tg}7^\circ\cdot\operatorname{ctg}7^\circ=\boxed{1}.$$

7) $$\frac{\cos48^\circ+\cos42^\circ+\sqrt{2}\cos3^\circ}{\sqrt{2}\sin87^\circ}=$$

$$=\frac{2\cos45^\circ\cdot\cos3^\circ+\sqrt{2}\cos3^\circ}{\sqrt{2}\sin(90^\circ-3^\circ)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cos3^\circ+\sqrt{2}\cos3^\circ}{\sqrt{2}\cos3^\circ}=\boxed{2}.$$

8) $\cos^2 23^\circ + \cos^2 83^\circ + \cos^2 37^\circ + 3 =$

$$= 0{,}5(1 + \cos 46^\circ) + 0{,}5(1 + \cos 166^\circ) +$$
$$+ 0{,}5(1 + \cos 74^\circ) + 3 =$$
$$= 0{,}5 + 0{,}5\cos 46^\circ + 0{,}5 + 0{,}5\cos(180^\circ - 14^\circ) +$$
$$+ 0{,}5 + 0{,}5\cos 74^\circ + 3 =$$
$$= 4{,}5 + 0{,}5\cos 46^\circ - 0{,}5\cos 14^\circ + 0{,}5\cos 74^\circ =$$
$$= 4{,}5 - \sin 30^\circ \cdot \sin 16^\circ + 0{,}5\cos(90^\circ - 16^\circ) =$$
$$= 4{,}5 - 0{,}5\sin 16^\circ + 0{,}5\sin 16^\circ = \boxed{4{,}5}.$$

9) $\dfrac{2\cos 201^\circ - 16\sin 111^\circ}{\cos 21^\circ} =$

$$= \frac{2\cos(180^\circ + 21^\circ) - 16\sin(90^\circ + 21^\circ)}{\cos 21^\circ} =$$
$$= \frac{-2\cos 21^\circ - 16\cos 21^\circ}{\cos 21^\circ} = \boxed{-18}.$$

10) $\dfrac{3\cos 9^\circ + \sin 81^\circ}{\sin 21^\circ + \sin 39^\circ} =$

$$= \frac{3\cos 9^\circ + \sin(90^\circ - 9^\circ)}{2\sin 30^\circ \cdot \cos 9^\circ} = \frac{3\cos 9^\circ + \cos 9^\circ}{2\sin 30^\circ \cdot \cos 9^\circ} = \boxed{4}.$$

11) $\dfrac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \sin 44^\circ + \sin 48^\circ}{2\sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ} =$

$$= \frac{2\sin\frac{36^\circ+44^\circ}{2} \cdot \cos\frac{36^\circ-44^\circ}{2} + 2\sin\frac{40^\circ+48^\circ}{2} \cdot \cos\frac{40^\circ-48^\circ}{2}}{2\sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ} =$$
$$= \frac{2\sin 40^\circ \cdot \cos 4^\circ + 2\sin 44^\circ \cdot \cos 4^\circ}{2\sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ} =$$
$$= \frac{2\cos 4^\circ(\sin 40^\circ + \sin 44^\circ)}{2\sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ} =$$
$$= \frac{2\sin 42^\circ \cdot \cos 2^\circ}{\sin(90^\circ - 2^\circ) \cdot \sin 42^\circ} = \frac{2\cos 2^\circ}{\cos 2^\circ} = \boxed{2}.$$

12) $\dfrac{5\cos 63^\circ + 2\sin 27^\circ - 4\sin 207^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \sin 78^\circ + \sin 75^\circ \cdot \sin 12^\circ} =$

$$= \frac{5\cos 63^\circ + 2\sin(90^\circ - 63^\circ) - 4\sin(270^\circ - 63^\circ)}{0{,}5(\cos 63^\circ - \cos 93^\circ) + 0{,}5(\cos 63^\circ - \cos 87^\circ)} =$$

$$= \frac{5\cos 63^\circ + 2\cos 63^\circ + 4\cos 63^\circ}{0{,}5\cos 63^\circ - 0{,}5\cos(90^\circ + 3^\circ) + 0{,}5\cos 63^\circ - 0{,}5\cos(90^\circ - 3^\circ)} =$$

$$= \frac{11\cos 63^\circ}{\cos 63^\circ + 0{,}5\sin 3^\circ - 0{,}5\sin 3^\circ} = \frac{11\cos 63^\circ}{\cos 63^\circ} = \boxed{11}.$$

13) $\dfrac{3 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{6\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

$$\frac{3 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{6\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{(3 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha) : \cos^2\alpha}{(6\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) : \cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{3}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha}{6 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{3(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) - \operatorname{tg}\alpha}{6 - \operatorname{tg}^2\alpha} =$$

$$= \frac{3(1+4) + 2}{6 - 4} = \boxed{8{,}5}.$$

14) $2\cos 3\alpha \cdot \cos 4\alpha - \cos 7\alpha$, если $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}8}$.

$$2\cos 3\alpha \cdot \cos 4\alpha - \cos 7\alpha = \cos 7\alpha + \cos\alpha - \cos 7\alpha =$$

$$= \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 2 \cdot 0{,}8 - 1 = \boxed{0{,}6}.$$

15) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}4$.

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \sin\alpha) = \frac{1}{2}(1 - 0{,}4) = \boxed{0{,}3}.$$

16) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos 2\alpha - \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin 2\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1 - \frac{3}{4}}{2\left(1 + \frac{3}{4}\right)} - \frac{3}{2\left(1 + \frac{3}{4}\right)} = \frac{1 - \frac{3}{4} - 3}{2 \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\right)} = \frac{-\frac{11}{4}}{2 \cdot \frac{7}{4}} = \boxed{-\frac{11}{14}}.$$

17) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 0{,}8$.

$\sin \alpha + \cos \alpha = 0{,}8$;

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0{,}64$;

$1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0{,}64$; $\quad 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -0{,}36$;

$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -0{,}18$;

$\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) =$

$= 0{,}8(1 + 0{,}18) = \boxed{0{,}944}$.

4. Решите уравнения:

1) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$.

$$2 \sin \frac{x + 5x}{2} \cdot \cos \frac{x - 5x}{2} + \sin 3x = 0;$$

$$2 \sin 3x \cdot \cos 2x + \sin 3x = 0; \quad 2 \sin 3x \cdot \left(\cos 2x + \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$\left[\begin{aligned} &\sin 3x = 0 \\ &\cos 2x = -\frac{1}{2} \end{aligned}\right.; \quad \left[\begin{aligned} &3x = \pi k \\ &2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{aligned}\right.; \quad \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{3} k \\ &x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n \end{aligned}\right.;$$

$x = \frac{\pi}{3} k$ как более общий случай.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{3} k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2) $\cos 2x + \cos 8x = \cos 4x + \cos 6x$.

$$2\cos\frac{2x+8x}{2}\cdot\cos\frac{2x-8x}{2} = 2\cos\frac{4x+6x}{2}\cdot\cos\frac{4x-6x}{2};$$

$\cos 5x\cdot\cos 3x = \cos 5x\cdot\cos x$; $\quad \cos 5x(\cos 3x - \cos x) = 0$;

$$2\cos 5x\cdot\sin\frac{3x-x}{2}\cdot\sin\frac{3x+x}{2} = 0;$$

$\cos 5x\cdot\sin x\cdot\sin 2x = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\cos 5x = 0\\ \sin x = 0\\ \sin 2x = 0\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi}{5}k\\ x = \pi n\\ x = \dfrac{\pi}{2}p\end{array}\right..$$

Заметим, что случай $x = \dfrac{\pi}{2}p$ включает в себя случай $x = \pi n$. Обобщая, получим ответ.

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi}{5}k; \dfrac{\pi}{2}p \mid k, p\in\mathbb{Z}\right\}$.

3) $\sin x + \cos x = \sin 3x + \cos 3x$.

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right);$$

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$2\sin\frac{3x+\frac{\pi}{4}-x-\frac{\pi}{4}}{2}\cdot\cos\frac{3x+\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}}{2} = 0;$$

$$\sin x\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = 0; \quad \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos(2x+\dfrac{\pi}{4}) = 0\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \pi k\\ 2x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}x = \pi k\\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}n\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\pi k; \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}n \mid k, n\in\mathbb{Z}\right\}$.

4) $\cos 4x \cdot \cos 2x = \sin 6x \cdot \sin 8x.$

$$\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 14x);$$

$$\cos 14x + \cos 6x = 0;$$

$$2\cos 10x \cdot \cos 4x = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \cos 10x = 0 \\ \cos 4x = 0 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} 10x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ 4x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi}{10}k \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{4}n \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi}{10}k; \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{4}n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

5) $\cos 3x \cdot \sin 5x = \cos 5x \cdot \sin 7x.$

$$\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 12x + \sin 2x);$$

$$\sin 12x - \sin 8x = 0;$$

$$2\sin 2x \cdot \cos 10x = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 10x = 0 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2}k \\ x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi}{10}n \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2}k; \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi}{10}n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

6) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0.$

$$\frac{\sin 3x}{\cos x \cdot \cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0;$$

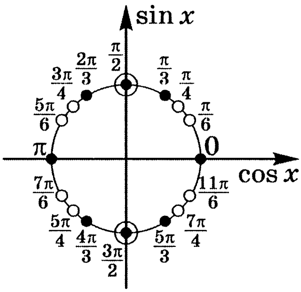
$$\sin 3x \cdot \frac{\cos 3x - \cos x \cdot \cos 2x}{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\sin 3x \cdot (\cos 3x - \cos x \cdot \cos 2x)}{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\sin 3x(\cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x - \cos x \cdot \cos 2x)}{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x}{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x} = 0; \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 0 \\ \operatorname{tg} 2x = 0 \\ \operatorname{tg} 3x = 0 \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi k \\ x = \dfrac{\pi}{2} n \\ x = \dfrac{\pi}{3} p \end{array}\right. ; \quad D(\text{У}) = \left\{\begin{array}{l} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{array}\right. .$$



Ответ: $\left\{ \dfrac{\pi}{3} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Практикум 10

Рассмотрим более сложные примеры.

Вычислите:

1) $\left[\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-x\right)\right]^{-1}$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\frac{3}{4}$;

2) $\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}$, если $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}4\alpha=0{,}2$;

4) $5\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{5x}{2}$, если $\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{4}{5}$, где $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

5) $\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, если $\sin x+\cos x=\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$ при $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$;

6) $6(9\sin2\alpha+7\cos2\alpha)^{-1}$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$;

7) $\frac{\sin^3\alpha+\sin3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos3\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=0{,}3$;

8) $\frac{12+16\cos4\alpha+\cos8\alpha}{3-4\cos4\alpha+\cos8\alpha}$, если $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{1}{3}$;

9) $4\sin^3\alpha\cdot\cos3\alpha+4\cos^3\alpha\cdot\sin3\alpha$, если $\sin4\alpha=0{,}2$;

10) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$;

11) $3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin2\alpha=\frac{120}{169}$ при $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

12) $128(\sin^8\alpha+\cos^8\alpha)$, если $\sin2\alpha=0{,}5$;

13) $\sqrt{\frac{10}{39\sqrt{3}}\left(\sin^{12}\alpha-\cos^{12}\alpha\right)}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

при $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

14) $\dfrac{2\sin^2 4\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}(45^\circ + 4\alpha)\cdot\cos^2(225^\circ - 4\alpha)}$, если $\alpha = 3^\circ$;

15) $\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha - 2\,\mathrm{tg}\,2\alpha - 4\,\mathrm{tg}\,4\alpha - 8\,\mathrm{tg}\,8\alpha$, если $\alpha = \dfrac{\pi}{48}$;

16) $\cos^2 4x - \sin 8x\cdot\mathrm{ctg}\,2x + \sin^2 4x\cdot\mathrm{ctg}^2\,2x$, если $x = \dfrac{\pi}{36}$;

17) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin 54x$, если:

а) $\mathrm{ctg}^2\,27x - \mathrm{ctg}\,27x + 1 = \mathrm{ctg}\,\dfrac{x}{2}$;

б) $x = \dfrac{\pi}{27}$;

18) $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\ldots\cdot\cos 2^7x$, если $x = \dfrac{\pi}{256}$.

Решение практикума 10

Вычислите:

1) $\left[\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-x\right)\right]^{-1}$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\frac{3}{4}$.

$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{ctg}x$; тогда $\operatorname{ctg}x=-\frac{3}{4}$, значит $\operatorname{tg}x=-\frac{4}{3}$;

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}x}=\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x};$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)=\frac{1-\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}}=-\frac{1}{7};$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-x\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}x}=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x};$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-x\right)=\frac{1+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}}=-7.$$

С учетом полученных результатов

$$\left[\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-x\right)\right]^{-1}=\left(-\frac{1}{7}-7\right)^{-1}=$$

$$=-\frac{7}{50}=\boxed{-0{,}14}.$$

2) $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}$, если $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{2}$.

$$\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}=\frac{1+(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha})^2}{1-(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha})^2}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2}.$$

Значит, $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}=\boxed{2}$.

3) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}4\alpha = 0{,}2$.

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha =$$

$$= \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - 2\operatorname{tg}2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha} - 2\operatorname{tg}2\alpha,$$

так как $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

$$\frac{2}{\operatorname{tg}2\alpha} - 2\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)}{\operatorname{tg}2\alpha} = \frac{2}{\frac{1}{2}\operatorname{tg}4\alpha} =$$

$$= \frac{4}{\operatorname{tg}4\alpha} = \frac{4}{0{,}2} = 20.$$

Значит, $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha = \boxed{20}$, если $\operatorname{tg}4\alpha = 0{,}2$.

4) $5\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{5x}{2}$, если $\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{4}{5}$, где $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$5\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{5x}{2} = 5\cdot\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{5x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{5x}{2}\right)\right] =$$

$$= 2{,}5(\sin 3x - \sin 2x);$$

$\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{4}{5}$, значит $\sin x = \dfrac{4}{5}$, где $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$;

$$\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x; \qquad \cos x = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5};$$

$$\sin 2x = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{25};$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1; \qquad \cos 2x = 2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25};$$

$$\sin 3x = \sin(x+2x) = \sin x\cdot\cos 2x + \cos x\cdot\sin 2x =$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{7}{25}\right) + \frac{3}{5}\cdot\frac{24}{25} = \frac{72-28}{125} = \frac{44}{125}.$$

Тогда $5\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{5x}{2}=2{,}5(\sin 3x-\sin 2x)$, т. е.

$$5\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{5x}{2}=2{,}5\left(\frac{44}{125}-\frac{24}{25}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{44-120}{125}=$$

$$=-\frac{38}{25}=\boxed{-1{,}52}.$$

5) $\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$, если $\sin x+\cos x=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}$ при $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

Так как $\sin x>-\cos x$ и $x\in[-\pi;\pi]$,

то $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right)\subset[-\pi;\pi]$, значит

$$\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=\frac{9+4\sqrt{2}}{9}=1+\frac{4}{9}\sqrt{2};$$

$$1+\sin 2x=1+\frac{4}{9}\sqrt{2};$$

$\sin 2x=\dfrac{4}{9}\sqrt{2}$, но $-\dfrac{\pi}{2}<2x<\dfrac{3\pi}{2}$.

а) $-\dfrac{\pi}{2}<2x<0;\quad \cos 2x>0;$

$$\cos 2x=\sqrt{1-\left(\frac{4}{9}\sqrt{2}\right)^2}=\frac{7}{9};$$

$-\dfrac{\pi}{4}<x<0$, значит $\cos x>0,\quad \sin x<0;$

$$\cos x=\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}};\quad \cos x=\sqrt{\frac{1+\frac{7}{9}}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{2};$$

$$\sin x=-\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}};\quad \sin x=-\sqrt{\frac{1-\frac{7}{9}}{2}}=-\frac{1}{3};$$

так как $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$, то

$$\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)}{-\frac{1}{3}}=4-3\sqrt{2}.$$

б) $0 < 2x < \dfrac{\pi}{2}$; $\cos 2x > 0$; $\cos 2x = \dfrac{7}{9}$;

$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$, тогда $\cos x > 0$; $\sin x > 0$, т. с.

$\cos x = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$; $\sin x = \dfrac{1}{3}$, тогда

$$\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)}{\frac{1}{3}} = 3\sqrt{2} - 4.$$

в) $\dfrac{\pi}{2} < 2x < \pi$; $\cos 2x < 0$;

$\cos 2x = -\dfrac{7}{9}$;

$\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{2}$; $\cos x > 0$; $\sin x > 0$, тогда

$$\cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}; \quad \cos x = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{9}}{2}} = \frac{1}{3};$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}; \quad \sin x = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{9}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 1.$$

г) $\pi < 2x < \dfrac{3\pi}{2}$, $\cos 2x < 0$,

т. е. $\cos 2x = -\dfrac{7}{9}$;

тогда $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{4}$, значит $\cos x < 0$; $\sin x > 0$;

$$\cos x = -\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}; \quad \cos x = -\sqrt{\frac{1 - \frac{7}{9}}{2}} = -\frac{1}{3};$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}; \quad \sin x = \sqrt{\frac{1+\frac{7}{9}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

тогда $\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 2.$

д) при $x \in \left[-\pi; -\dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}; \pi\right]$ $\sin x + \cos x \leqslant 0$, но $\sin x + \cos x = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}$, что одновременно невозможно, значит задача неразрешима.

е) при $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$ и $x = \dfrac{\pi}{2}$

равенство $\sin x + \cos x = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}$ — не выполняется.

Ответ: а) на $\left(-\dfrac{\pi}{4}; 0\right)$ $\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = 4 - 3\sqrt{2}$;

б) на $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$ $\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = 3\sqrt{2} - 4$;

в) на $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = 1$;

г) на $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{4}\right)$ $\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = 2$.

6) $6(9\sin 2\alpha + 7\cos 2\alpha)^{-1}$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$.

Так как $\sin 2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}$, то $\sin 2\alpha = \dfrac{2\cdot 2}{1+2^2} = \dfrac{4}{5}$;

так как $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}$, то $\cos 2\alpha = \dfrac{1-2^2}{1+2^2} = -\dfrac{3}{5}$.

$$6\cdot(9\sin 2\alpha + 7\cos 2\alpha)^{-1} = 6\cdot\left(9\cdot\frac{4}{5} - 7\cdot\frac{3}{5}\right)^{-1} =$$

$$= 6\cdot\left(\frac{36-21}{5}\right)^{-1} = 6\cdot 3^{-1} = \boxed{2}.$$

7) $\dfrac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=0{,}3$.

Мы уже доказывали ранее, что

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Тогда $\dfrac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}=\dfrac{\sin^3\alpha+3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha-4\cos^3\alpha+3\cos\alpha}=$

$$=\frac{3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)}{3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $\dfrac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}=0{,}3$, если $\operatorname{ctg}\alpha=0{,}3$.

8) $\dfrac{12+16\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}{3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}$, если $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{1}{3}$.

Так как $\cos 4\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}$, то $\cos 4\alpha=\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$;

$\cos 8\alpha = 2\cos^2 4\alpha - 1$; $\quad \cos 8\alpha = 2\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^2-1=\dfrac{7}{25}$;

$$\frac{12+16\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}{3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}=\frac{12+16\cdot\frac{4}{5}+\frac{7}{25}}{3-4\cdot\frac{4}{5}+\frac{7}{25}}=$$

$$=\frac{12\cdot 25+16\cdot 20+7}{3\cdot 25-4\cdot 20+7}=\frac{300+320+7}{75-80+7}=\frac{627}{2}=\boxed{313{,}5}.$$

9) $4\sin^3\alpha\cdot\cos 3\alpha+4\cos^3\alpha\cdot\sin 3\alpha$, если $\sin 4\alpha=0{,}2$.

Учтем, что из формул тройного угла

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ и $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

можно получить формулы кубов:

$\sin^3\alpha=\dfrac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}$; $\quad \cos^3\alpha=\dfrac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{4}$.

$$A(\alpha) = 4\sin^3\alpha \cdot \cos 3\alpha + 4\cos^3\alpha \cdot \sin 3\alpha =$$
$$= 4 \cdot \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4} \cdot \cos 3\alpha + 4 \cdot \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4} \cdot \sin 3\alpha =$$
$$= 3\sin\alpha \cdot \cos 3\alpha - \sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha +$$
$$+ 3\cos\alpha \cdot \sin 3\alpha + \cos 3\alpha \cdot \sin 3\alpha =$$
$$= 3(\sin\alpha \cdot \cos 3\alpha + \cos\alpha \cdot \sin 3\alpha) = 3\sin 4\alpha.$$

Значит $A(\alpha) = 3\sin 4\alpha$, а так как по условию $\sin 4\alpha = 0{,}2$, то $A(\alpha) = 3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6$.

Ответ: $4\sin^3\alpha \cdot \cos 3\alpha + 4\cos^3\alpha \cdot \sin 3\alpha = 0{,}6$.

10) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$.

$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = -\cos 2\alpha$,

но $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

Тогда так как $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$, то $\cos\alpha = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$.

Значит $\cos 2\alpha = 2 \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \dfrac{9}{25} - 1 = -\dfrac{7}{25} = -0{,}28$,

так как $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Итак, $-\cos 2\alpha = \dfrac{7}{25} = 0{,}28$.

Ответ: $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 0{,}28$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}5$.

11) $3\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin 2\alpha = \dfrac{120}{169}$ при $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

С учетом условий получим $\dfrac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$, тогда $\cos 2\alpha < 0$, значит

$$\cos 2\alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{120}{169}\right)^2} = -\frac{\sqrt{289 \cdot 49}}{169} = -\frac{17 \cdot 7}{169} = -\frac{119}{169}.$$

$\cos\alpha > 0$, тогда $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$; $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1 - \frac{119}{169}}{2}} = \dfrac{5}{13}$;

$$\sin\alpha > 0; \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}.$$

Так как $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, то $3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 3\cdot\frac{\frac{12}{13}}{1+\frac{5}{13}} = \frac{3\cdot 12}{18} = 2.$

12) $128(\sin^8\alpha + \cos^8\alpha)$, если $\sin 2\alpha = 0{,}5$.

а) $A(\alpha) = \sin^8\alpha + \cos^8\alpha =$

$= \left(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha\right)^2 - 2\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha =$

$= \left[\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\right]^2 - 2\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha =$

$= \left(1 - 2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\right)^2 - \frac{1}{8}\left(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right)^4 =$

$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2\alpha;$

б) $\sin 2\alpha = 0{,}5$, тогда

$A(\alpha) = \left[1 - \frac{1}{2}\cdot(0{,}5)^2\right]^2 - \frac{1}{8}\cdot(0{,}5)^4 =$

$= \left(1-\frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16} = \frac{49}{64} - \frac{1}{128} = \frac{97}{128}.$

Тогда $128(\sin^8\alpha + \cos^8\alpha) = 128\cdot\frac{97}{128} = 97.$

Ответ: $128(\sin^8\alpha + \cos^8\alpha) = 97$, если $\sin 2\alpha = 0{,}5$.

13) $\sqrt{\frac{10}{39\sqrt{3}}\left(\sin^{12}\alpha - \cos^{12}\alpha\right)}$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

$A(\alpha) = \sin^{12}\alpha - \cos^{12}\alpha = (\sin^4\alpha)^3 - (\cos^4\alpha)^3 =$

$= (\sin^4\alpha - \cos^4\alpha)(\sin^8\alpha + \sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha + \cos^8\alpha) =$

$= (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\ \times$

$\times\ \left[(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)^2 - 2\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha + \sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha\right] =$

$$= -\cos 2\alpha \times$$
$$\times \left[\left((\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\right)^2-\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha\right] =$$
$$= -\cos 2\alpha\cdot\left[(1-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)^2-\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha\right] =$$
$$= -\cos 2\alpha \times$$
$$\times\left[1-4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+4\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha-\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha\right] =$$
$$= -\cos 2\alpha\left[1-4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+3\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha\right] =$$
$$= -\cos 2\alpha(1-\sin^2 2\alpha+\frac{3}{16}\sin^4 2\alpha).$$

Учтем, что по условию $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ при $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2};\quad \alpha-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k;\quad \alpha=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k.$$

Так как $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, то $\alpha=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7\pi}{12}$; $\quad 2\alpha=\dfrac{7\pi}{6}$.

$$A\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-\cos\frac{7\pi}{6}\left(1-\sin^2\frac{7\pi}{6}+\frac{3}{16}\sin^4\frac{7\pi}{6}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{3}{256}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{256-64+3}{256}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{195}{256},\text{ тогда}$$

$$\sqrt{\frac{10}{39\sqrt{3}}\cdot A(\frac{7\pi}{12})}=\sqrt{\frac{10}{39\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot 39\cdot 5}{2\cdot 256}}=\sqrt{\frac{5^2}{16^2}}=\boxed{\frac{5}{16}}.$$

14) $\dfrac{2\sin^2 4\alpha-1}{2\operatorname{ctg}(45^\circ+4\alpha)\cdot\cos^2(225^\circ-4\alpha)}$, если $\alpha=3^\circ$.

$$A(\alpha)=\frac{2\sin^2 4\alpha-1}{2\operatorname{ctg}(45^\circ+4\alpha)\cdot\cos^2(225^\circ-4\alpha)}=$$

$\cos^2(225^\circ-4\alpha)=\cos^2\left[270^\circ-(45^\circ+4\alpha)\right]=\sin^2(45^\circ+4\alpha)$ **3.29**

$$=\frac{-\cos 8\alpha}{2\frac{\cos(45^\circ+4\alpha)}{\sin(45^\circ+4\alpha)}\cdot\sin^2(45^\circ+4\alpha)}=\frac{-\cos 8\alpha}{2\cos(45^\circ+4\alpha)\cdot\sin(45^\circ+4\alpha)}=$$

$$= \frac{-\cos 8\alpha}{\sin(90^\circ+8\alpha)} = \frac{-\cos 8\alpha}{\cos 8\alpha} = -1.$$

Решение от α (при $\alpha \in D(A)$) не зависит ($3^\circ \in D(A)$).

Ответ: $\dfrac{2\sin^2 4\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}(45^\circ + 4\alpha)\cdot\cos^2(225^\circ - 4\alpha)} = -1.$

15) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha - 4\operatorname{tg}4\alpha - 8\operatorname{tg}8\alpha$, если $\alpha = \dfrac{\pi}{48}$.

$A(\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha - 4\operatorname{tg}4\alpha - 8\operatorname{tg}8\alpha.$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = 2\operatorname{ctg}2\alpha;$$

$$2\operatorname{ctg}2\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha = 2\left(\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right) = 2\cdot\frac{\cos 4\alpha}{\frac{1}{2}\sin 4\alpha} = 4\operatorname{ctg}4\alpha.$$

Далее по аналогии $4\operatorname{ctg}4\alpha - 4\operatorname{tg}4\alpha = 8\operatorname{ctg}8\alpha$;

$8\operatorname{ctg}8\alpha - 8\operatorname{tg}8\alpha = 16\operatorname{ctg}16\alpha.$

$$A\left(\frac{\pi}{48}\right) = 16\operatorname{ctg}\left(16\cdot\frac{\pi}{48}\right) = 16\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{16}{3}\sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha - 4\operatorname{tg}4\alpha - 8\operatorname{tg}8\alpha = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$

при $\alpha = \dfrac{\pi}{48}$.

16) $\cos^2 4x - \sin 8x\cdot\operatorname{ctg}2x + \sin^2 4x\cdot\operatorname{ctg}^2 2x$, если $x = \dfrac{\pi}{36}$.

$$A(x) = \cos^2 4x - \sin 8x\cdot\operatorname{ctg}2x + \sin^2 4x\cdot\operatorname{ctg}^2 2x =$$

$$= \cos^2 4x - 2\sin 4x\cdot\cos 4x\cdot\frac{\cos 2x}{\sin 2x} + 4\sin^2 2x\cdot\cos^2 2x\cdot\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} =$$

$$= \cos^2 4x - \frac{4\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 2x}{\sin 2x} + 4\cos^4 2x =$$

$$= (2\cos^2 2x - 1)^2 - 4\cos^2 2x(2\cos^2 2x - 1) + 4\cos^4 2x =$$

$$= 4\cos^4 2x - 4\cos^2 2x + 1 - 8\cos^4 2x + 4\cos^2 2x + 4\cos^4 2x = 1.$$

Ответ: $A(x) = \boxed{1}$ и не зависит от $x = \dfrac{\pi}{36}$.

17) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin 54x$, если:

а) $\operatorname{ctg}^2 27x - \operatorname{ctg} 27x + 1 = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$; б) $x = \dfrac{\pi}{27}$.

а) $\operatorname{ctg}^2 27x - \operatorname{ctg} 27x + 1 = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$.

1. $$\frac{1}{\sin^2 27x} - \frac{\cos 27x}{\sin 27x} = \frac{\sin x}{1-\cos x};$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1-\cos x};\quad \sin\frac{x}{2} \neq 0}\ \text{5.10}$$

$$\frac{1-\cos 27x \cdot \sin 27x}{\sin^2 27x} = \frac{\sin x}{1-\cos x};$$

$$\frac{1-\frac{1}{2}\sin 54x}{\frac{1}{2}(1-\cos 54x)} = \frac{\sin x}{1-\cos x};$$

$$(2-\sin 54x)(1-\cos x) = \sin x(1-\cos 54x);$$

$$2-\sin 54x - 2\cos x + \sin 54x \cdot \cos x = \sin x - \sin x \cdot \cos 54x;$$

$$2(1-\cos x) - \sin 54x + \sin 55x - \sin x = 0;$$

$$2\cdot 2\cdot \sin^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{109x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 0;$$

$$2\sin\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{109x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 0 \ \left(\sin\frac{x}{2} \neq 0\right);$$

$$2\sin\frac{x}{2} - 2\sin\frac{55x}{2}\cdot\sin\frac{54x}{2} = 0. \text{ Тогда } \frac{\sin\frac{55x}{2}\cdot\sin\frac{54x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = 1.$$

2. Пусть $A(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin 54x$;

$$A(x) = \frac{(\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin 54x)\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \ \left(\sin\frac{x}{2} \neq 0\right).$$

$$\boxed{\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]}\ \text{7.8}$$

$$\sin\frac{x}{2}\cdot\sin x = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right);$$

$$\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 2x = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right);$$

$$\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 3x = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{7x}{2}\right);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 54x = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{107x}{2} - \cos\frac{109x}{2}\right).$$

Поэтому

$$A(x) = \frac{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{109x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{55x}{2}\cdot\sin\frac{54x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

б) $x = \dfrac{\pi}{27}$, тогда $A\left(\dfrac{\pi}{27}\right) = 0$,

так как $\sin\left(\dfrac{54}{2}\cdot\dfrac{\pi}{27}\right) = \sin\pi = 0$.

Ответ: а) $A(x) = 1$, если $\operatorname{ctg}^2 27x - \operatorname{ctg} 27x + 1 = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;

б) $A(x) = 0$, если $x = \dfrac{\pi}{27}$.

18) $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\ldots\cdot\cos 2^7x$, если $x = \dfrac{\pi}{256}$.

$$A(x) = \cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\ldots\cdot\cos 2^7x\cdot\frac{\sin x}{\sin x} = \quad (\sin x \neq 0)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos 2^7x}{\sin x} =$$

$$= \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\sin 4x\cdot\cos 4x\cdot\ldots\cdot\cos 2^7x}{\sin x} = \frac{1}{2^8}\cdot\frac{\sin 2^8x}{\sin x},$$

так как $\cos x\cdot\sin x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

$$A(x) = \frac{1}{2^8}\cdot\frac{\sin 2^8x}{\sin x};$$

$$A\left(\frac{\pi}{256}\right) = \frac{1}{2^8}\cdot\frac{\sin\left(2^8\cdot\frac{\pi}{256}\right)}{\sin\frac{\pi}{256}} = \frac{1}{2^8}\cdot\frac{\sin\pi}{\sin\frac{\pi}{256}} = 0.$$

Ответ: $A(x) = \cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\ldots\cdot\cos 2^7x = 0$,

если $x = \dfrac{\pi}{256}$.

Периодические функции

I. Определение. Функция $y = f(x)$ называется периодической на $D(f)$, если для $\forall x \in D(f)$ $\exists T \neq 0$, называемое ее периодом, такое что 1) $x \pm T \in D(f)$; 2) $f(x+T) = f(x)$.

II. Определение. Пусть $y = f(x)$ — периодическая функция с периодом T. Основным периодом функции называется число T_0, наименьшее из всех положительных периодов T.

Пример 1. Докажите, что функция $f(x) = A\sin(ax + b) + B$ периодическая и найдите ее основной период.

$D(f) = (-\infty; \infty)$, для $\forall T \neq 0$ верно, что $x \pm T \in D(f)$, значит первое условие определения периодической функции выполняется.

Проверим второе условие. Рассмотрим $f(x+T) - f(x) =$
$= A\sin\big(a(x+T)+b\big) + B - (A\sin(ax+b)+B) =$
$= A\sin(ax + aT + b) - A\sin(ax+b) =$
$= 2A\sin\dfrac{ax + aT + b - ax - b}{2} \cdot \cos\dfrac{ax + aT + b + ax + b}{2} =$
$= 2A\sin\dfrac{aT}{2} \cdot \cos\left(ax + b + \dfrac{aT}{2}\right).$

Если $\sin\dfrac{aT}{2} = 0$, то $\dfrac{aT}{2} = \pi k$; при $a \neq 0$ $T = \dfrac{2\pi k}{a}$, и при $k \neq 0$ найден $T \neq 0$, для которого $f(x+T) = f(x)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Значит, функция $y = f(x)$ — периодическая функция.

Так как по определению основного периода $T > 0$ и T_0 — наименьшее из таких T, то очевидно, что $T_0 = \dfrac{2\pi}{|a|}$ — основной период $(a \neq 0)$.

Примечания.

1. Из доказательства периодичность $y = A\sin(ax+b) + B$ не зависит от коэффициентов A, B и b и зависит только от $a \neq 0$.

2. При $a = 0$ $y = A\sin b + B$ — постоянная величина, не зависящая от x, тогда $f(x+T) = f(x)$ для всех T, т. е. в этом случае функция является периодической с периодом T — любым числом, значит в этом случае, так как нет наименьшего положительного числа T_0, то основного периода нет.

3. Аналогично доказывается, что периодическими являются функции

$y = A\cos(ax+b) + B$ — $T_0 = \dfrac{2\pi}{|a|}$ $(a \neq 0)$;

$y = A\,\mathrm{tg}(ax+b) + B$ — $T_0 = \dfrac{\pi}{|a|}$ $(a \neq 0)$;

$y = A\,\mathrm{ctg}(ax+b) + B$ — $T_0 = \dfrac{\pi}{|a|}$ $(a \neq 0)$.

Пример 2. Проверить периодичность $y = f(x) = \cos x^2$.

$D(f) = (-\infty; \infty)$, значит первое условие периодичности выполняется.

Рассмотрим $f(x+T) - f(x) = \cos(x+T)^2 - \cos x^2 =$

$$= -2\sin\frac{(x+T)^2 - x^2}{2} \cdot \sin\frac{(x+T)^2 + x^2}{2}.$$

а) Если $\sin\dfrac{(x+T)^2 - x^2}{2} = 0$, то $f(x+T) = f(x)$, значит $\dfrac{(x+T)^2 - x^2}{2} = \pi k$; тогда $xT + \dfrac{T^2}{2} = \pi k$ — получили уравнение относительно T, решения которого, конечно, зависят от x, что противоречит определению периодичности функции.

б) Если $\sin\dfrac{(x+T)^2 + x^2}{2} = 0$, то $f(x+T) = f(x)$, значит $x^2 + xT + \dfrac{T^2}{2} = \pi k$ — но решения этого уравнения также зависят от x.

Итак, равенство $f(x+T) = f(x)$ для $\forall x \in D(f)$ не выполняется ни для какого T, следовательно, функция $y = \cos x^2$ — непериодическая.

Пример 3. Выясните периодичность функции $y = \cos^2 3x$.

$D(f) = (-\infty; \infty)$ — первое условие выполняется.

$\cos^2 3x = \dfrac{1+\cos 6x}{2}$, т. е. $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 6x$,

а это функция вида $y = A\cos(ax+b)+B$, значит, она периодическая с основным периодом $T_0 = \dfrac{2\pi}{|a|} = \dfrac{\pi}{3}$ $(a = 6)$.

Пример 4. Выясните периодичность $y = f(x) = \dfrac{1-\sin x}{1-\sin x} \cdot \operatorname{ctg} x$.

$D(f):\ \begin{cases} \sin x \neq 1 \\ \sin x \neq 0 \end{cases};\quad \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x \neq \pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$

На $D(f)$ $f(x) = \operatorname{ctg} x$,

эта функция имеет вид $y = A\operatorname{ctg}(ax+b)+B$, а значит периодическая с периодом $T = \dfrac{\pi k}{a}$ $(a \neq 0)$ и основным периодом $T_0 = \dfrac{\pi}{|a|}$. Так как в данном случае $a = 1$, то основным периодом должно быть $T_0 = \pi$.

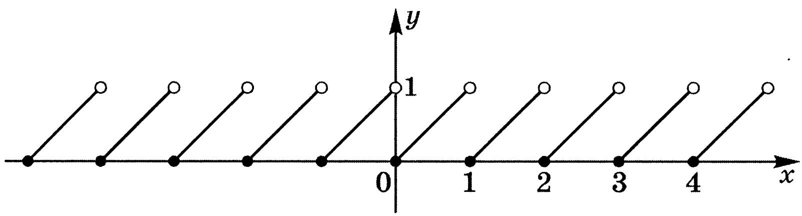
Но в случае $T_0 = \pi$ не выполняется условие на область определения, так как $x = -\dfrac{\pi}{2} \in D(f)$, но $x = -\dfrac{\pi}{2} + \pi = \dfrac{\pi}{2} \notin D(f)$, т. е. не выполняется условие периодичности.

значит $D(f)$ — несимметричное множество.

Значит, $y = \dfrac{1-\sin x}{1-\sin x} \cdot \operatorname{ctg} x$ — непериодическая функция.

Пример 5. Может ли функция быть периодической, не являясь тригонометрической?

Рассмотрим $y = \{x\}$ — функция дробной части числа (ее график представлен на чертеже).



Очевидно, что $D(f) = (-\infty; \infty)$ — первое условие выполнено. Также очевидно, что $\{x+T\} = \{x\}$ при любом целом T (дробная часть числа при прибавлении T остается той же).

Значит, $y = \{x\}$ — периодическая, а $T_0 = 1$ (наименьшее положительное целое число).

Ответ: да[1].

Пример 6. Может ли функция, не являясь постоянной, быть периодической и не иметь основного периода?

Рассмотрим функцию Дирихле:

$$\mathrm{D}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ — рациональное число;} \\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

$D(\mathrm{D}) = (-\infty; \infty)$ — первое условие выполнено.

Проверим второе условие.

а) Так как сумма двух рациональных чисел есть рациональное число, то если x рациональное, то для любого рационального T $\mathrm{D}(x+T) = \mathrm{D}(x) = 1$.

б) Известно, что сумма иррационального числа и рационального числа есть число иррациональное, значит если x иррациональное число, то для любого рационального T $x+T$ — иррациональное, и $\mathrm{D}(x+T) = \mathrm{D}(x) = 0$.

Итак, для любого x и для любого рационального T выполняется равенство $\mathrm{D}(x+T) = \mathrm{D}(x)$. По определению D — периодическая функция.

Основного периода эта функция не имеет, так как не существует наименьшего положительного рационального числа.

Примечание. Рациональным числом называется бесконечная периодическая десятичная дробь. Можно доказать, что ее можно представить в виде обыкновенной дроби вида $\dfrac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Иррациональным числом называется бесконечная непериодическая десятичная дробь.

---

[1] Более подробно см. Шахмейстер А. Х. Множества. Функции. Последовательности. СПб.: «ЧеРо-на-Неве», 2008. С. 92.

Отметим ряд **свойств периодической функции.**

1. Область определения периодической функции есть бесконечное множество.
2. Периодическая функция не может иметь конечного числа точек разрыва.
3. Периодическая функция не может быть строго монотонной на всей своей области определения.
4. Непрерывная и неограниченная на всей числовой оси функция не может быть периодической.
5. Сложная функция, промежуточный аргумент которой периодическая функция, также является периодической функцией.
6. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ периодические, то их алгебраическая сумма, произведение и частное — также периодические функции, если их основные периоды соизмеримы. Для их алгебраической суммы основной период есть наименьшее общее кратное основных периодов $f(x)$ и $g(x)$.

Пример 7. Найдите основной период функции
$y(x) = \operatorname{tg}\left(\sqrt{2}\pi x\right) + \sin(\pi x)$.

$y = f_1(x) = \operatorname{tg}\left(\sqrt{2}\pi x\right)$ — периодическая,

$(T_0)_1 = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}\pi} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \left(T_0 = \dfrac{\pi}{|a|}\right);$

$y = f_2(x) = \sin(\pi x)$ — периодическая,

$(T_0)_2 = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2 \quad \left(T_0 = \dfrac{2\pi}{|a|}\right).$

Числа $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и 2 несоизмеримы,

значит функция $y = \operatorname{tg}\left(\sqrt{2}\pi x\right) + \sin(\pi x)$ — непериодическая.

Примечание. Соизмеримость чисел T_1 и T_2 означает, что $\dfrac{T_1}{T_2}$ — рациональное число (т. е. число вида $\dfrac{p}{q}$, где $q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$).

Пример 8. Найдите период функции $y(x)=\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{4}+\sin\frac{x}{5}$.

Как мы уже знаем,

$y_1 = f_1(x) = \cos\frac{x}{3}$ — периодическая, $(T_0)_1 = 6\pi$ $\left(T_0 = \frac{2\pi}{|a|}\right)$;

$y_2 = f_2(x) = \cos\frac{x}{4}$ — периодическая, $(T_0)_2 = 8\pi$;

$y_3 = f_3(x) = \sin\frac{x}{5}$ — периодическая, $(T_0)_3 = 10\pi$.

Очевидно, числа 6π, 8π и 10π соизмеримы, значит $y(x) = \cos\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{4} + \sin\frac{x}{5}$ — периодическая функция, а ее основной период равен $T_0 = \text{Н. О. К.}\ (6\pi; 8\pi; 10\pi) = 120\pi$.

Пример 9. Найдите основной период функции
$y = \cos^2 x + \cos^2(1+x) - 2\cos 1 \cdot \cos x \cdot \cos(1+x) - \frac{1}{2}$.

$D(f) = (-\infty; \infty)$ — первое условие периодичности выполнено.

Проверим второе условие.

а) $2\cos 1 \cdot \cos x = \cos(1+x) + \cos(1-x)$;

б) $-2\cos 1 \cdot \cos x \cdot \cos(1+x) =$
$= -\cos^2(1+x) - \cos(1-x)\cdot\cos(1+x)$;

в) $\cos^2(1+x) - 2\cos 1 \cdot \cos x \cdot \cos(1+x) =$
$= -\cos(1-x)\cdot\cos(1+x) = -\frac{1}{2}(\cos 2 + \cos 2x)$;

г) $\cos^2 x + \cos^2(1+x) - 2\cos 1 \cdot \cos x \cdot \cos(1+x) - \frac{1}{2} =$

$= \cos^2 x - \frac{1}{2}\cos 2 - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2} =$

$= \frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\cos 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2}\cos 2.$

Так как $y = -\frac{1}{2}\cos 2$ — число, не зависящее от x,

то $f(x+T) = -\frac{1}{2}\cos 2 = f(x)$ при любом $T \neq 0$,

т. е. $y(x)$ — периодическая.

д) Основного периода функция не имеет, так как нет наименьшего положительного числа.

Примечание. Используя свойства, можно доказать, что следующие функции не являются периодическими:

$y = \log_2 x$ — не выполняется свойство 3 (функция строго монотонная);

$y = x^2 \sin x$ — свойство 4 (функция не ограниченная);

$y = \dfrac{\sin x}{x^2 - 1}$ — свойство 2 (имеет конечное число разрывов);

$y = \dfrac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^4 + 3x^2 - 4}}{\sin x}$ — свойство 1 ($D(f) = \{-1; 1\}$);

$y = \sin x \cdot \sin\left(\sqrt{2}x\right)$ — свойство 6 (основные периоды функций-сомножителей несоизмеримы);

$y = \sin(2^x)$ — свойство 5 (промежуточная функция $t(x) = 2^x$ не является периодической).

Практикум 11 (Продолжение рассмотрения более сложных примеров)

1. Вычислите:

1) $\left(\operatorname{tg}40^\circ - \cos^{-1}40^\circ\right)\left(\cos 40^\circ - \operatorname{ctg}40^\circ\right)^{-1} - \dfrac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}3}{\operatorname{tg}1} - \dfrac{3-\operatorname{tg}^2 1}{1-3\operatorname{tg}^2 1}$;

3) $4\cos\dfrac{\pi}{33}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{33}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{33}\cdot\cos\dfrac{8\pi}{33}\cdot\cos\dfrac{16\pi}{33}$;

4) $\sqrt{3}(\operatorname{tg}20^\circ + 4\sin 20^\circ)$;

5) $\sin 18^\circ\cdot\sin 54^\circ$;

6) $\sin\dfrac{\pi}{10} + \sin\dfrac{13\pi}{10}$;

7) $(\sqrt{3}-1)\cos\dfrac{\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}$;

8) $\operatorname{tg}^2 20^\circ\cdot\operatorname{tg}^2 40^\circ\cdot\operatorname{tg}^2 80^\circ$;

9) $\cos\dfrac{2\pi}{9} + \cos\dfrac{4\pi}{9} + \cos\dfrac{8\pi}{9}$;

10) $\sqrt{5}\left(3\sin\dfrac{\pi}{10} + \sin\dfrac{3\pi}{10} + \sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

2. Докажите неравенства:

1) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \dfrac{3}{2}$, где α, β, γ — углы треугольника;

2) $\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2} \leqslant \dfrac{1}{8}$, где α, β, γ — углы треугольника;

3) $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$, если $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ (α — угол в радианах);

4) $\alpha - \dfrac{\alpha^3}{4} < \sin\alpha$, если $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ (α — угол в радианах).

3. Определите периодичность функций и основной период:

1) $y = \dfrac{1}{2 + \cos 3x}$;

2) $y = \dfrac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}$;

3) $y = \cos x \cdot \cos\left(\sqrt{2}x\right)$;

4) $y = 3x + \sin 2x$;

5) $y = \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \cos 5x$;

6) $y = \dfrac{1 - \cos 4x}{2 \sin 2x} - (\sin x + \cos x)^2 + 1$;

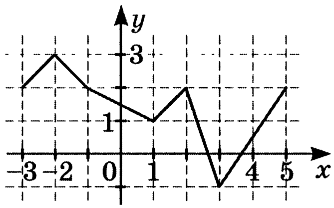
7) $y = 3^{\sin \frac{x}{2}} + 2^{\operatorname{tg} \frac{x}{3}}$;

8) $y = \dfrac{\sin 9x}{\sin 3x}$;

9) $y = \sin^2(\cos 2x)$;

10) $y = \sqrt{\sin x} \cdot \sin\sqrt{x}$.

4. Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Ее период равен 8. График функции на отрезке $[-3; 5]$ изображен на рисунке. Найдите значение выражения $\dfrac{f(-10) \cdot f(-4)}{f(28)}$.



Решение практикума 11

1. Вычислите:

1) $$\left(\operatorname{tg}40^\circ-\cos^{-1}40^\circ\right)\left(\cos 40^\circ-\operatorname{ctg}40^\circ\right)^{-1}-\frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 40^\circ-1}{\cos 40^\circ}\left(\frac{\cos 40^\circ\cdot\sin 40^\circ-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}\right)^{-1}-\frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 40^\circ-1}{\cos 40^\circ}\cdot\frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ(\sin 40^\circ-1)}-\frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ}-\frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ}=\boxed{0}.$$

2) $$\frac{\operatorname{tg}3}{\operatorname{tg}1}-\frac{3-\operatorname{tg}^2 1}{1-3\operatorname{tg}^2 1}.$$

Похоже, здесь необходимо знать $\operatorname{tg}3\alpha$. Выведем тангенс тройного угла:

$$\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+2\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha+2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{3-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Тогда, полагая $\alpha=1$, получим

$$\operatorname{tg}3=\operatorname{tg}1\cdot\frac{3-\operatorname{tg}^2 1}{1-3\operatorname{tg}^2 1}.$$

Значит $\dfrac{\operatorname{tg}3}{\operatorname{tg}1}-\dfrac{3-\operatorname{tg}^2 1}{1-3\operatorname{tg}^2 1}=\dfrac{3-\operatorname{tg}^2 1}{1-3\operatorname{tg}^2 1}-\dfrac{3-\operatorname{tg}^2 1}{1-3\operatorname{tg}^2 1}=\boxed{0}.$

3) $$4\cos\frac{\pi}{33}\cdot\cos\frac{2\pi}{33}\cdot\cos\frac{4\pi}{33}\cdot\cos\frac{8\pi}{33}\cdot\cos\frac{16\pi}{33}=$$

$$=\frac{4\sin\frac{\pi}{33}\cdot\cos\frac{\pi}{33}\cdot\cos\frac{2\pi}{33}\cdot\cos\frac{4\pi}{33}\cdot\cos\frac{8\pi}{33}\cdot\cos\frac{16}{33}}{\sin\frac{\pi}{33}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{2\pi}{33}\cdot\cos\frac{2\pi}{33}\cdot\cos\frac{4\pi}{33}\cdot\cos\frac{8\pi}{33}\cdot\cos\frac{16\pi}{33}}{\sin\frac{\pi}{33}}=$$

$$= \frac{\sin\frac{4\pi}{33}\cdot\cos\frac{4\pi}{33}\cdot\cos\frac{8\pi}{33}\cdot\cos\frac{16\pi}{33}}{\sin\frac{\pi}{33}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{33}\cdot\cos\frac{8\pi}{33}\cdot\cos\frac{16\pi}{33}}{\sin\frac{\pi}{33}} = \frac{\frac{1}{4}\sin\frac{16\pi}{33}\cdot\cos\frac{16\pi}{33}}{\sin\frac{\pi}{33}} =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\frac{32\pi}{33}}{\sin\frac{\pi}{33}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{33}\right)}{\sin\frac{\pi}{33}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{33}}{\sin\frac{\pi}{33}} = \boxed{\frac{1}{8}}.$$

4) $\sqrt{3}(\operatorname{tg}20^\circ + 4\sin 20^\circ) =$

$$= \sqrt{3}\cdot\frac{\sin 20^\circ + 4\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} =$$

$$= \sqrt{3}\cdot\frac{\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} =$$

$$= \sqrt{3}\cdot\frac{\sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} =$$

$$= \sqrt{3}\cdot\frac{2\sin 30^\circ\cdot\cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} =$$

$$= \sqrt{3}\cdot\frac{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3}\cdot\frac{2\sin 60^\circ\cdot\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} =$$

$$= \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = \boxed{3}.$$

5) $\sin 18^\circ\cdot\sin 54^\circ = \sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ.$

Чтобы вычислять далее, необходимо знать значение $\sin 18^\circ$.

Так как $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ$, $\quad 1 - 2\sin^2 18^\circ = \sin(3\cdot 18^\circ)$;

Учтем, что $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. 6.1

$1 - 2\sin^2 18^\circ = 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ$.

Пусть $\sin 18^\circ = t$.

$4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0$;

очевидно, что $t = 1$ — корень, тогда

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} 4t^3-2t^2-3t+1 \\ \underline{4t^3-4t^2} \end{array} & \begin{array}{l} t-1 \\ \hline 4t^2+2t-1 \end{array} \\ -\begin{array}{r} 2t^2-3t+1 \\ \underline{2t^2-2t} \end{array} & \\ -\begin{array}{r} -t+1 \\ \underline{-t+1} \end{array} & \end{array}$$

Но $\sin 18^\circ \neq 1$, значит $4t^2+2t-1=0$;

$$\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}<0 \end{array}\right. .$$

Очевидно, $\sin 18^\circ > 0$, таким образом $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

$$\cos 36^\circ = 1-2\sin^2 18^\circ = 1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 =$$

$$=\frac{8-(5+1-2\sqrt{5})}{8}=\frac{2\sqrt{5}+2}{8}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Значит $\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ = \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ =$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\frac{5-1}{4\cdot 4}=\boxed{\frac{1}{4}}.$$

6) $\sin\dfrac{\pi}{10}+\sin\dfrac{13\pi}{10}=$

$$=2\sin\frac{\frac{\pi}{10}+\frac{13\pi}{10}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{13\pi}{10}-\frac{\pi}{10}}{2}=2\sin\frac{7\pi}{10}\cdot\cos\frac{3\pi}{5}=$$

$$=2\sin\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{2\cos\frac{3\pi}{10}\cdot\sin\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{3\pi}{5}}{\cos\frac{3\pi}{10}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{3\pi}{5}\cdot\cos\frac{3\pi}{5}}{\cos\frac{3\pi}{10}}=\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{6\pi}{5}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)}=\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)}{2\sin\frac{\pi}{5}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\boxed{-\frac{1}{2}}.$$

7) $(\sqrt{3}-1)\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{4} =$

$$= (\sqrt{3}-1)\cdot\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= (\sqrt{3}-1)\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{3-1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

8) $\operatorname{tg}^2 20^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 40^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 80^\circ$.

а) $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ =$

$$= \frac{1}{2}\sin 80^\circ(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 80^\circ \cdot \cos 20^\circ - \frac{1}{4}\sin 80^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}(\sin 80^\circ + \sin 60^\circ) - \frac{1}{4}\sin 80^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 80^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{4}\sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8};$$

б) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ =$

$$= \frac{2\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{8\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{1}{8};$$

в) $\operatorname{tg}^2 20^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 40^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 80^\circ = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2}{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \boxed{3}.$

9) $\cos\dfrac{2\pi}{9}+\cos\dfrac{4\pi}{9}+\cos\dfrac{8\pi}{9}=$

$$=\frac{2\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}+2\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}+2\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{8\pi}{9}}{2\sin\frac{2\pi}{9}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{4\pi}{9}-\sin\frac{2\pi}{9}+\sin\frac{6\pi}{9}-\sin\frac{6\pi}{9}+\sin\frac{10\pi}{9}}{2\sin\frac{2\pi}{9}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{4\pi}{9}+2\sin\frac{4\pi}{9}\cdot\cos\frac{6\pi}{9}}{2\sin\frac{2\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{9}-\sin\frac{4\pi}{9}}{2\sin\frac{2\pi}{9}}=\boxed{0}.$$

10) $\sqrt{5}\left(3\sin\dfrac{\pi}{10}+\sin\dfrac{3\pi}{10}+\sin\dfrac{5\pi}{6}\right).$

Учтем, что $\sin\dfrac{\pi}{10}=\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ (см. пример 4).

$\sin\dfrac{3\pi}{10}=\cos\dfrac{\pi}{5}=1-2\sin^2\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}.$

Тогда $\sqrt{5}\left(3\sin\dfrac{\pi}{10}+\sin\dfrac{3\pi}{10}+\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)=$

$$=\sqrt{5}\left(3\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\sqrt{5}\cdot\frac{3\sqrt{5}-3+\sqrt{5}+1+2}{4}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=\boxed{5}.$$

2. Докажите неравенства:

1) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\dfrac{3}{2}$, где α, β, γ — углы треугольника.

$\mathrm{L}=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\cos\gamma.$

а) Так как $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, то $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ-\dfrac{\gamma}{2}$,

поэтому $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left(90^\circ-\dfrac{\gamma}{2}\right)=\sin\dfrac{\gamma}{2}.$

б) Очевидно, что $0 \leqslant \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \leqslant 1$.

Значит $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \leqslant \sin\dfrac{\gamma}{2}$.

Тогда $2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\cos\gamma \leqslant 2\sin\dfrac{\gamma}{2}+\cos\gamma$.

в) Преобразуем выражение $2\sin\dfrac{\gamma}{2}+\cos\gamma =$

$$= 2\sin\frac{\gamma}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2} = -2\left(\sin^2\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -2\left(\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right) = -2\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2} \leqslant \frac{3}{2},$$

так как $-2\left(\sin\dfrac{\gamma}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0$ для $\forall\gamma$.

г) Теперь можно выстроить логическую цепочку:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\gamma \leqslant$$

$$\leqslant 2\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\gamma}{2} = -2\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2} \leqslant \frac{3}{2} \text{ для } \forall x,$$

т. е. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leqslant \dfrac{3}{2}$, что и требовалось доказать.

2) $\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2} \leqslant \dfrac{1}{8}$, где α, β, γ — углы треугольника.

а) $\mathrm{L} = \sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2} =$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\cdot\sin\frac{\gamma}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}+\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}-\right.$$

$$\left.-\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right].$$

б) $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ по условию, поэтому

$$\begin{aligned} \alpha-\beta+\gamma&=180^\circ-2\beta;\\ -\alpha+\beta+\gamma&=180^\circ-2\alpha;\\ \alpha+\beta-\gamma&=180^\circ-2\gamma. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}=\sin\frac{180^\circ-2\beta}{2}=\sin(90^\circ-\beta)=\cos\beta;$$

$$\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}=\sin\frac{180^\circ-2\alpha}{2}=\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha;$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}=\sin\frac{180^\circ-2\gamma}{2}=\sin(90^\circ-\gamma)=\cos\gamma;$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\sin\frac{180^\circ}{2}=\sin 90^\circ=1.$$

в) Тогда $\mathrm{L}=\frac{1}{4}\left(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1\right)$,

но $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\frac{3}{2}$ (см. выше, пример 1).

Значит $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1\leqslant\frac{1}{2}$.

Домножаем на $\frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{4}\left(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1\right)\leqslant\frac{1}{8},$$

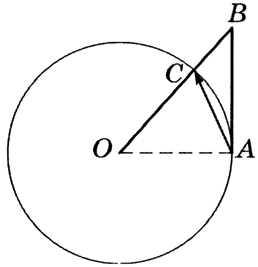
т. е. $\mathrm{L}=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=$

$$=\frac{1}{4}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1)\leqslant\frac{1}{8}.$$

Отсюда следует, что $\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}$, если α, β и γ — углы треугольника, что и требовалось доказать.

3) $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$, если $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (α — угол в радианах).

Для доказательства используем геометрические соображения. Рассмотрим окружность R и треугольник $\triangle OAB$, где $\angle BOA = \alpha$ ($OA \perp AB$).



Очевидно, что $S_{\triangle OAC} < S_{\text{сект. } OAC} < S_{\triangle OAB}$.

$S_{\triangle OAC} = \dfrac{1}{2}OA^2 \cdot \sin\alpha = \dfrac{1}{2}R^2 \cdot \sin\alpha$; $S_{\text{сект. } OAC} = \dfrac{1}{2}R^2 \cdot \alpha$;

$S_{\triangle OAB} = \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot AB = \dfrac{1}{2}OA \cdot OA \cdot \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}R^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Тогда $\dfrac{1}{2}R^2 \cdot \sin\alpha < \dfrac{1}{2}R^2 \cdot \alpha < \dfrac{1}{2}R^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Отсюда $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$ при $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, что и требовалось доказать.

4) $\alpha - \dfrac{\alpha^3}{4} < \sin\alpha$, если $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (α — угол в радианах).

Так как $\alpha < \operatorname{tg}\alpha$ (см. пример 3), то $\dfrac{\alpha}{2} < \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Домножим на $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$: $\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\dfrac{\alpha}{2} < \sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}$;

$\alpha\left(1 - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right) < 2\sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}$; $\alpha\left(1 - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right) < \sin\alpha$.

Так как $\sin\alpha < \alpha$ (см. пример 3), то $\sin\dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\alpha}{2}$;

Тогда $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\alpha^2}{4}$, значит $-\sin^2\dfrac{\alpha}{2} > -\dfrac{\alpha^2}{4}$;

$1 - \sin^2\dfrac{\alpha}{2} > 1 - \dfrac{\alpha^2}{4}$.

Домножим на $\alpha > 0$: $\alpha\left(1 - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right) > \alpha - \dfrac{\alpha^3}{4}$.

Учитывая, что $\alpha\left(1 - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right) < \sin\alpha < \alpha$, получим $\alpha - \dfrac{\alpha^3}{4} < \sin\alpha < \alpha$, что и требовалось доказать.

Примечание. Это двойное неравенство можно использовать для приближенного вычисления $\sin\alpha$ с любой степенью точности, так как α — радианное измерение угла.

3. Определите периодичность функций и основной период:

1) $y = \dfrac{1}{2 + \cos 3x}$.

$D(f) = (-\infty; \infty)$ — симметричное множество.

Рассмотрим

$$f(x+T) - f(x) = \frac{1}{2+\cos 3(x+T)} - \frac{1}{2+\cos 3x} =$$
$$= \frac{2+\cos 3x - 2 - \cos 3(x+T)}{\bigl(2+\cos 3(x+T)\bigr)(2+\cos 3x)} =$$
$$= \frac{\cos 3x - \cos 3(x+T)}{\bigl(2+\cos 3(x+T)\bigr)(2+\cos 3x)} =$$
$$= \frac{2\sin\frac{3x+3T-3x}{2}\cdot\sin\frac{3x+3T+3x}{2}}{\bigl(2+\cos 3(x+T)\bigr)(2+\cos 3x)} =$$
$$= \frac{2\sin\frac{3T}{2}\cdot\sin\left(3x+\frac{3T}{2}\right)}{\bigl(2+\cos 3(x+T)\bigr)(2+\cos 3x)}.$$

При $\sin\dfrac{3T}{2} = 0$ $T = \dfrac{2\pi k}{3}$,

т. е. если $T = \dfrac{2\pi k}{3}$ при $k \in \mathbb{Z}$ и $k \neq 0$, то $f(x+T) = f(x)$, значит $y = \dfrac{1}{2+\cos 3x}$ периодическая, и $T_0 = \dfrac{2\pi}{3}$ — основной период.

2) $y = \dfrac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$.

$D(f) = (-\infty; \infty)$ — симметричное множество.

$f(x) = \dfrac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} = \dfrac{2\sin x \cdot \cos x}{2\sin^2 x + \cos^2 x}$.

а) Пусть $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ (симметричное множество). Тогда рассмотрим определенную на этом множестве функцию $f_1(x) = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{2\operatorname{tg}^2 x + 1}$ — сложная функция от $\operatorname{tg} x$.

$\operatorname{tg} x$ — периодическая функция с основным периодом $T_0 = \pi$. По свойству 5 из этого следует, что и $f_1(x)$ — периодическая функция.

б) Вернемся к $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$.

При $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ $f(x)$ равна нулю;

при $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ $f(x) = f_1(x)$.

Таким образом, $y = \dfrac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$ — периодическая функция с основным периодом $T_0 = \pi$ на $(-\infty; \infty)$.

в) Можно доказать, что $T_0 = \pi$ — основной периодю Для этого преобразуем $y = \dfrac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} = \dfrac{2\sin 2x}{3-\cos 2x}$.

Из $\dfrac{2\sin 2(x+T)}{3-\cos 2(x+T)} = \dfrac{2\sin 2x}{3-\cos 2x}$ после преобразований следует $T = \pi k$, и $T_0 = \pi$.

3) $y = \cos x \cdot \cos\left(\sqrt{2}x\right)$.

Так как $y = \cos x$ — периодическая ($T_0 = 2\pi$) и $y = \cos\sqrt{2}x$ — периодическая ($T_0 = \sqrt{2}\pi$), и их периоды несоизмеримы, то по свойству 6 их произведение есть непериодическая функция.

4) $y = 3x + \sin 2x$.

Можно доказать, что

$y = 3x + \sin 2x \uparrow$ ($y' = 3 + 2\cos 2x > 0$), тогда по свойству 3 функция периодической не является.

5) $y = \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \cos 5x$.

$$y = \frac{1}{2}[\cos x - \cos 5x] \cdot \cos 5x = \frac{1}{2}\cos x \cdot \cos 5x - \frac{1}{2}\cos^2 5x =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 10x.$$

Так как для $A\cos(ax+b)+B$ основной период $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$, то:

$y_1 = \cos 6x$ — периодическая, $(T_0)_1 = \frac{\pi}{3}$;

$y_2 = \cos 4x$ — периодическая, $(T_0)_2 = \frac{\pi}{2}$;

$y_3 = \cos 10x$ — периодическая, $(T_0)_3 = \frac{\pi}{5}$.

Очевидно, что наименьшим общим кратным этих основных периодов является число π, следовательно, в силу свойства 6 для исходной функции $T_0 = \pi$.

6) $y = \dfrac{1 - \cos 4x}{2\sin 2x} - (\sin x + \cos x)^2 + 1$.

$D(f)$: $\sin 2x \neq 0$; $x \neq \left\{\frac{\pi}{2}k\right\}$ — симметричное множество ($k \in \mathbb{Z}$).

$$y = \frac{2\sin^2 2x}{2\sin 2x} - \sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x + 1 =$$

$= \sin 2x - 1 - \sin 2x + 1 = 0$ на $D(f)$.

Итак, $y = \dfrac{1 - \cos 4x}{2\sin 2x} - (\sin x + \cos x)^2 + 1$ при $x \neq \frac{\pi}{2}k$ — постоянная, и $f(x+T) = f(x) = 0$.

Поэтому функция — периодическая с периодом, который находится только из условия на $D(f)$ — $T = \frac{\pi}{2}k$, и основной период $T_0 = \frac{\pi}{2}$.

7) $y = 3^{\sin\frac{x}{2}} + 2^{\operatorname{tg}\frac{x}{3}}$.

а) Рассмотрим $y_1 = 3^{\sin\frac{x}{2}}$. Это сложная функция. По свойству 5, учитывая периодичность $t = \sin\frac{x}{2}$, заключаем, что y_1 — периодическая функция.

Так как показательная функция $y_1 = 3^t$ — строго монотонная, то каждое свое значение она принимает только один раз. Значит, функция $y_1 = \sin\frac{x}{2}$ имеет основной период, совпадающий с основным периодом $t = \sin\frac{x}{2}$.

Основной период функций вида $y = A\sin(ax+b)+B$ (см. пример 1) равен $\frac{2\pi}{a}$.

Значит, для $t = \sin\frac{x}{2}$ $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

б) Аналогично рассуждая, получим, что функция $y_2 = 2^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}$ — периодическая с основным периодом $T_2 = 3\pi$ (для функций вида $y = A\operatorname{tg}(ax+b)+B$ основной период равен $\frac{\pi}{a}$ — см. примечание к примеру 1).

в) По свойству 6 $y = 3^{\sin\frac{x}{2}} + 2^{\operatorname{tg}\frac{x}{3}}$ — периодическая. Основной период ее равен $T_0 = \text{Н.О.К.}\,(T_1; T_2)$.

Таким образом, $T_0 = \text{Н.О.К.}\,(4\pi; 3\pi) = \boxed{12\pi}$.

8) $y = \frac{\sin 9x}{\sin 3x}$;

а) Пусть $y_1 = \sin 9x$. Очевидно, что это периодическая функция, основной период которой равен $T_1 = \frac{2\pi}{9}$.

б) Пусть $y_2 = \sin 3x$. Тогда $T_2 = \dfrac{2\pi}{3}$.

в) Так как $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{1}{3}$ (рациональное число), значит основные периоды y_1 и y_2 соизмеримы.

По свойству 6 исходная функция — периодическая.

г) Для нахождения основного периода $y = \dfrac{\sin 9x}{\sin 3x}$ используем формулу тройного аргумента:

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

$$y = \frac{\sin 9x}{\sin 3x} = \frac{3\sin 3x - 4\sin^3 3x}{\sin 3x} = 3 - 4\sin^2 3x.$$

При $\sin 3x \neq 0$; $x \neq \dfrac{\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z}$ $y = 3 - 4\sin^2 3x$ — периодическая.

5.8 $$y = 3 - 4\sin^2 3x = 3 - 4\cdot\frac{1-\cos 6x}{2} = 1 + 2\cos 6x.$$

Получили функцию вида $y = A\cos(ax+b) + B$.

Значит, $T_0 = \dfrac{2\pi}{6} = \boxed{\dfrac{\pi}{3}}$.

9) $y = \sin^2(\cos 2x)$;

а) $t = \cos 2x$ — периодическая с основным периодом $T_1 = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$. По свойству 5 сложная функция $y = \sin(\cos 2x)$ — периодическая.

5.8 б) $y = \sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$.

Для $y = \sin t$ основной период $T_2 = 2\pi$.

Для $y = \cos 2t$ основной период $T_3 = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

Значит, для $y = \sin^2 t$ основной период в два раза меньше, чем для $y = \sin t$.

в) $y = \sin(\cos 2x)$ — периодическая.

$t = \cos 2x$ имеет основной период $T_1 = \pi$, тогда

$y = \sin\big(\cos 2(x+\pi)\big) = \sin\big(\cos(2x+2\pi)\big) = \sin(\cos 2x)$.

Таким образом, $T_1 = \pi$ — основной период и для функции $y = \sin(\cos 2x)$.

г) Так как для $y = \sin^2(\cos 2x)$ основной период в два раза меньше основного периода $y = \sin(\cos 2x)$, то основной период для $y = \sin^2(\cos 2x)$ равен $T_0 = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$.

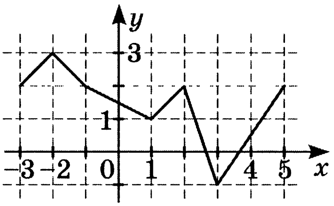
10) $y = \sqrt{\sin x} \cdot \sin\sqrt{x}$.

а) $y_1 = \sqrt{\sin x}$ — периодическая по свойству 5.

б) $y_2 = \sin\sqrt{x}$ — не периодическая, так как $t = \sqrt{x}$ — промежуточная не периодическая функция. Значит, свойство 5 не выполняется.
Можно использовать для доказательства непериодичности идеи примера 2 со страницы 264.

в) Значит, условия свойства 6 для $y = \sqrt{\sin x} \cdot \sin\sqrt{x}$ не выполняются, и $y = \sqrt{\sin x} \cdot \sin\sqrt{x}$ — не периодическая функция.

4. Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Ее период равен 8. График функции на отрезке $[-3; 5]$ изображен на рисунке. Найдите значение выражения $\dfrac{f(-10) \cdot f(-4)}{f(28)}$.



Из графика определим значения функции:

$f(-10) = f(-10 + 8) = f(-2) = 3;$

$f(-4) = f(-4 + 8) = f(4) = 0{,}5;$

$f(28) = f(28 - 3 \cdot 8) = f(4) = 0{,}5,$ значит

$$\frac{f(-10) \cdot f(-4)}{f(28)} = \frac{f(-2) \cdot f(4)}{f(4)} = \boxed{3}.$$

6

Обратные тригонометрические функции и их графики

Напомним некоторые теоретические положения.

Пусть $f(x)$ строго монотонная. Тогда каждое свое значение она принимает только один раз.

Обозначим $A = D(f)$ (область определения функции $f(x)$), $B = E(f)$ (область значений функции $f(x)$).

Для такой функции каждому значению из B можно сопоставить вполне определенное значение из A, т. е. установить функциональное соответствие между B и A, **обратное** функциональному соответствию f.

Итак, чтобы найти функцию, обратную монотонной функции $y = f(x)$, нужно поменять местами буквы x и y, написав $x = f(y)$ и найдя из полученного равенства y как из уравнения. Это и определит обратную функцию $y = g(x)$.

Свойства обратных функций

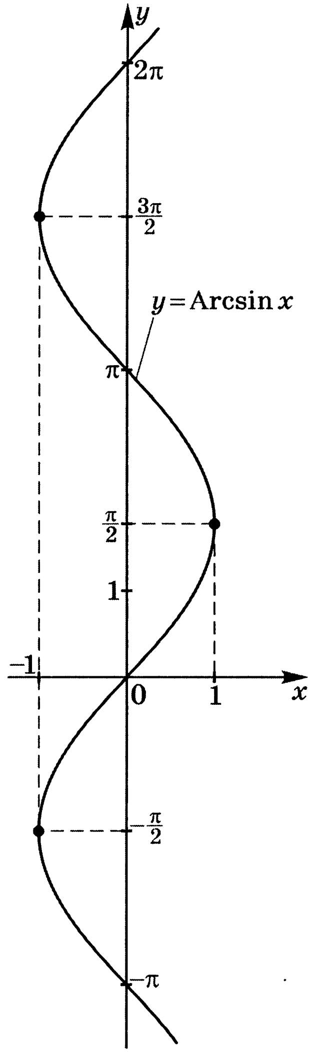
Если $y = f(x)$ — строго монотонная и $y = g(x)$ — обратная ей функция, то они имеют следующие свойства.

1. Функция $y = g(x)$ — также строго монотонная, причем характер монотонности сохраняется (если $y = f(x) \uparrow$, то $y = g(x) \uparrow$; если $y = f(x) \downarrow$, то $y = g(x) \downarrow$).

2. При переходе от функции $y = f(x)$ к обратной ей функции $y = g(x)$ области их определения и области их значений меняются местами, т. е. $D(f) = E(g)$ и $E(f) = D(g)$.

3. Графики взаимно-обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов — прямой $y = x$.

4. Для любого $x \in D(f)$ (принадлежащего области определения $y = f(x)$) справедливо соотношение $g(f(x)) = x$; и наоборот, для любого $x \in D(g)$ справедливо соотношение $f(g(x)) = x$.



Арксинус

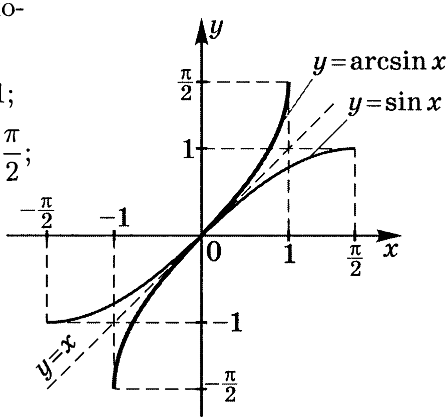
Рассмотрим функцию $y = \sin x$. $D(f) = (-\infty; \infty)$, на своей области определения она является кусочно-монотонной, но не монотонной, а значит обратное соответствие $y = \mathrm{Arcsin}\, x$ **функцией не является.**

Пусть $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На этом отрезке $y = \sin x$ строго монотонно возрастает и пробегает все значения из области значений синуса ($[-1; 1]$) только один раз, значит, для функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ существует обратная, которая обозначается $y = \arcsin x$, график которой симметричен графику функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ относительно прямой $y = x$.

Учитывая свойство взаимно-обратных функций, имеем

$\sin(\arcsin x) = x;\ -1 \leqslant x \leqslant 1;$

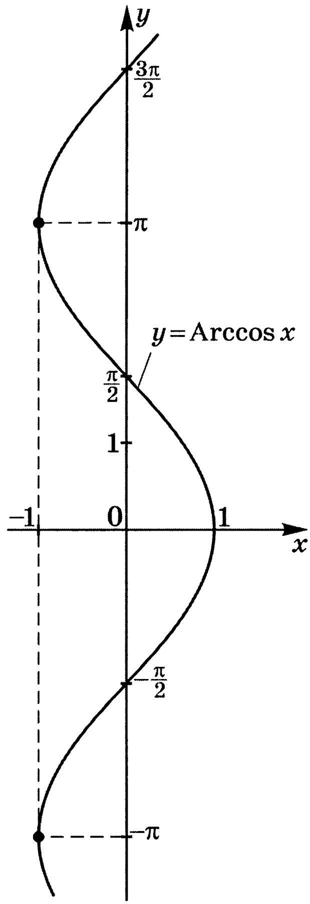
$\arcsin(\sin y) = y;\ -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2};$



Итак, подведем итоги:

1. $y = \arcsin x$ непрерывна и ограничена (в силу непрерывности и ограниченности $y = \sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$).
2. $D(\arcsin x) = [-1; 1]$, т. е. $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
3. $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, т. е. $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.
4. $y = \arcsin x$ является нечетной функцией: $D(\arcsin x)$ — симметричное множество, и $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
5. $\arcsin x > 0$ при $0 < x \leqslant 1$;
   $\arcsin x = 0$ при $x = 0$;
   $\arcsin x < 0$ при $-1 \leqslant x < 0$.
6. Функция $y = \arcsin x$ является строго возрастающей, т. е. из $1 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant -1$ следует $\arcsin x_1 \geqslant \arcsin x_2$ (в силу строгой монотонности $y = \sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$).
7. $y_{\text{наиб}} = y(1) = \frac{\pi}{2};\quad y_{\text{наим}} = y(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
8. $\arcsin\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\arcsin x_1 + \arcsin x_2}{2}$ при $0 > x_1 > x_2 > -1$ (выпуклость вверх);
   $\arcsin\frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\arcsin x_1 + \arcsin x_2}{2}$ при $1 > x_1 > x_2 > 0$ (выпуклость вниз).

Арккосинус

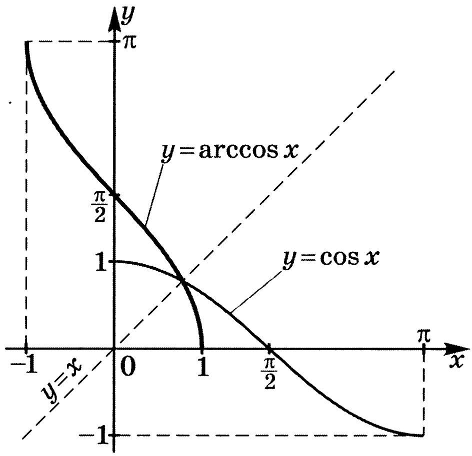


Рассмотрим функцию $y = \cos x$.
$D(f) = (-\infty; \infty)$, на своей области определения она является кусочно-монотонной, но не монотонной, а значит обратное соответствие $y = \mathrm{Arccos}\,x$ **функцией не является.**
Пусть $x \in [0; \pi]$. На этом отрезке $y = \cos x$ строго монотонно убывает и пробегает все значения из области значений косинуса ($[-1; 1]$) только один раз, значит, для функции $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ существует обратная, которая обозначается $y = \arccos x$, график которой симметричен графику функции $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ относительно прямой $y = x$.
Учитывая свойство взаимно-обратных функций, имеем

$\cos(\arccos x) = x;\ -1 \leqslant x \leqslant 1;$
$\arccos(\cos y) = y;\ 0 \leqslant y \leqslant \pi.$

Итак, подведем итоги:

1. $y = \arccos x$ непрерывна и ограничена (в силу непрерывности и ограниченности $y = \cos x$ на $[0; \pi]$).
2. $D(\arccos x) = [-1; 1]$, т.е. $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
3. $E(\arccos x) = [0; \pi]$, т.е. $0 \leqslant y \leqslant \pi$.
4. $y = \arccos x$ — функция общего вида в смысле четности, но ее график является центрально-симетричным относительно точки $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, т.е. $\dfrac{\pi}{2} - \arccos x = \arccos(-x) - \dfrac{\pi}{2}$, значит $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.



5. $\arccos x > 0$ при $-1 \leqslant x < 1$;
$\arccos x = 0$ при $x = 1$.

6. Функция $y = \arccos x$ является строго убывающей, т. е. из $1 \geqslant x_1 > x_2 \geqslant -1$ следует $\arccos x_1 < \arccos x_2$ (в силу строгой монотонности $y = \cos x$ на $[0; \pi]$).

7. $y_{\text{наиб}} = y(-1) = \pi$; $y_{\text{наим}} = y(1) = 0$.

8. $\arccos \dfrac{x_1 + x_2}{2} < \dfrac{\arccos x_1 + \arccos x_2}{2}$ при $0 > x_1 > x_2 > -1$ (выпуклость вниз);

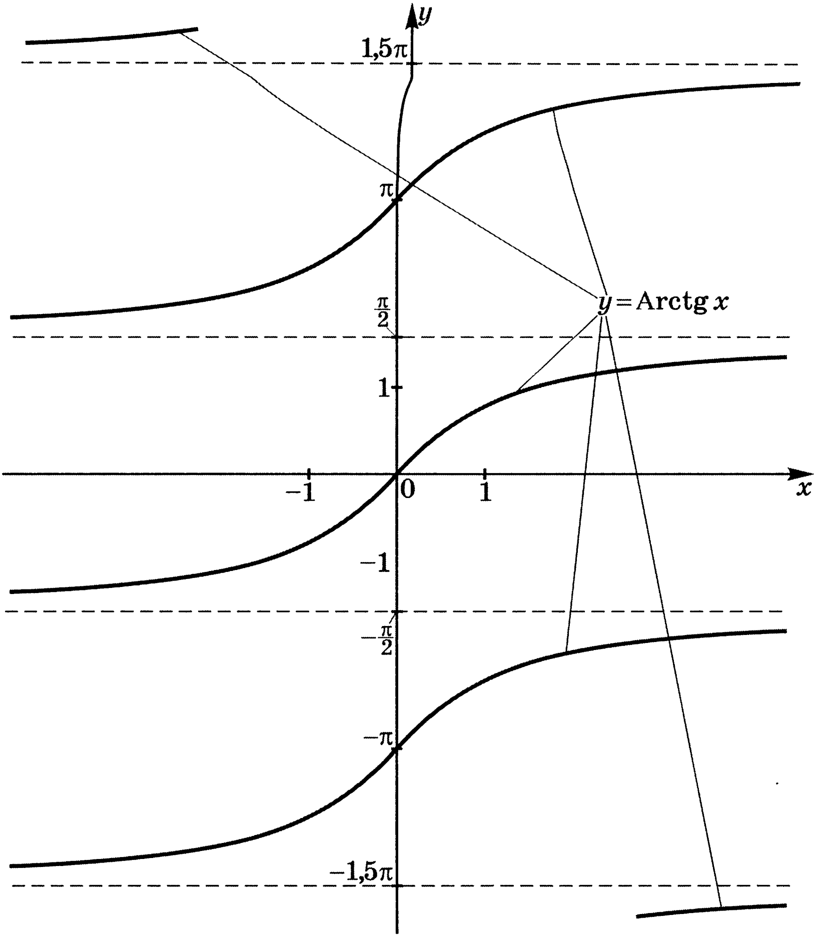
$\arccos \dfrac{x_1 + x_2}{2} < \dfrac{\arccos x_1 + \arccos x_2}{2}$ при $1 > x_1 > x_2 > 0$ (выпуклость вверх).

Арктангенс

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$.

$D(f)$: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, т. е. на своей области определения она является кусочно-монотонной, но не монотонной, а значит обратное соответствие $y = \operatorname{Arctg} x$ **функцией не является.**

Пусть $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. На этом отрезке $y = \operatorname{tg} x$ строго монотонно возрастает и пробегает все значения из области значе-

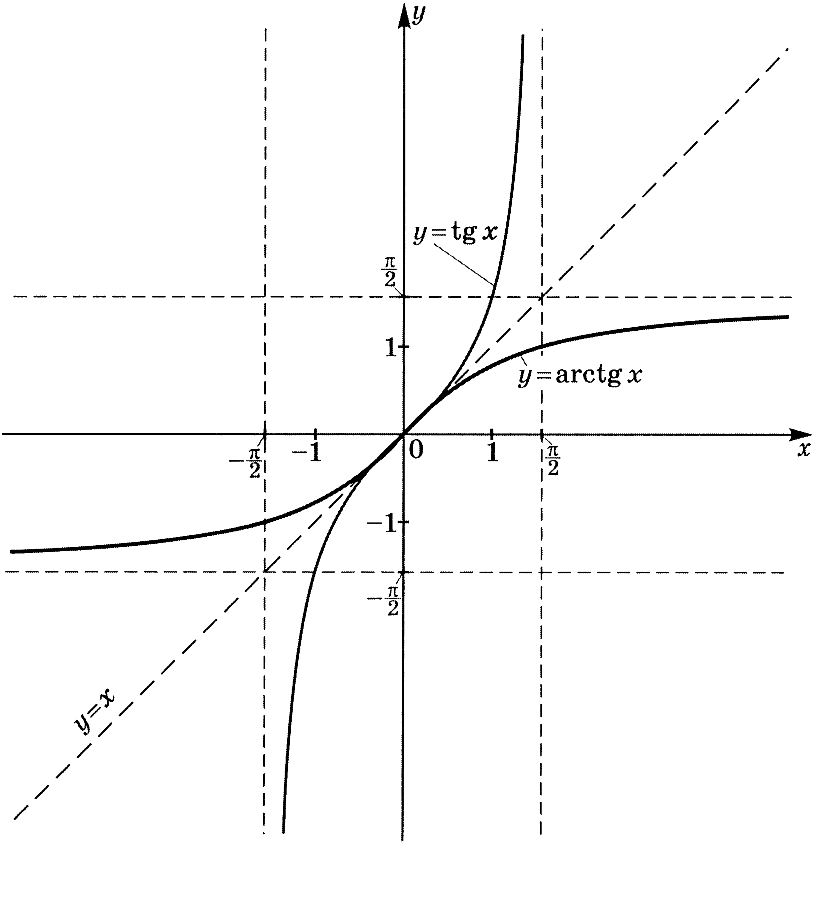


ний тангенса $(-\infty; \infty)$ только один раз, значит, для функции $y = \operatorname{tg} x$ на $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ существует обратная, которая обозначается $y = \operatorname{arctg} x$, график которой симметричен графику функции $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ относительно прямой $y = x$.

Учитывая свойство взаимно-обратных функций, имеем

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x; \ -\infty < x < \infty;$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y) = y; \ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}.$



Итак, подведем итоги:

1. $y = \operatorname{arctg} x$ непрерывна и ограничена (в силу непрерывности $y = \operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$).

2. $D(\operatorname{arctg} x) = (-\infty; \infty)$.

3. $E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

4. $y = \operatorname{arctg} x$ — нечетная функция, так как $D(\operatorname{arctg} x)$ — симметричное множество, и $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

5. $\operatorname{arctg} x > 0$ при $x > 0$;
   $\operatorname{arctg} x = 0$ при $x = 0$;
   $\operatorname{arctg} x < 0$ при $x < 0$.

6. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является строго возрастающей, т. е. из $x_1 > x_2$ следует $\operatorname{arctg} x_1 > \operatorname{arctg} x_2$ (в силу строгой монотонности $y = \operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$).

7. Наибольшего и наименьшего значения нет.

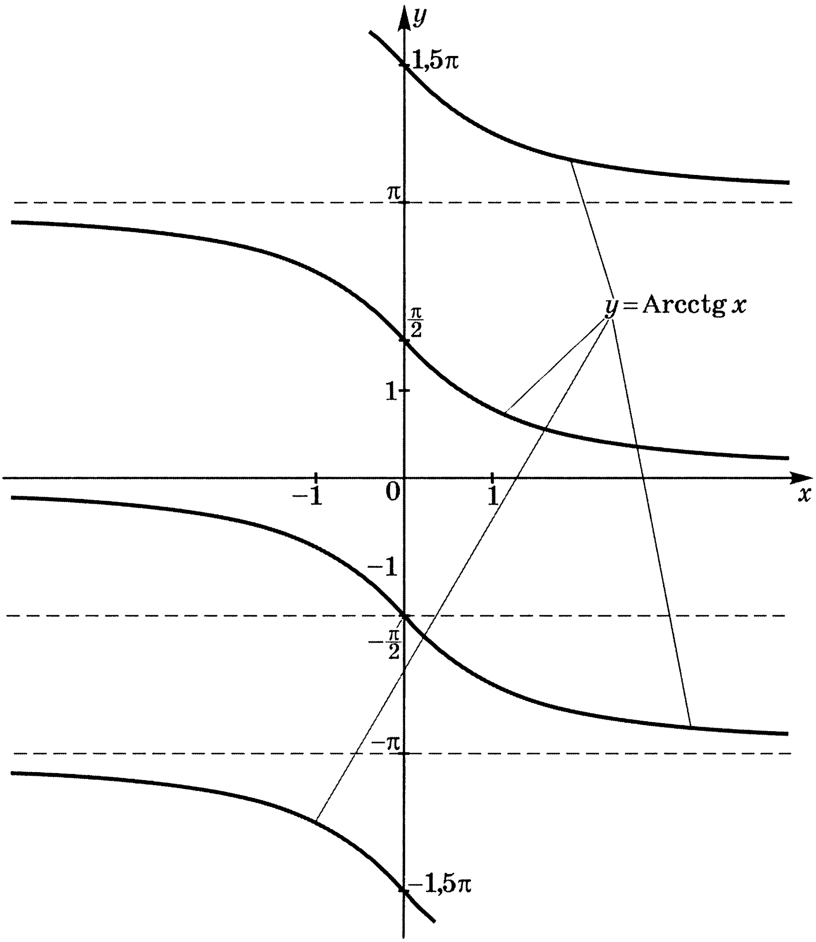
8. $\operatorname{arctg} \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2}{2}$ при $0 > x_1 > x_2 > -\infty$ (выпуклость вниз);

   $\operatorname{arctg} \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2}{2}$ при $\infty > x_1 > x_2 > 0$ (выпуклость вверх).

Арккотангенс

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{ctg} x$.
$D(f): \ x \neq \pi k$, т. е. на своей области определения она является кусочно-монотонной, но не монотонной, а значит обратное соответствие $y = \operatorname{Arcctg} x$ **функцией не является.**

Пусть $x \in (0; \pi)$. На этом отрезке $y = \operatorname{ctg} x$ строго монотонно убывает и пробегает все значения из области значений котангенса $(-\infty; \infty)$ только один раз, значит, для функ-

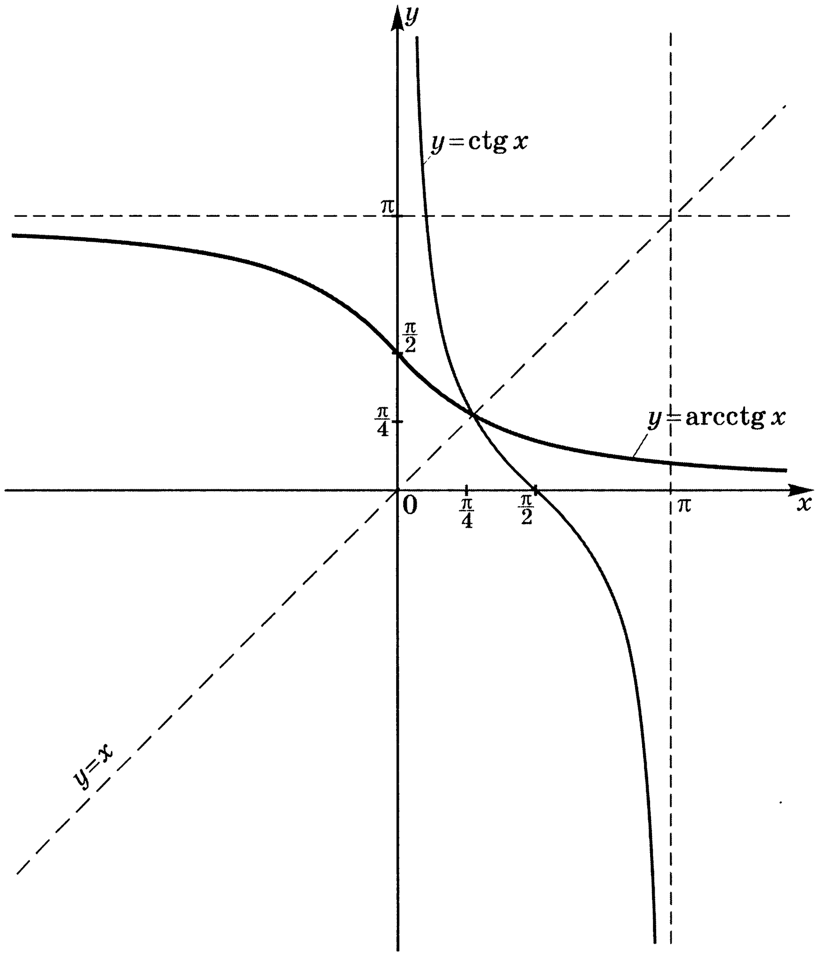


ции $y = \operatorname{ctg} x$ на $(0;\pi)$ существует обратная, которая обозначается $y = \operatorname{arcctg} x$, график которой симметричен графику функции $y = \operatorname{ctg} x$ на отрезке $(0;\pi)$ относительно прямой $y = x$.

Учитывая свойство взаимно-обратных функций, имеем

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x;\ -\infty < x < \infty;$

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} y) = y;\ 0 < y < \pi.$



Итак, подведем итоги:

1. $y = \operatorname{arcctg} x$ непрерывна и ограничена (в силу непрерывности $y = \operatorname{ctg} x$ на $(0; \pi)$).
2. $D(\operatorname{arcctg} x) = (-\infty; \infty)$.
3. $E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi)$.
4. $y = \operatorname{arcctg} x$ — функция общего вида в смысле четности, но ее график центрально-симметричен относительно точки $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, т. е. $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg}(-x) - \dfrac{\pi}{2}$.
   Значит $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.
5. $\operatorname{arcctg} x > 0 \quad \forall x \in (-\infty; \infty)$.
6. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ является строго убывающей, т. е. из $x_1 > x_2$ следует $\operatorname{arcctg} x_1 < \operatorname{arcctg} x_2$ (в силу строгой монотонности $y = \operatorname{ctg} x$ на $(0; \pi)$).
7. Наибольшего и наименьшего значения нет.
8. $\operatorname{arcctg} \dfrac{x_1 + x_2}{2} < \dfrac{\operatorname{arcctg} x_1 + \operatorname{arcctg} x_2}{2}$ при $0 > x_1 > x_2 > -\infty$ (выпуклость вверх);

   $\operatorname{arcctg} \dfrac{x_1 + x_2}{2} < \dfrac{\operatorname{arcctg} x_1 + \operatorname{arcctg} x_2}{2}$ при $\infty > x_1 > x_2 > 0$ (выпуклость вниз).

Практикум 12

Установите $D(y)$:

1) $y = \dfrac{\sqrt{\arcsin x}}{\log_2(1-3x)}$;

2) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\arccos(x-1)}$;

3) $y = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\arcsin(x-1)}$;

4) $y = \dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(4-x^2)}{\operatorname{arcctg} x - \frac{\pi}{4}}$;

5) $y = \dfrac{\operatorname{ctg} 2x \cdot \log_3(6+x-x^2)}{\operatorname{arctg}(2x^2-3x+1)}$;

6) $y = \dfrac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{arcctg} x}}$.

Решение практикума 12

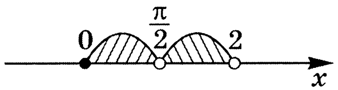
Установите $D(y)$:

1) $y = \dfrac{\sqrt{\arcsin x}}{\log_2(1-3x)}$.

$$\begin{cases} 0 \leqslant \arcsin x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1-3x > 0 \\ 1-3x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x < \dfrac{1}{3} \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D(y) = \left(0; \dfrac{1}{3}\right).$$

2) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\arccos(x-1)}$.

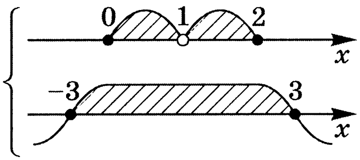
$$\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z} \\ -1 \leqslant x-1 \leqslant 1 \\ \arccos(x-1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x-1 \neq 1 \end{cases};$$



$$D(y) = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}; 2\right).$$

3) $y = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\arcsin(x-1)}$.

$$\begin{cases} -1 \leqslant x-1 \leqslant 1 \\ \arcsin(x-1) \neq 0 \\ 9-x^2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x-1 \neq 0 \\ (3-x)(3+x) \geqslant 0 \end{cases};$$



$D(y) = [0; 1) \cup (1; 2]$.

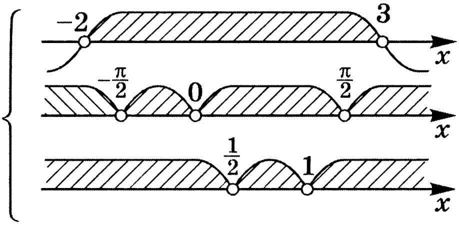
4) $y = \dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(4 - x^2)}{\operatorname{arcctg} x - \frac{\pi}{4}}$.

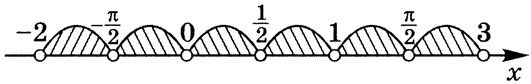
$$\begin{cases} 4 - x^2 > 0 \\ \operatorname{arcctg} x \neq \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x \neq 1 \end{cases};$$

$D(y) = (-2; 1) \cup (1; 2)$.

5) $y = \dfrac{\operatorname{ctg} 2x \cdot \log_3(6 + x - x^2)}{\operatorname{arctg}(2x^2 - 3x + 1)}$.

$$\begin{cases} 6 + x - x^2 > 0 \\ 2x \neq \pi k \\ 2x^2 - 3x + 1 \neq 0 \end{cases};$$





$$D(y) = \left(-2; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup$$
$$\cup \left(1; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; 3\right).$$

6) $y = \dfrac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{arcctg} x}}$;

$$\begin{cases} -1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1 \\ \operatorname{arcctg} x > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \forall x \ \ (\operatorname{arcctg} x \in (0\pi)) \end{cases};$$

$D(y) = [0; 1]$.

Свойства arc-функций и некоторые соотношения между ними

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$	8.1
$\arcsin(-x) = -\arcsin x$	8.2
$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$	8.3
$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$	8.4
$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$	8.5
$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$	8.6
$\arcsin x = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\arccos\sqrt{1-x^2}, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$	8.7
$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$	8.8
$\arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, & -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$	8.9
$\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$	8.10
$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geqslant 0 \\ -\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \leqslant 0 \end{cases}$	8.11
$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geqslant 0 \\ \pi - \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \leqslant 0 \end{cases}$	8.12
$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x} - \pi, & x < 0 \end{cases}$	8.13

Тригонометрические функции от arc-функций

Формулы	$D(y)$	
$\sin(\arcsin x) = x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	9.1
$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	9.2
$\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$-\infty < x < \infty$	9.3
$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$-\infty < x < \infty$	9.4
$\cos(\arccos x) = x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	9.5
$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	9.6
$\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$-\infty < x < \infty$	9.7
$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$-\infty < x < \infty$	9.8
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$	$-\infty < x < \infty$	9.9
$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{1}{x}$	$\forall x \neq 0$	9.10
$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$	9.11
$\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$-1 \leqslant x < 0$; $0 < x \leqslant 1$	9.12
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$	$-\infty < x < \infty$	9.13
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{x}$	$\forall x \neq 0$	9.14
$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$-1 \leqslant x < 0$; $0 < x \leqslant 1$	9.15
$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$	9.16

Практикум 13

1. Вычислите:

1) $\sin\left(\arccos\dfrac{3}{5}\right)$;

2) $\sin(\operatorname{arctg} 2)$;

3) $\cos\left(2\arcsin\dfrac{2}{5}\right)$;

4) $\cos(2\operatorname{arctg} 2)$;

5) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}\right) + \cos\left(\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}\right)$;

6) $\operatorname{tg}\left(\arccos\dfrac{3}{5} + \arcsin\dfrac{12}{13}\right)$;

2. Решите уравнения:

1) $\sin\left(\arcsin(2x^2+3x)\right) = 2x+3$;

2) $\cos(\arcsin x) = |x|$.

Решение практикума 13

1. Вычислите:

1) $\sin\left(\arccos\dfrac{3}{5}\right)=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\boxed{\dfrac{4}{5}}$. (см. табл. на стр. 301)

2) $\sin(\operatorname{arctg}2)=\dfrac{2}{\sqrt{1+2^2}}=\boxed{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$. (см. табл. на стр. 301)

3) $\cos\left(2\arcsin\dfrac{2}{5}\right)=$

$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$ **5.2**

$=1-2\sin^2\left(\arcsin\dfrac{2}{5}\right)=1-2\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=\boxed{\dfrac{17}{25}}$.

4) $\cos(2\operatorname{arctg}2)=$

$\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ **5.4**

$=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}2)}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}2)}=\dfrac{1-2^2}{1+2^2}=\boxed{-\dfrac{3}{5}}$.

5) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}\right)+\cos\left(\operatorname{arctg}2\sqrt{2}\right)=$

$\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$ **5.3**

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$ **1.5**

Так как $-\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<\dfrac{\pi}{2}$, то $\cos(\operatorname{arctg}x)>0$.

$=\dfrac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}\right)^2}}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{9}}+\dfrac{1}{3}=$

$=\dfrac{6}{10}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{28}{30}=\boxed{\dfrac{14}{15}}$. (см. табл. на стр. 301)

6) $\operatorname{tg}\left(\arccos\dfrac{3}{5}+\arcsin\dfrac{12}{13}\right)$. $\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}$ **4.5**

Обозначим $\alpha=\arccos\dfrac{3}{5}$; $\beta=\arcsin\dfrac{12}{13}$,

тогда (см. табл. на стр. 301)

$$\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}{\frac{3}{5}}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3};$$

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)=\frac{\frac{12}{13}}{\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}}=\frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}=\frac{12}{5};$$

и $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\frac{4}{3}+\frac{12}{5}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{12}{5}}=\dfrac{20+36}{15-48}=\dfrac{56}{-33}=\boxed{-1\dfrac{23}{33}}$.

2. Решите уравнения:

1) $\sin\left(\arcsin(2x^2+3x)\right)=2x+3$. $D(\text{У}):\ \begin{cases}|2x^2+3x|\leqslant 1\\ |2x+3|\leqslant 1\end{cases}$;

$2x^2+3x=2x+3$; $(x-1)(2x+3)=0$, значит

$\left[\begin{array}{l}x=1\notin D(\text{У}),\ \text{так как } |2\cdot 1^2+3\cdot 1|\leqslant 1 \text{ — ложь}\\ x=-1{,}5\in D(\text{У})\end{array}\right.$.

$x=-1{,}5\in D(\text{У})$, так как

$\begin{cases}|2\cdot(-1{,}5)^2+3\cdot(-1{,}5)|=0\leqslant 1\\ |2\cdot(-1{,}5)+3|=0\leqslant 1\end{cases}$ — истина.

Ответ: $x=-1{,}5$.

2) $\cos(\arcsin x)=|x|$;

$D(\text{У}):\ -1\leqslant x\leqslant 1$; (см. табл. на стр. 301)

$\sqrt{1-x^2}=|x|$, тогда $x^2=1-x^2$;

$\left((|x|)^2=x^2\right)$ $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Практикум 14

Решите уравнения:

1) $2\arcsin x + 3\arccos x = \pi$;

2) $2\arcsin x = \arcsin\sqrt{1-x^2}$;

3) $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 2\,\mathrm{arcctg}\,x = \dfrac{2\pi}{3}$;

4) $\mathrm{arcctg}\,x - 2\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\pi}{3}$;

5) $\arcsin x + \arcsin 2x = \dfrac{2\pi}{3}$;

6) $\arcsin x = 2\arcsin\left(x\sqrt{3}\right)$;

7) $\mathrm{arctg}(x-1) + \mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arctg}(x+1) = \mathrm{arctg}\,3x$;

8) $\arccos\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\pi}{2}\left(1-x^4\right)$;

9) $\arccos x + \arccos 2x = \arccos(3x-1)$.

Решение практикума 14

Решите уравнения:

1) $2\arcsin x + 3\arccos x = \pi$.

Так как $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$,

то $2(\arcsin x + \arccos x) + \arccos x = \pi$; $\quad \pi + \arccos x = \pi$;

отсюда $\arccos x = 0 \Rightarrow x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

2) $2\arcsin x = \arcsin\sqrt{1-x^2}$.

8.7 а) $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow \arcsin\sqrt{1-x^2} = \arccos x$;

$2\arcsin x - \arccos x = 0$, но $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

Решая как систему, получим $\arcsin x = \dfrac{\pi}{6}$, т. е. $x = \dfrac{1}{2}$.

б) $-1 \leqslant x \leqslant 0 \Rightarrow \arcsin\sqrt{1-x^2} = \pi - \arccos x$;

$2\arcsin x + \arccos x = \pi$, но $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

Решая как систему, получим $\arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$,

т. е. $x = 1 \notin [-1; 0]$.

Ответ: $x = \dfrac{1}{2}$.

3) $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 2\operatorname{arcctg} x = \dfrac{2\pi}{3}$.

8.11 а) $x \geqslant 0 \Rightarrow \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x$;

$\operatorname{arctg} x + 2\operatorname{arcctg} x = \dfrac{2\pi}{3}$, но $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

Решая как систему, получим $\operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{6}$, т. е. $x = \sqrt{3}$.

б) $x < 0 \Rightarrow \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\operatorname{arctg} x;$ **8.11**

$-\operatorname{arctg} x + 2\operatorname{arcctg} x = \dfrac{2\pi}{3}$, но $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$,

тогда, решая как систему, получим

$\operatorname{arcctg} x = \dfrac{7\pi}{18}$, т. е. $x = \operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{18} \notin (-\infty; 0)$.

Ответ: $x = \sqrt{3}$.

4) $\operatorname{arcctg} x - 2\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\pi}{3}$.

а) $x \geqslant 0 \Rightarrow \operatorname{arcctg} x = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}};$ **8.12**

(см. табл. на стр. 300)

$\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 2\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\pi}{3}$, но

$\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\pi}{2}$,

тогда, решая как систему, получим

$\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\pi}{18}$, значит $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos\dfrac{\pi}{18}$.

Тогда $\dfrac{1}{1+x^2} = \cos^2\dfrac{\pi}{18}$; $\quad \dfrac{1}{\cos^2\frac{\pi}{18}} = 1 + x^2$;

$$\frac{1-\cos^2\frac{\pi}{18}}{\cos^2\frac{\pi}{18}} = x^2; \quad \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{18} = x^2; \quad \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{18} \\ x = -\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{18} \notin [0; +\infty) \end{array}\right. .$$

б) $x < 0$, тогда $\operatorname{arcctg} x = \pi - \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}};$ **8.12**

(см. табл. на стр. 300)

$\pi - \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 2\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\pi}{3}$, но $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{\pi}{2}$,

значит $\pi-\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{5\pi}{6}$;

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\pi}{6};\quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \frac{1}{1+x^2}=\frac{3}{4};$$

$$1+x^2=\frac{4}{3};\quad x^2=\frac{1}{3};\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\notin(-\infty;0) \\ x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{18}\right\}$.

5) $\arcsin x+\arcsin 2x=\dfrac{2\pi}{3}$.

$\arcsin 2x=\dfrac{2\pi}{3}-\arcsin x$, тогда

$\sin(\arcsin 2x)=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\arcsin x\right)$;

$2x=\sin\dfrac{2\pi}{3}\cdot\cos(\arcsin x)-\cos\dfrac{2\pi}{3}\cdot\sin(\arcsin x)$.

Так как $\arcsin x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, то $\cos(\arcsin x)\geqslant 0$,

тогда $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.

Уравнение примет вид $2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{2}x$;

$$3x=\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geqslant 0 \\ 9x^2=3-3x^2 \end{cases};\quad \begin{cases} x\geqslant 0 \\ x^2=\dfrac{1}{4} \end{cases};\quad x=\frac{1}{2}.$$

Проверка подтверждает, что $x=\dfrac{1}{2}$ — корень уравнения.

Ответ: $x=\dfrac{1}{2}$.

6) $\arcsin x = 2\arcsin\left(x\sqrt{3}\right)$.

$\sin(\arcsin x) = \sin\left(2\arcsin(x\sqrt{3})\right)$ (см. табл. на стр. 301);

так как $\cos\left(\arcsin(x\sqrt{3})\right) = \sqrt{1-3x^2}$ и

$\sin\left(2\arcsin(x\sqrt{3})\right) = 2\sin\left(\arcsin(x\sqrt{3})\right)\cdot\cos\left(\arcsin(x\sqrt{3})\right)$,

то $x = 2\cdot x\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-3x^2}$; $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2\sqrt{3-9x^2}=1 \end{array}\right.$;

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ 4(3-9x^2)=1 \end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\dfrac{11}{36} \end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{\sqrt{11}}{6} \\ x=-\dfrac{\sqrt{11}}{6} \end{array}\right..$$

Проверим:

а) $x = 0$; $\arcsin 0 = 2\arcsin(0\cdot\sqrt{3})$; $0 = 0$ — *истина.*

б) $x = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$; $\arcsin\dfrac{\sqrt{11}}{6} = 2\arcsin\dfrac{\sqrt{33}}{6}$;

так как $\dfrac{\sqrt{11}}{6} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(\dfrac{11}{36} < \dfrac{1}{2})$, то

$\arcsin\dfrac{\sqrt{11}}{6} < \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ $(y = \arcsin x \uparrow)$.

С другой стороны, $\dfrac{\sqrt{33}}{6} > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(\dfrac{33}{36} > \dfrac{1}{2})$, тогда

$\arcsin\dfrac{\sqrt{33}}{6} > \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

Таким образом, получим $\begin{cases} 2\arcsin\dfrac{\sqrt{33}}{6} > \dfrac{\pi}{2} \\ \arcsin\dfrac{\sqrt{11}}{6} < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, значит

уравнение при $x = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$ решения не имеет.

в) $x = -\dfrac{\sqrt{11}}{6}$; $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{11}}{6}\right) = 2\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{33}}{6}\right)$;

тогда $-\arcsin\dfrac{\sqrt{11}}{6} = -2\arcsin\dfrac{\sqrt{33}}{6}$,

т. е. $\arcsin\dfrac{\sqrt{11}}{6} = 2\arcsin\dfrac{\sqrt{33}}{6}$, но мы уже доказали, что это ложь.

Ответ: $x = 0$.

7) $\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x+1) = \operatorname{arctg} 3x$.

$\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg}(x+1) = \operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arctg} x$;

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg}(x+1)) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arctg} x)$;

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \text{ при } \begin{cases} \cos(\alpha+\beta) \neq 0 \\ \cos\alpha \neq 0 \\ \cos\beta \neq 0 \end{cases} \quad \text{4.5}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \text{ при } \begin{cases} \cos(\alpha-\beta) \neq 0 \\ \cos\alpha \neq 0 \\ \cos\beta \neq 0 \end{cases} \quad \text{4.6}$$

$$\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x-1)) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x+1))}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x-1)) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x+1))} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3x) - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3x) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)};$$

$$\frac{x - 1 + x + 1}{1 - (x-1)(x+1)} = \frac{3x - x}{1 + 3x \cdot x};$$

$$\frac{2x}{2 - x^2} = \frac{2x}{1 + 3x^2}; \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{4} \\ x^2 \neq 2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

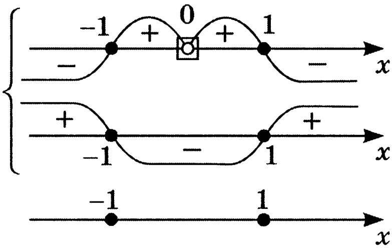
Проведя проверку, убеждаемся, что

$x = 0$, $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{1}{2}$ — корни.

Ответ: $\left\{-\dfrac{1}{2}; 0; \dfrac{1}{2}\right\}$.

8) $\arccos \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\pi}{2}\left(1 - x^4\right).$

$$\begin{cases} -1 \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \dfrac{\pi}{2}\left(1 - x^4\right) \leqslant \pi \end{cases}$$



Проверка показывает, что $x = -1$ и $x = 1$ — корни уравнения.

Ответ: $\{-1; 1\}$.

9) $\arccos x + \arccos 2x = \arccos(3x - 1).$

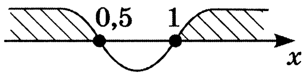
$$D(У): \begin{cases} |x| \leqslant 1 \\ |x| \leqslant \dfrac{1}{2} \\ |3x - 1| \leqslant 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{2}{3} \end{cases} \quad \left[0; \dfrac{1}{2}\right].$$

$\cos(\arccos x + \arccos 2x) = \cos(\arccos 3x - 1);$

$\cos(\arccos x) \cdot \cos(\arccos 2x) - \sin(\arccos x) \cdot \sin(\arccos 2x) =$
$= 3x - 1;$

$x \cdot 2x - \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - 4x^2} = 3x - 1;$

$$2x^2 - 3x + 1 = \sqrt{(1 - x^2)(1 - 4x^2)} \Leftrightarrow \left\| \; 2x^2 - 3x + 1 \geqslant 0 \right.$$



условие равносильности.

Но $D(У) = \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$, значит корни должны $\in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

$(x - 1)^2(2x - 1)^2 = (1 - x^2)(1 - 4x^2);$

$(x - 1)(2x - 1)(2x^2 - 3x + 1 - 2x^2 - 3x - 1) = 0;$

$$(x - 1)(2x - 1) \cdot 6x = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \notin D(У) \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = 0 \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{0; \dfrac{1}{2}\right\}$.

Тренировочная работа 17

Вычислите:

1) $\sqrt{6}\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}\right)$;

2) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{1}{2}\right)$;

3) $\sin\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right)$;

4) $\frac{1}{\pi}\left[\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$;

5) $\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$;

6) $\frac{1}{\pi}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{7}{23}\right)$;

7) $\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{5}\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{5}\right)$;

8) $\cos(2\operatorname{arctg}7)-\sin(4\operatorname{arctg}3)$;

9) $\sin^2[\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}(-0{,}5)]$;

10) $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{11}{75}$;

11) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-\sin\left(4\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$;

12) $\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}-\operatorname{arctg}x\right)$ при $x=\sqrt{168}$.

Решение тренировочной работы 17

Вычислите:

1) $$\sqrt{6}\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}\right) = \sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{1+\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)}{2}} =$$

$$= \sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)}}{2}} = \sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{9}}}{2}} =$$

$$= \sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{2\cdot 3}} = \sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2\cdot 3}} =$$

$$= \sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2\cdot 3}} = \sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\cdot 3}} = \boxed{\sqrt{2}-1}.$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}\right) > 0, \text{ так как } \arcsin\frac{1}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

2) $$\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{1}{2}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\arccos\frac{1}{2}\right)};$$

$$\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right) = \frac{\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)}{\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{1}{2}\right)}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

$$\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{1}{2}\right) = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \boxed{-\sqrt{3}}.$$

$$\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right) > 0 \quad \arccos\frac{1}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

или $$\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \boxed{-\sqrt{3}}.$$

3) $\sin\left(2\arcsin\dfrac{4}{5}\right) =$

$= 2\sin\left(\arcsin\dfrac{4}{5}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\dfrac{4}{5}\right) =$

$= 2\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = 2\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{24}{25} = \boxed{0{,}96}.$

$\cos\left(\arcsin\dfrac{4}{5}\right) \geqslant 0$, так как $\arcsin x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4) $\dfrac{1}{\pi}\left[\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$

Так как $\arcsin(-m) = -\arcsin m$; $\arccos(-m) = \pi - \arccos m$,

то $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\pi}{4}$;

$\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}.$

Значит, $\dfrac{1}{\pi}\left[\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] =$

$= \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \boxed{0{,}5}.$

Примечание. Можно проще, если знать тождество $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$ при любом $x \in [-1; 1]$.

5) $\operatorname{tg}\left[\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{5} - 2\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right].$

Пусть $\arccos\dfrac{3}{5} = \alpha$; $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$; $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

$\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \beta$; $\operatorname{ctg}\beta = -\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

Тогда $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2} - 2\beta\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}2\beta}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}2\beta}.$

а) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \dfrac{4}{5} \quad (\sin\alpha > 0)$.

Значит $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{2}$.

б) $\operatorname{tg}2\beta = \dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}$;

так как $\operatorname{ctg}\beta = -\dfrac{1}{2}$, то $\operatorname{tg}\beta = -2$.

Значит $\operatorname{tg}2\beta = \dfrac{2\cdot(-2)}{1-(-2)^2} = \dfrac{4}{3}$.

в) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2} - 2\beta\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}2\beta}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}2\beta} = \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{4}{3}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}} = \dfrac{\frac{3-8}{6}}{\frac{6+4}{6}} = -\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\operatorname{tg}\left[\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{5} - 2\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right] = -\dfrac{1}{2}$.

6) $\dfrac{1}{\pi}\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg}\dfrac{7}{23}\right)$.

а) Пусть $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} = \alpha$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{4}$;

$\operatorname{arctg}\dfrac{7}{23} = \beta$; $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{7}{23}$.

б) $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$;

$\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\cdot\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{8}{15}$.

Значит $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta) = \dfrac{\frac{8}{15}+\frac{7}{23}}{1-\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{23}} = \dfrac{23\cdot 8 + 7\cdot 15}{15\cdot 23 - 8\cdot 7} = \dfrac{289}{289} = 1$.

$$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

$$0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{4} < \operatorname{arctg}\frac{7}{23} < \frac{\pi}{4},$$

тогда $0 < 2\alpha + \beta < \dfrac{3\pi}{4}$, значит $2\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$.

Следовательно, $\dfrac{1}{\pi}\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg}\dfrac{7}{23}\right) = \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{4}$.

Ответ: $\dfrac{1}{\pi}\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg}\dfrac{7}{23}\right) = 0{,}25$.

7) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{11\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{5}\right) + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{11\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{5}\right)$.

Пусть $\arccos\dfrac{2}{5} = \alpha$; $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$; $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$.

а) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{11\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\frac{11\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{11\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 1}$.

б) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{11\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1 + \operatorname{tg}\frac{11\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{11\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} =$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{-1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 1}.$$

в) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}; \quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

г) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{11\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1+\frac{\sqrt{21}}{7}}{\frac{\sqrt{21}}{7}-1}=\dfrac{7+\sqrt{21}}{\sqrt{21}-7}=$

$=-\dfrac{(7+\sqrt{21})^2}{28}=-\dfrac{49+21+14\sqrt{21}}{28}=-\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}.$

$\operatorname{ctg}\left(\dfrac{11\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\frac{\sqrt{21}}{7}-1}{\frac{\sqrt{21}}{7}+1}=\dfrac{\sqrt{21}-7}{\sqrt{21}+7}=$

$=-\dfrac{21+49-14\sqrt{21}}{28}=-\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}.$

д) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{11\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{11\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=$

$=-\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}-\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}=-5.$

Ответ:

$ctg\left(\dfrac{11\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{5}\right)+ctg\left(\dfrac{11\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{5}\right)=-5.$

8) $\cos(2\operatorname{arctg}7)-\sin(4\operatorname{arctg}3)$.

а) $\operatorname{arctg}7=\alpha;\quad \operatorname{tg}\alpha=7;$

$\operatorname{arctg}3=\beta;\quad \operatorname{tg}\beta=3.$

б) $\cos 2\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};\quad \cos 2\alpha=\dfrac{1-7^2}{1+7^2}=-\dfrac{48}{50}=-\dfrac{24}{25}.$

в) $\sin 4\beta=2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta;$

$\sin 2\beta=\dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta};\quad \sin 2\beta=\dfrac{2\cdot 3}{1+3^2}=\dfrac{3}{5};$

$\cos 2\beta=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta};\quad \cos 2\beta=\dfrac{1-3^2}{1+3^2}=-\dfrac{4}{5}.$

Тогда $\sin 4\beta=2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{24}{25}.$

Значит $\cos 2\alpha-\sin 4\beta=-\dfrac{24}{25}-\left(-\dfrac{24}{25}\right)=0.$

Ответ: $\cos(2\operatorname{arctg}7)-\sin(4\operatorname{arctg}3)=0.$

9) $\sin^2[\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg}(-0{,}5)]$.

а) $\operatorname{arctg} 3 = \alpha$; $\quad \operatorname{tg}\alpha = 3$;

б) $\operatorname{arctg}(-0{,}5) = \beta$; $\quad \operatorname{tg}\beta = -0{,}5$;

в) $\sin^2\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$;

г) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$;

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{3-(-0{,}5)}{1+3\cdot(-0{,}5)} = \frac{3{,}5}{1-1{,}5} = \frac{3{,}5}{-0{,}5} = -7;$$

д) тогда $\sin^2(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta)}$,

т. е. $\sin^2(\alpha-\beta) = \dfrac{(-7)^2}{1+(-7)^2} = \dfrac{49}{50} = 0{,}98$.

Ответ: $\sin^2[\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg}(-0{,}5)] = 0{,}98$.

10) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg}\dfrac{11}{75}$.

Пусть $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg}\dfrac{11}{75} = x$;

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{11}{75}\right) = \operatorname{tg}\left(x - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right).$$

а) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg}\dfrac{11}{75}\right) =$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{11}{75}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{11}{75}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}+\frac{11}{75}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{11}{75}} = \frac{75+44}{300-11} = \frac{119}{289} = \frac{7}{17}.$$

б) $\operatorname{tg}\left(x - 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right)}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right)} =$

$$\left[\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{tg} x - \frac{5}{12}}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \frac{5}{12}} = \frac{12\operatorname{tg} x - 5}{12 + 5\operatorname{tg} x}.$$

в) $\dfrac{7}{17} = \dfrac{12\operatorname{tg} x - 5}{12 + 5\operatorname{tg} x}$;

$7 \cdot (12 + 5\operatorname{tg} x) = 17 \cdot (12\operatorname{tg} x - 5)$;

$7 \cdot 12 + 5 \cdot 17 = (12 \cdot 17 - 7 \cdot 5)\operatorname{tg} x$;

$169 = 169\operatorname{tg} x; \quad \operatorname{tg} x = 1; \quad x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,$

значит $x = \dfrac{\pi}{4}$.

$$\begin{array}{lcl}
0 < & \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} & < \dfrac{\pi}{4} \\
0 < & 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} & < \dfrac{\pi}{2} \\
0 < & \operatorname{arctg}\dfrac{11}{75} & < \dfrac{\pi}{4} \\
\hline
\multicolumn{3}{l}{0 < \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg}\dfrac{11}{75} < \pi.}
\end{array}$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg}\dfrac{11}{75} = \dfrac{\pi}{4}$.

11) $\cos\left(2\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) - \sin\left(4\arccos\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

а) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) =$

$$= 1 - 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

б) $\sin\left(4\arccos\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right) =$

$$= 2\sin\left(2\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\cdot\cos\left(2\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right) =$$

$$= 4\sin\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\cdot\cos\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\times$$

$$\times\left(2\cos^2\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)-1\right) =$$

$$= 4\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{3}{10}\right)}\cdot\frac{3}{10}\cdot\left(2\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2-1\right) =$$

$$= 4\sqrt{1-\frac{9}{10}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\left(\frac{2-9}{10}-1\right) = 4\cdot\frac{1}{10}\cdot 3\left(\frac{8}{10}\right) = \frac{24}{25}.$$

Значит,

$$\cos\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-\sin\left(4\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{5}-\frac{24}{25} = \boxed{-\frac{9}{25}}.$$

12) $\dfrac{4}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}-\operatorname{arctg}x\right)$ при $x=\sqrt{168}$.

а) Пусть $\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}=\alpha$; $\quad \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1+x}{1-x}$.

При $x=\sqrt{168}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha<0$, т. е. $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$.

б) $\operatorname{arctg}x=\beta$; $\quad \operatorname{tg}\beta=x$; так как $x=\sqrt{168}$, то $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$.

Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{1+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\beta}=$

$$= \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right).$$

Значит, $\left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\pi}{4} + \beta \\ \alpha = \dfrac{\pi}{4} + \beta + \pi \\ \alpha = \dfrac{\pi}{4} + \beta - \pi \end{array}\right.$. Проверим:

1. $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{4} + \beta < 0$; $-\dfrac{3\pi}{4} < \beta < -\dfrac{\pi}{4}$, но $\beta \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{4} + \beta + \pi < 0$;

$-\dfrac{3\pi}{2} < \beta < -\dfrac{5\pi}{4}$ — также невозможно $\left(0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$;

3. $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{4} + \beta - \pi < 0$; $\dfrac{\pi}{4} < \beta < \dfrac{3\pi}{4}$, и $\beta \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Тогда $\alpha = \beta - \dfrac{3\pi}{4}$. Учтем, что $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right) \subset \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

в) $\dfrac{4}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x} - \operatorname{arctg} x\right) = \dfrac{4}{\pi}\left(\beta - \dfrac{3\pi}{4} - \beta\right) =$

$= \dfrac{4}{\pi} \cdot \left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -3.$

Ответ: $\dfrac{4}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x} - \operatorname{arctg} x\right) = -3$ при $x = \sqrt{168}$.

Примечание. Можно иначе, если знать, что $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - \pi k$. Остается убедиться, что только при $k = 1$ все условия будут выполняться.

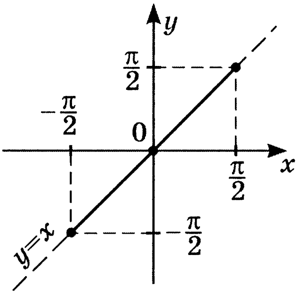
Графики arc-функций

1. Рассмотрим функцию $y = \arcsin(\sin x)$.

   Так как $y = \sin x$ — функция периодическая, где $T_0 = 2\pi$ на всей числовой оси, то $y = \arcsin(\sin x)$ также периодическая с основным периодом $T_0 = 2\pi$.

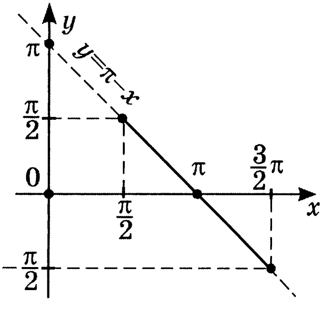
   Значит для исследования поведения функции и построения графика $y = \arcsin(\sin x)$ достаточно рассмотреть функцию на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$, длина которого равна 2π, причем по определению $\arcsin(\sin x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] = E(\arcsin(\sin x))$.

   1) Пусть $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ на этом промежутке $y = \sin x$ *монотонно* возрастает и имеет обратную ей функцию, тогда $y = \arcsin(\sin x) = x$.



   2) С другой стороны, $\sin(\pi - x) = \sin x$.

   Тогда, если $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$, т. е. на $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ $y = \sin x$ *монотонно* убывает, а значит имеет обратную ей функцию $y = \arcsin(\sin x) = \pi - x$, причем $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] = E(\arcsin(\sin x))$.



Итак на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ мы рассмотрели характер поведения и график функции $y = \arcsin(\sin x)$, и, учитывая основной период $T_0 = 2\pi$, можно говорить о поведении и графика функции на любом промежутке.

Подводя итоги, отметим, что так как

$\arcsin(\sin x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то именно из-за этого условия

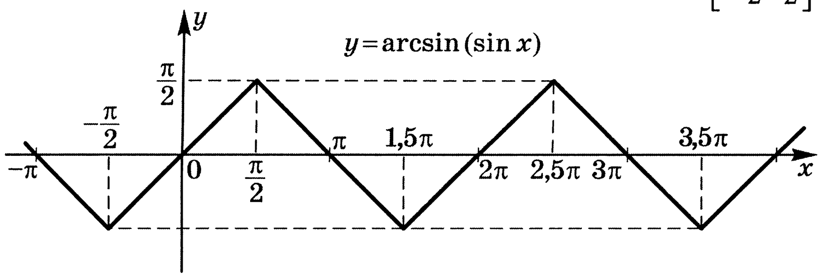
1) Так как $\arcsin(\sin x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то

при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi k$,

где $x - 2\pi k \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right]$

$\arcsin(\sin x) = \pi - x - 2\pi k$, где $\pi - x - 2\pi k \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$



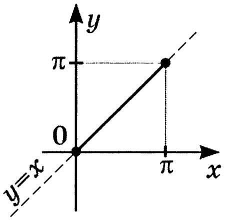
Функция имеет аналитический вид

$y = \arcsin(\sin x) = (-1)^k x + \pi k$, где $-\frac{\pi}{2} + \pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi k$.

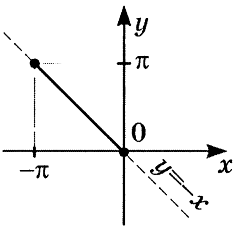
2. Рассмотрим функцию $y = \arccos(\cos x)$. Рассуждая аналогично, получаем, что данная функция периодическая с периодом $T_0 = 2\pi$. Поэтому достаточно рассмотреть ее на $[-\pi; \pi]$.

1) Пусть $x \in [0; \pi]$ на этом промежутке $y = \cos x$ *монотонно* убывает и имеет обратную ей функцию, тогда $y = \arccos(\cos x) = x$,

   причем $\arccos(\cos x) \in [0; \pi] = E(\arccos(\cos x))$.



2) С другой стороны, $y = \cos x$ — четная функция, т. е. $\cos(-x) = \cos x$, тогда если $-x \in [0; \pi]$, то $x \in [-\pi; 0]$ т. е. на $[-\pi; 0]$ $y = \cos x$ *монотонно* возрастает, а значит имеет обратную функцию $y = \arccos(\cos x) = -x$, причем $-x \in [0; \pi] = E(\arccos(\cos x))$.

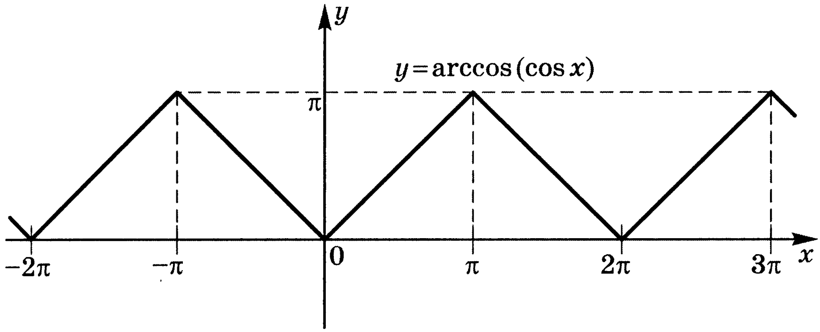


Итак, на $[-\pi; \pi]$ мы рассмотрели характер поведения и график функции $y = \arccos(\cos x)$ и учитывая основной период $T_0 = 2\pi$ можно судить о поведении и графике функции на любом промежутке.

Подводя итоги отметим, что так как $\arccos(\cos x) \in [0; \pi]$, то

1) при $x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k]$ $\arccos(\cos x) = x - 2\pi k$

2) при $x \in [-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$ $\arccos(\cos x) = -x + 2\pi k$



Функция имеет аналитический вид

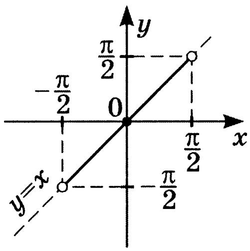
$y = \arccos(\cos x) = |x - 2\pi k|$,

где $\pi(2k-1) \leqslant x \leqslant \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

Так как $y = \operatorname{tg} x$ — функция непрерывная, где $T_0 = \pi$ на всей числовой оси, то $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ — периодическая с основным периодом $T_0 = \pi$, значит для исследования поведения функции и построения графика $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ достаточно рассмотреть функцию на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, причем по определению $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) = E(\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x))$.

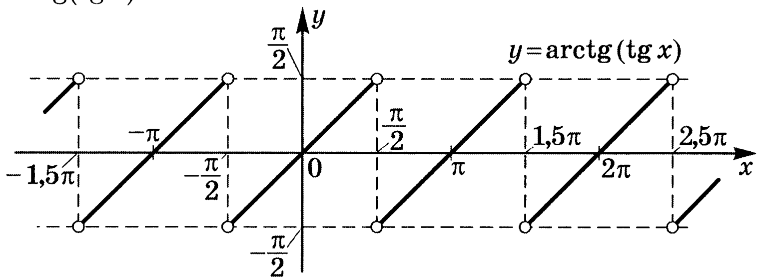
Пусть $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На этом промежутке $y = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастает и имеет обратную функцию, тогда $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$.



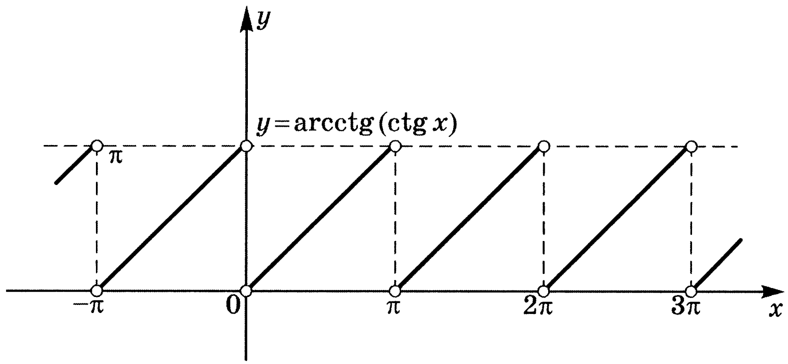
Итак на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ мы рассмотрели характер поведения и график функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ и учитывая основной период $T_0 = 2\pi$ можно говорить о поведении и графика функции на любом промежутке.

Подводя итоги отметим, что так как

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - \pi k$.



4. Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$. Рассуждая аналогично и учитывая, что $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) \in (0; \pi)$, получим, что при $x \in (\pi k; \pi + \pi k)$ $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x - \pi k$.



Практикум 15

1. Вычислите:

1) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3)$;

2) $\arcsin(\sin 2)$;

3) $\dfrac{1}{\pi}\arcsin\left(\sin\dfrac{29\pi}{5}\right)$;

4) $\arccos(\cos 4)$;

5) $\dfrac{7}{\pi}\arccos\left[\sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)\right]$;

6) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}(-3)\right)$;

7) $\dfrac{3}{\pi}\left[\arcsin x - \arcsin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}\right)\right]$ при $x = 0{,}1$;

8) $\dfrac{2}{\pi}\left[2\arcsin\sqrt{x} - \arcsin(2x-1)\right]$ при $x = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

2. Решите уравнения:

1) $\arcsin\left(\sin\dfrac{8\pi}{7}\right) = 2x - 1$;

2) $\arccos\left(-2\sin^2 x^2 + 1\right) = x$;

3) $\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2} = 2(\pi - 3)$;

4) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}(4x^2 - 10x - 10)\right) = x^2 - 3x$.

3. Найдите $E(y)$ (область изменения функции):

1) $y = \dfrac{1}{\pi}\left(\arcsin x - \arcsin\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)$;

2) $y = \dfrac{1}{\pi}\left(2\operatorname{arctg} x - \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$;

3) $y = \dfrac{1}{\pi}\left(2\arcsin x + \arccos\left(2x^2-1\right)\right)$;

4) $y = \dfrac{1}{\pi}\left(2\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$;

5) $y = \dfrac{3}{\pi}\left(2\arccos x - \arccos\left(4x^3 - 3x\right)\right)$.

Решение практикума 15

1. Вычислите:

1) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3)$.

Учтем, что $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - \pi k$ при $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$. Так как $3 \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ при $k = 0$, а $3 \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ при $k = 1$ (см. график), то $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3) = \boxed{3 - \pi}$.

2) $\arcsin(\sin 2)$.

Учтем, что $\arcsin(\sin x) =$

$$= \begin{cases} x - 2\pi k, & -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi - x + 2\pi k, & \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}.$$

Так как $2 \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ при $k = 0$, а $2 \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (см. график), то $\arcsin(\sin 2) = \boxed{\pi - 2}$.

3) $\frac{1}{\pi} \arcsin\left(\sin \frac{29\pi}{5}\right) = \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin\left(\sin\left(\frac{29\pi}{5}\right)\right) \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \frac{1}{\pi} \arcsin\left[\sin\left(6\pi - \frac{\pi}{5}\right)\right] = \frac{1}{\pi} \arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{5}\right) = \boxed{-0{,}2} \quad \left(-\frac{\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

4) $\arccos(\cos 4)$.

Учтем, что $\arccos(\cos x) =$

$$= \begin{cases} x - 2\pi k, & 2\pi k \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi k \\ -x + 2\pi k, & (2k-1)\pi \leqslant x \leqslant 2\pi k \end{cases} \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Так как $4 \notin [0; \pi]$ при $k = 0$, а $4 \in [\pi; 2\pi]$ (см. график), то $\arccos(\cos 4) = \boxed{2\pi - 4}$.

5) $\dfrac{7}{\pi}\arccos\left[\sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)\right] = \qquad \left(0 \leqslant \arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right) \leqslant \pi\right)$

$= \dfrac{7}{\pi}\arccos\left[\sin\left(\dfrac{5\pi}{14}-\dfrac{\pi}{2}\right)\right] = \dfrac{7}{\pi}\arccos\left(-\cos\dfrac{5\pi}{14}\right) =$

$= \dfrac{7}{\pi}\left[\pi - \arccos\left(\cos\dfrac{5\pi}{14}\right)\right] = \dfrac{7}{\pi}\left(\pi-\dfrac{5\pi}{14}\right) =$

$= \dfrac{7}{\pi}\cdot\dfrac{9\pi}{14} = \boxed{4{,}5} \qquad \left(\dfrac{5\pi}{14}\in[0;\pi]\right).$

6) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-3))$.

Учтем, что $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}x) = x-\pi k$ при $\pi k < x < \pi+\pi k$.

Так как $-3 \notin (0;\pi)$, а $-3 \in (-\pi;0)$ (см. график),

то $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-3)) = \boxed{-3+\pi}$.

7) $\dfrac{3}{\pi}\left[\arcsin x - \arcsin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}\right)\right]$ при $x=0{,}1$.

а) Пусть $\arcsin x = \alpha$; $\quad \sin\alpha = x$;

так как $x>0$, то $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ и $\cos\alpha>0$.

б) $\arcsin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}\right) = \beta$;

$\sin\beta = \dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}$;

так как $x>0$, то $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$.

Раз $\sin\alpha = x$, значит

$\sin\beta = \dfrac{1}{2}\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{2}\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha =$

$= \cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\sin\alpha+\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos\alpha = \sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$;

$\arcsin\left[\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\right] = \alpha+\dfrac{\pi}{3}$.

Так как $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi k$

при $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$,

значит $0 < \alpha + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{\pi}{2}$; $-\dfrac{\pi}{3} < \alpha < \dfrac{\pi}{6}$.

Так как $\left(-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{6}\right) \subset \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ $(k=0)$, то $\beta=\alpha+\dfrac{\pi}{3}$.

Так как $x = 0{,}1$, то $0 < 0{,}1 < \dfrac{1}{2}$ $(\arcsin 0{,}1 = \alpha)$,

значит $0 < \arcsin 0{,}1 < \arcsin \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$;

$0 < \arcsin 0{,}1 + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{\pi}{2}$, т. е. $0 < \alpha + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{\pi}{2}$.

в) $$\frac{3}{\pi}\left[\arcsin x - \arcsin\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}\right)\right] =$$
$$= \frac{3}{\pi}\left[\alpha - \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{3}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1.$$

Ответ: $\dfrac{3}{\pi}\left[\arcsin x - \arcsin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}\right)\right] = -1$.

8) $\dfrac{2}{\pi}\left[2\arcsin\sqrt{x} - \arcsin(2x-1)\right]$ при $x = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

а) Пусть $\arcsin\sqrt{x} = \alpha$; $\sin\alpha = \sqrt{x} > 0$,

значит, с учетом условий, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

б) Пусть $\arcsin(2x-1)=\beta$; $\sin\beta=2x-1$; при $x=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

$2x - 1 < 0$, значит $\sin\beta < 0$, т. е. $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$.

С другой стороны, $2x-1=2(\sqrt{x})^2-1=2\sin^2\alpha-1=$

$= -\cos 2\alpha$, т. е. $\sin\beta = -\cos 2\alpha = \sin\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Тогда $\sin\beta = \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, значит

$$\left[\begin{array}{l} \beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2} \\ \beta = \pi - \left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - 2\alpha \end{array}\right., \text{ но } -\frac{\pi}{2} < \beta < 0.$$

Тогда $\left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < 2\alpha - \frac{\pi}{2} < 0 \\ -\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} - 2\alpha < 0 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} 0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} < 2\alpha < 2\pi \end{array}\right.;$

$$\left[\begin{array}{l} 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi \end{array}\right., \text{ но } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ и } \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \subset \left(0; \frac{\pi}{2}\right),$$

значит $\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, $\frac{2}{\pi}\left[2\arcsin\sqrt{x} - \arcsin(2x-1)\right] =$

$$= \frac{2}{\pi}\left[2\alpha - \left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1.$$

Ответ: $\frac{2}{\pi}\left[2\arcsin\sqrt{x} - \arcsin(2x-1)\right] = 1$ при $x = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

2. Решите уравнения:

1) $\arcsin\left(\sin\frac{8\pi}{7}\right) = 2x - 1$.

$D(\text{У}):\ -\frac{\pi}{2} \leqslant 2x - 1 \leqslant \frac{\pi}{2};\quad \frac{2-\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{2+\pi}{4}$.

Так как $\arcsin(\sin x) =$

$$= \begin{cases} x - 2\pi k, & 2\pi k - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \pi - x + 2\pi k, & \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

и $\frac{8\pi}{7} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, то $\arcsin\left(\sin\frac{8\pi}{7}\right) = \pi - \frac{8\pi}{7}$, т. е. $\arcsin\left(\sin\dfrac{8\pi}{7}\right) = -\dfrac{\pi}{7}$,

значит $2x - 1 = -\dfrac{\pi}{7}$; $\quad x = \dfrac{-\pi+7}{14} \in D(У)$.

Ответ: $x = \dfrac{7-\pi}{14}$.

2) $\arccos\left(-2\sin^2 x^2 + 1\right) = x$.

$$D(У) = \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ -1 \leqslant -2\sin^2 x^2 + 1 \leqslant 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ -1 \leqslant \cos 2x^2 \leqslant 1 \end{cases};$$

$\arccos(\cos 2x^2) = x$; так как

$$\arccos x = \begin{cases} x - 2\pi k, & 2\pi k \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ -x + 2\pi k, & (2k-1)\pi \leqslant x \leqslant 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

и $0 \leqslant x \leqslant \pi$ при $k=0$, то $\arccos(\cos 2x^2) = 2x^2$, тогда

$$2x^2 = x; \quad \begin{cases} 2x^2 = x \\ 0 \leqslant 2x^2 \leqslant \pi \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ 0 \leqslant 2x^2 \leqslant \pi \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{0; \dfrac{1}{2}\right\}$.

3) $\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2} = 2(\pi - 3)$.

$D(У)$: $x \neq \pm 1$.

Пусть $x = \operatorname{tg}\alpha$, тогда $\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 2(\pi - 3)$;

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2\alpha) = 2(\pi - 3) \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$; $k = 0$ (см. график),

тогда $2\alpha - \pi k = 2(\pi - 3)$; $\quad \alpha = \pi - 3 + \dfrac{\pi}{2}k$.

а) Пусть $k = 2n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\alpha = \pi - 3 + \pi n$, значит

$x = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi - 3 + \pi n) = \operatorname{tg}(-3) = -\operatorname{tg} 3$,

т. е. $x = -\operatorname{tg} 3 \in D(\text{У})$.

б) Пусть $k = 2n - 1$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Тогда $\alpha = \pi - 3 + \pi n - \dfrac{\pi}{2}$, значит

$$x = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(-3 - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}(-3) = \operatorname{ctg} 3 \in D(\text{У}).$$

Ответ: $\{-\operatorname{tg} 3; \operatorname{ctg} 3\}$.

4) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(4x^2 - 10x - 10\right)\right) = x^2 - 3x$

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 4x^2 - 10x - 10 - \pi k = x^2 - 3x \\ \pi k < 4x^2 - 10x - 10 < \pi + \pi k \\ 0 < x^2 - 3x < \pi \end{cases}.$$

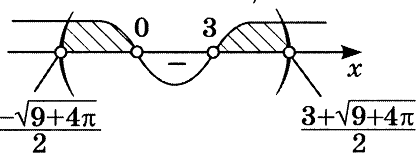
Тогда $3x^2 - 7x - 10 - \pi k = 0$, $x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{169 + 12\pi k}}{6}$.

а) При $k = 0$ $\left[\begin{array}{l} x = -1 \ \ \varphi(-1) = 4 \notin (0; \pi) \\ x = \dfrac{10}{3} \ \ \varphi\left(\dfrac{10}{3}\right) = 1\dfrac{1}{9} \in (0; \pi) \end{array}\right.$

(где $\varphi(k) = x^2 - 3x$).

Для $0 < x^2 - 3x < \pi$ $\quad x^2 - 3x - \pi = 0$;

$x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 4\pi}}{2}$.



б) При $k = 1$ $\quad 3x^2 - 7x - 10 - \pi = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7 + \sqrt{169 + 12\pi}}{6} \notin \left(3; \dfrac{\sqrt{9 + 4\pi}}{2}\right) \\ x = \dfrac{7 - \sqrt{169 + 12\pi}}{6} \notin \left(\dfrac{3 - \sqrt{9 + 4\pi}}{2}; 0\right) \end{array}\right..$$

Очевидно, что для $k \in \mathbb{N}$ корни не подходят условию $x \in \left(\dfrac{3 - \sqrt{9 + 4\pi}}{2}; 0\right) \cup \left(3; \dfrac{3 + \sqrt{9 + 4\pi}}{2}\right)$.

в) При $k=-1$ $\quad 3x^2-7x-10+\pi=0$;

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7+\sqrt{169-12\pi}}{6}\in\left(3;\dfrac{7+\sqrt{9+4\pi}}{2}\right) \\ x=\dfrac{7-\sqrt{169-12\pi}}{6}\in\left(\dfrac{3-\sqrt{9+4\pi}}{2};0\right) \end{array}\right..$$

г) При $k=-2$ $\quad 3x^2-7x-10+2\pi=0$;

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7+\sqrt{169-24\pi}}{6}\notin\left(3;\dfrac{3+\sqrt{9+4\pi}}{2}\right) \\ x=\dfrac{7-\sqrt{169-24\pi}}{2}\notin\left(\dfrac{3-\sqrt{9+4\pi}}{2};0\right) \end{array}\right..$$

Аналогично для любых $k<-2\,|\,k\in\mathbb{Z}$

(при $k<-4$ $\quad D<0$).

Ответ: $\left\{\dfrac{7-\sqrt{169-12\pi}}{6};\dfrac{7+\sqrt{169-12\pi}}{6};3\dfrac{1}{3}\right\}$.

3. Найдите $E(y)$.

1) $y=\dfrac{1}{\pi}\left(\arcsin x-\arcsin\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)$.

Пусть $\arcsin x=\alpha$; $\quad -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$; $\quad \sin\alpha=x$.

Тогда $\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sin\alpha-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sqrt{2}}=$

$$=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

а) $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\alpha-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$; $\quad -\dfrac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{3}{4}\pi$, $\quad \alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$,

значит на $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$ $\arcsin\left(\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\alpha-\dfrac{\pi}{4}$,

при этом $y=\dfrac{1}{\pi}\left(\alpha-\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=0{,}25$.

Итак, на $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$ $\quad y=0{,}25$.

б) $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant -\dfrac{\pi}{4}$, тогда $-\dfrac{3}{4}\pi \leqslant \alpha - \dfrac{\pi}{4} \leqslant -\dfrac{\pi}{2}$.

Так как $\arcsin(\sin x) =$

$$= \begin{cases} x - 2\pi k & \text{при } -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi - x + 2\pi k & \text{при } \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{2}\pi + 2\pi k \end{cases},$$

то зная, что $-\dfrac{3}{4}\pi \leqslant \alpha - \dfrac{\pi}{4} \leqslant -\dfrac{\pi}{2}$,

получим $\left[-\dfrac{3}{2}\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right] \subset \left[-\dfrac{3}{2}\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Значит, это второй случай при $k = -1$,
тогда $\arcsin(\sin x) = \pi - x - 2\pi = -\pi - x$,
т. е. $\arcsin\left(\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)\right) = -\pi - \alpha + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3}{4}\pi - \alpha.$

Отсюда следует, что
$$y = \frac{1}{\pi}\left(\alpha + \frac{3}{4}\pi + \alpha\right) = \frac{1}{\pi}\left(2\alpha + \frac{3}{4}\pi\right).$$

$f(\alpha)$ — возрастающая, тогда на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{4}\right]$:

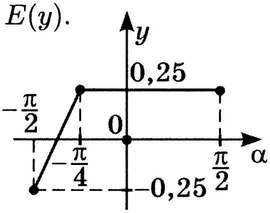
$$f_{\text{наим}} = \frac{1}{\pi}\left(2\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -0{,}25;$$

$$f_{\text{наиб}} = \frac{1}{\pi}\left(2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 0{,}25,$$

учитывая случай а).

Ответ: $E(y) = [-0{,}25; 0{,}25]$

График данной функции иллюстрирует исследование $E(y)$.



2) $y = \dfrac{1}{\pi}\left(2\operatorname{arctg} x - \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}\right).$

Пусть $\operatorname{arctg} x = \alpha$, где $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right).$

$x = \operatorname{tg}\alpha;\quad \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sin 2\alpha;$

$\arcsin(\sin 2\alpha) =$

$$= \begin{cases} 2\alpha - 2\pi k; & 2\pi k - \dfrac{\pi}{2} \leqslant 2\alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ (первый случай)} \\ \pi - 2\alpha; & \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant 2\alpha \leqslant \dfrac{3}{2}\pi + 2\pi k \text{ (второй случай)} \end{cases}.$$

а) $k = 0.$

$\arcsin(\sin 2\alpha) =$

$$= \begin{cases} 2\alpha; & \dfrac{\pi}{2} \leqslant 2\alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - 2\alpha; & \dfrac{\pi}{2} \leqslant 2\alpha \leqslant \dfrac{3}{2}\pi \end{cases} = \begin{cases} 2\alpha; & -\dfrac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{4} \\ \pi - 2\alpha; & \dfrac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{3}{4}\pi \end{cases}.$$

Учтем только, что $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Тогда

1. на $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$ $\quad y = \dfrac{1}{\pi}(2\alpha - 2\alpha) = 0;$

2. на $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\quad y = \dfrac{1}{\pi}\left(2\alpha - (\pi - 2\alpha)\right) =$

$= \dfrac{1}{\pi}(4\alpha - \pi) = y(\alpha).$

$y(\alpha)$ на $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ возрастающая линейная функция.

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\pi}\left(4\cdot\frac{\pi}{4} - \pi\right) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{\pi}\left(4\cdot\frac{\pi}{2} - \pi\right) = 1 \end{aligned},$$

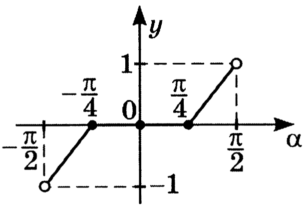
т. е. $y(\alpha) \in [0; 1)$ на $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right).$

б) при $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant -\frac{\pi}{4}$, т. е. $-\pi < 2\alpha \leqslant -\frac{\pi}{2}$, что возможно только при $k = -1$ во втором случае,
$\frac{\pi}{2} - 2\pi \leqslant 2\alpha \leqslant \frac{3}{2}\pi - 2\pi \quad -\frac{3}{2}\pi \leqslant 2\alpha \leqslant -\frac{\pi}{2}$.
Но $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \subset \left[-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$,
тогда $\arcsin(\sin 2\alpha) = -2\alpha - \pi$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$,
отсюда следует, что
$y(x) = \frac{1}{\pi}(2\alpha - (-2\alpha - \pi)) = \frac{1}{\pi}(4\alpha + \pi)$,
т. е. $y(\alpha)$ — возрастающая линейная функция.

$$\left.\begin{array}{l} y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\pi}\left(4 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \pi\right) = -1 \\ y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi}\left(4\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi\right) = 0 \end{array}\right|,$$

т. е. $y(\alpha) \in (-1; 0]$. Значит $E(y) = (-1; 1)$.

График иллюстрирует поведение данной функции.



3) $y = \frac{1}{\pi}\left(2\arcsin x + \arccos\left(2x^2 - 1\right)\right)$.

Пусть $\arcsin x = \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тогда $x = \sin\alpha$.

Значит $2x^2 - 1 = 2\sin^2\alpha - 1 = -\cos 2\alpha$;

$\arccos\left(2x^2 - 1\right) = \arccos(-\cos 2\alpha) = \pi - \arccos(\cos 2\alpha)$.

С другой стороны,

$$\arccos(\cos 2\alpha) = \begin{cases} 2\alpha - 2\pi k; & 2\pi k \leqslant 2\alpha \leqslant (2k+1)\pi \\ -2\alpha + 2\pi k; & (2k-1)\pi \leqslant 2\alpha \leqslant 2\pi k \end{cases}.$$

Так как $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, то

а) при $k = 0 \quad 0 \leqslant 2\alpha \leqslant \pi$,

значит на $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \quad \arccos(\cos 2\alpha) = 2\alpha$,

тогда $y(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}(2\alpha + \pi - 2\alpha) = 1$

(напомним, что $\arccos\left(2x^2 - 1\right) = \pi - \arccos(\cos 2\alpha)$).

б) Во втором случае при $k = 0 \quad -\pi \leqslant 2\alpha \leqslant 0$,

значит на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right] \quad \arccos(\cos 2\alpha) = -2\alpha$,

тогда на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$.

$y(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}(2\alpha + \pi - (-2\alpha)) = \dfrac{1}{\pi}(4\alpha + \pi)$, т. е.

$y(\alpha)$ на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$ возрастающая линейная функция.

$y_{\text{наиб}} = y(0) = \dfrac{1}{\pi}(4 \cdot 0 + \pi) = 1;$

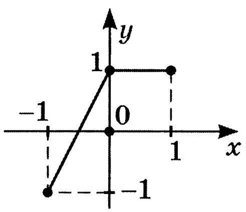
$y_{\text{наиб}} = y\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{\pi}\left(4\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \pi\right) = -1.$

Итак, подводя итоги, получим

на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \quad E(y) = [-1; 1]$;

$$D(y) : \begin{cases} |x| \leqslant 1 \\ \left|2x^2 - 1\right| \leqslant 1 \end{cases} \qquad |x| \leqslant 1.$$

График демонстрирует поведение данной функции.



4) $y = \dfrac{1}{\pi}\left(2\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}\right).$

Пусть $\operatorname{arctg} x = \beta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, тогда $x = \operatorname{tg}\beta$,

значит $\dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta} = \operatorname{tg}^2\beta.$

Отметим, что $\operatorname{arctg}(2\beta) = 2\beta - \pi k,$

где $2\beta \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right).$

Рассмотрим

а) при $k = 0 \quad -\dfrac{\pi}{2} < 2\beta < \dfrac{\pi}{2},$

тогда на $\left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right) \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2\beta) = 2\beta,$

значит на $\left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right) \quad y(\beta) = \dfrac{1}{\pi}(2\beta - 2\beta) = 0.$

б) при $k = 1 \quad \dfrac{\pi}{2} < 2\beta < \dfrac{3}{2}\pi,$

но $-\pi < 2\beta < \pi \; \left(\text{т. к. } -\dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right),$

значит $\dfrac{\pi}{2} < 2\beta < \pi.$

тогда на $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right) \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2\beta) = 2\beta - \pi.$

Отсюда следует, что

$y(\beta) = \dfrac{1}{\pi}(2\beta - (2\beta - \pi)) = 1$ на $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right).$

в) при $k = -1 \quad -\dfrac{3}{2}\pi < 2\beta < -\dfrac{\pi}{2},$

но $-\pi < 2\beta < \pi$, значит $-\pi < 2\beta < -\dfrac{\pi}{2}.$

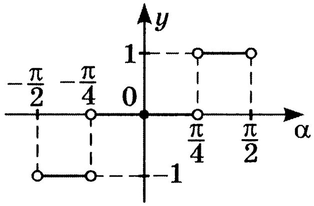
Отсюда следует, что на $\left(-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\operatorname{arctg}(2\beta) = 2\beta + \pi,$

тогда на $-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{4} \quad y(\beta = \dfrac{1}{\pi}(2\beta - (2\beta + 1)) = -1.$

Подводя итоги, получим $E(y) = \{-1; 0; 1\}$.

График демонстрирует поведение данной функции.



5) $y = \dfrac{3}{\pi}\left(\arccos x - \arccos\left(4x^3 - 3x\right)\right).$

Пусть $\arccos x = \beta$, где $\beta \in [0; \pi]$, тогда $x = \cos\beta$, значит $4x^3 - 3x = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta = \cos 3\beta$.

Так как $\arccos(\cos 3\beta) =$

$$= \begin{cases} 3\beta - 2\pi k; & 2\pi k \leqslant 3\beta \leqslant 2\pi k + \pi \\ -3\beta + 2\pi k; & 2\pi k - \pi \leqslant 3\beta \leqslant 2\pi k \end{cases}, \text{ то}$$

а) при $k = 0$ $\quad 0 \leqslant 3\beta \leqslant \pi$ в первом случае (второй случай $k = 0$ не подходит)

на $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$ $\quad \arccos(\cos 3\beta) = 3\beta$,

значит на $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$ $\quad y(\beta) = \dfrac{3}{\pi}(3\beta - 3\beta) = 0.$

б) Пусть $k = 1$ в первом случае $2\pi \leqslant 3\beta \leqslant 3\pi$,

тогда на $\left[\dfrac{2}{3}\pi; \pi\right]$ $\quad \arccos(\cos 3\beta) = 3\beta - 2\pi$,

значит на $\left[\dfrac{2}{3}\pi; \pi\right]$ $\quad \arccos(\cos 3\beta) = 3\beta - 2\pi$,

значит на $\left[\dfrac{\pi}{3}; \pi\right]$ $\quad y(\beta) = \dfrac{3}{\pi}(3\beta - 3\beta + 2\pi) = 6.$

в) При $k = 1$ во втором случае

на $\left[\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2}{3}\pi\right]$ $\quad \arccos(3\beta) = -3\beta + 2\pi$,

тогда на $\left[\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2}{3}\pi\right]$

$$y(\beta) = \frac{3}{\pi}(3\beta - (-3\beta + 2)) = \frac{3}{\pi}(6\beta - 2\pi).$$

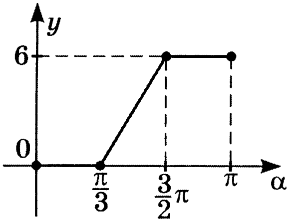
$y(\beta)$ на $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right]$ — возрастающая линейная функция.

$$y_{\text{наиб}} = y\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{3}{\pi}\left(6 \cdot \frac{2}{3}\pi - 2pi\right) = 6$$

$$y_{\text{наим}} = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{\pi}\left(6 \cdot \frac{\pi}{3} - 2\pi\right) = 0$$

Подводя итоги, получим $E(y) = [0; 6]$.

График иллюстрирует поведение данной функции.



Примечание.

$$D(y): \begin{cases} |x| \leqslant 1 \\ \left|4x^3 - 3x\right| \leqslant 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 4x^3 - 3x \leqslant 1 \\ 4x^3 - 3x \geqslant -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ (x-1)(2x+1)^2 \leqslant 0 \\ (x+1)(2x-1)^2 \geqslant 0 \end{cases}.$$

$D(y) = [-1; 1]$, дополнительных ограничений нет.

Тренировочная работа 18

1. Вычислите:

1) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 5)$;

2) $\arcsin(\sin(-3))$;

3) $\arccos(\cos 6)$;

4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-4))$.

2. Решите уравнения:

1) $\arcsin\left(\sin\dfrac{11}{7}\pi\right) = 3x + 1$;

2) $\arccos\left(\cos\dfrac{17}{5}\pi\right) = 2 - 3x$;

3) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-4)) = x + 3$;

4) $\arccos(\cos(-4)) = 2x - 1$;

5) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 8) = 3 - 2x$;

6) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\dfrac{11}{5}\pi\right)\right) = 3x + 4$;

7) $\operatorname{arcctg}\left(2\sin^2 x - \sin x\right) = \dfrac{\pi}{4}$;

8) $\operatorname{arctg}\left(3\cos^3 2x + 4\cos 2x\right) = \dfrac{3}{4}\pi$;

9) $\arccos(\operatorname{ctg}(2\operatorname{arctg} x)) = 0$;

10) $\operatorname{arctg}\left(2x^2 + x\right) + \operatorname{arctg}\left(2x^2 - x\right) = \dfrac{\pi}{4}$;

11) $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} + \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{3\pi}{2}$;

12) $\operatorname{arctg}(2 + \cos x) - \operatorname{arctg}\left(2\cos^2\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$;

13) $\cos(2\arccos x) = \arcsin(\cos x)$;

14) $\sin(2\,\mathrm{arctg}\, x) \cdot \mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}\, x) = 1$;

15) $\arccos(4x - 3) = 3\arccos x$;

16) $\arcsin^2 x + \arccos^2 x = \dfrac{5\pi^2}{36}$.

Решение тренировочной работы 18

1. Вычислите:

1) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 5) = 5 - \pi k$, где $\pi k < 5 < \pi + \pi k$, что верно при $k = 1$; $\pi < 5 < 2\pi$, значит $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 5) = \boxed{5 - \pi}$.

2) $\arcsin(\sin(-3)) =$

$$= \begin{cases} -3 - 2\pi k, \text{ где } 2\pi k \leqslant -3 \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi + 3 + 2\pi k, \text{ где } \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant -3 \leqslant \dfrac{3}{2}\pi + 2\pi k \end{cases}.$$

Так как $-3 \in \left[-1{,}5\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$ верно, что возможно только во втором случае при $k = 1$,

то $\arcsin(\sin(-3)) = \pi + 3 - 2\pi = \boxed{3 - \pi}$.

Можно не запоминать формулы arc-функций.

Пусть $y = \arcsin(\sin(-3))$, тогда $\begin{cases} \sin y = \sin(-3) \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

Так как из $\sin\alpha = \sin\beta$ следует $\left[\begin{array}{l} \alpha = \beta + 2\pi k \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi k \end{array}\right.$,

то $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = -3 + 2\pi k \\ y = \pi + 3 + 2\pi k \end{array}\right. \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$,

что верно только для $y = \pi + 3 + 2\pi k$ при $k = -1$;

$\begin{cases} y = 3 - \pi \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, т. е. $\boxed{\arcsin(\sin(-3)) = 3 - \pi}$.

3) $\arccos(\cos 6) = \begin{cases} 6 - 2\pi k, & \text{где } 2\pi k \leqslant 6 \leqslant (2k+1)\pi \\ -6 + 2\pi k, & \text{где} (2k-1)\pi \leqslant 6 \leqslant 2\pi k \end{cases}$.

Так как $6 \in [\pi; 2\pi]$ верно, что возможно только во втором случае при $k = 1$, значит $\arccos(\cos 6) = \boxed{-6 + 2\pi}$.

Можно рассуждать иначе.

Пусть $y = \arccos(\cos 6)$, то $\begin{cases} \cos y = \cos 6 \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{cases}$.

Так как $\cos\alpha = \cos\beta$, равносильно $\left[\begin{array}{l} \alpha = \beta + 2\pi k \\ \alpha = -\beta + 2\pi k \end{array}\right.$,

то $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 6 + 2\pi k \\ y = -6 + 2\pi k \end{array}\right., \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{cases}$

что верно только для $y = -6 + 2\pi k$ при $k = 1$,

т. е. $\begin{cases} y = -6 + 2\pi \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{cases}$, тогда $\boxed{\arccos(\cos 6) = -6 + 2\pi}$.

4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-4)) = -4 - \pi k$, где $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant -4 \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \pi k$,

что верно только при $k = -1$, тогда $-4 \in \left[-1{,}5; -\dfrac{\pi}{2}\right]$,

значит $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-4)) = \boxed{-4 + \pi}$.

2. Решите уравнения:

1) $\arcsin\left(\sin\dfrac{11}{7}\pi\right) = 3x + 1$.

Так как $\dfrac{11}{7}\pi \in [1{,}5\pi; 2{,}5\pi]$,

то это первый случай при $k = 1$.

$\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{11}{7}\pi\right)\right) = \dfrac{11}{7}\pi - 2\pi$,

значит $3x + 1 = -\dfrac{3}{7}\pi$;

$\boxed{x = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{\pi}{7}}$.

2) $\arccos\left(\cos\dfrac{17}{5}\pi\right) = 2 - 3x.$

Так как $\arccos\left(\cos\dfrac{17\pi}{5}\right) =$

$$= \begin{cases} \dfrac{17}{5}\pi - 2\pi k, \text{ где } 2\pi k \leqslant \dfrac{17}{5}\pi \leqslant (2k+1)\pi \\ -\dfrac{17}{5} + 2\pi k, \text{ где } (2k-1)\pi \leqslant \dfrac{17}{5}\pi \leqslant 2\pi k \end{cases},$$

что верно во втором случае при $k = 2$,

то $\arccos\left(\cos\dfrac{17}{5}\pi\right) = \dfrac{17}{5}\pi - 4\pi,$

тогда $\dfrac{17}{5}\pi - 4\pi = 2 - 3x;$ $\boxed{x = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2}{3}}$.

3) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-4)) = x + 3.$

Так как $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-4)) = -4 - \pi k$, где $\pi k < -4 < \pi + \pi k$,

что верно при $k = -2$, то $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-4)) = 2\pi - 4$,

значит $2\pi - 4 = x + 3$ $\boxed{x = 2\pi - 7}$.

4) $\arccos(\cos(-4)) = 2x - 1.$

Так как $\arccos(\cos(-4)) =$

$$= \begin{cases} -4 - 2\pi k, \text{ где } 2\pi k \leqslant -4 \leqslant (2k+1)\pi \\ 4 + 2\pi k, \quad \text{где } (2k-1)\pi \leqslant -4 \leqslant 2\pi k \end{cases},$$

а это верно при $-4 \in [2\pi; -\pi]$ при $k = -1$ в первом случае, то $\arccos(\cos(-4)) = -4 + 2\pi$,

тогда $-4 + 2\pi = 2x - 1;$ $\boxed{x = -1{,}5 + \pi}$.

Можно решить и не помня формул для arc-функций.

Пусть $y = \arccos(\cos(-4))$, тогда $\begin{cases} \cos y = \cos(-4) \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{cases}.$

Так как если $\cos\alpha = \cos\beta$, то $\left[\begin{array}{l}\alpha = \beta + 2\pi k\\ \alpha = -\beta + 2\pi k\end{array}\right.$,

значит $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y = -4 + 2\pi k\\ y = 4 + 2\pi k\end{array}\right.,\\ 0 \leqslant y \leqslant \pi\end{cases}$

что верно только для $y = -4 + 2\pi k$ при $k = 1$;

$\begin{cases} y = -4 + 2\pi\\ 0 \leqslant y \leqslant \pi\end{cases}$, тогда $\arccos(\cos(-4)) = -4 + 2\pi$,

а уравнение примет вид $-4 + 2\pi = 2x - 1$;

$\boxed{x = -1{,}5 + \pi}$.

5) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 8) = 3 - 2x$.

Так как $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 8) = 8 - \pi k$, где $-\dfrac{\pi}{2} + \pi k \leqslant 8 \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \pi k$,

что верно при $k = 3$ ($8 \in [2{,}5\pi; 3{,}5\pi]$),

то $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 8) = 8 - 3\pi$, значит $8 - 3\pi = 3 - 2x$;

$\boxed{x = -2{,}5 + 1{,}5\pi}$.

6) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\dfrac{11}{5}\pi\right)\right) = 3x + 4$.

Так как $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{11}{5}\pi\right) = \dfrac{11}{5}\pi$,

где $-\dfrac{\pi}{2} + \pi k \leqslant \dfrac{11}{5}\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \pi k$,

что верно при $k = 2$ ($\dfrac{11}{5}\pi \in [1{,}5\pi; 2{,}5\pi]$),

то $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{11}{5}\pi\right) = \dfrac{11}{5} - 2\pi$,

значит $\dfrac{11}{5}\pi - 2\pi = 3x + 4$; $\boxed{x = \dfrac{\pi}{15} - \dfrac{4}{3}}$.

7) $\operatorname{arcctg}\left(2\sin^2 x - \sin x\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Так как углы равны, то котангенсы этих углов равны, т. е. $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\left(2\sin^2 x - \sin x\right)\right) = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}$;

$$2\sin^2 x - \sin x = 1; \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n \,\middle|\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

8) $\operatorname{arctg}\left(3\cos^3 2x + 4\cos 2x\right) = \dfrac{3}{4}\pi$.

С одной стороны, взяв тангенс обеих частей уравнения получим $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(3\cos^2 2x + 4\cos 2x) = \operatorname{tg}\dfrac{3}{4}\pi$;

$$3\cos^2 2x + 4\cos 2x = -1; \quad \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -1 \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right..$$

Но увы, это *ошибочное* решение.

Так как $\operatorname{arctg}\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, а $\dfrac{3}{4}\pi \notin \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то данное уравнение корней не имеет.

9) $\arccos(\operatorname{ctg}(2\operatorname{arctg} x)) = 0$.

По определению это значит, что $\operatorname{ctg}(2\operatorname{arctg} x) = 1$.

Тогда $\dfrac{1}{\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x)} = 1$; $\quad \operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x) = 1$;

так как $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$, то $\dfrac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = 1$;

$$\frac{2x}{1 - x^2} = 1; \quad x^2 + 2x - 1 = 0; \quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 1};$$

$\boxed{x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}}$.

10) $\operatorname{arctg}\left(2x^2+x\right)+\operatorname{arctg}\left(2x^2-x\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(2x^2+x\right)+\operatorname{arctg}\left(2x^2-x\right)\right)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$.

Так как $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$,

то $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(2x^2+x\right)\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(2x^2-x\right)\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(2x^2+x\right)\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(2x^2-x\right)\right)}=1$;

$\dfrac{2x^2+x+2x^2-x}{1-\left(2x^2+x\right)\left(2x^2-x\right)}=1;\quad \dfrac{4x^2}{1-4x^2+x^2}=1;$

$4x^4+3x^2-1=0;\quad \left[\begin{array}{l} x^2=-1\quad \emptyset\\ x^2=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\\ x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$

Ответ: $\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$.

11) $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}+\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}=\dfrac{3\pi}{2}$.

а) Пусть $x=\operatorname{tg}\alpha$, тогда $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\cos2\alpha$;

$\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin2\alpha$;

$\dfrac{2x}{1-x^2}=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$.

Значит

$\arccos(\cos2\alpha)+\arcsin(\sin2\alpha)+\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2\alpha)=\dfrac{3}{2}\pi$

один из возможных вариантов.

$$\left.\begin{array}{l}\arccos(\cos(2\alpha))=2\alpha\\ \arcsin(\sin(2\alpha))=2\alpha\\ \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(2\alpha))=2\alpha\end{array}\right|,$$

тогда $2\alpha+2\alpha+2\alpha=\dfrac{3}{2}\pi;\ \alpha=\dfrac{\pi}{4}$,

значит $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=x=1$.

б) Можно доказать, что

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2},$$ тогда

$$2\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\frac{3}{2}\pi; \quad \arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}; \quad \frac{2x}{1+x^2}=1;$$

$$x^2-2x+1=0; \qquad x=1.$$

Но <u>внимание</u>! $x=1 \notin D(y)$ — $\boxed{\text{корней нет.}}$

12) $\operatorname{arctg}(2+\cos x)-\operatorname{arctg}\left(2\cos^2\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}.$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(2+\cos x)-\operatorname{arctg}(1+\cos x))=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4};$$

$$\left(\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\right);$$

$$\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(2+\cos x))-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1+\cos))}{1+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(2+\cos x))\cdot\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1+\cos x))}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4};$$

$$\frac{2+\cos x-1-\cos x}{1+(2+\cos x)\cdot(1+\cos x)}=1;$$

$$\frac{1}{1+\cos^2 x+3\cos x+2}=1;$$

$$\cos^2 x+3\cos x+3=1; \qquad \cos^2 x+3\cos x+2=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x=-2\notin[-1;1]\end{array}\right. . \quad \boxed{x=\pi+2\pi k} \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

13) $\cos(2\arccos x)=\arcsin(\cos x).$

Так как $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$

то $\cos(2\arccos x)=2\cos^2(\arccos x)-1=2x^2-1.$

Так как $\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\dfrac{\pi}{2},$

то $\arcsin(\cos x)=\dfrac{\pi}{2}-\arccos(\cos x),$

$$\arcsin(\cos x)=\frac{\pi}{2}-\arccos(\cos x)=\frac{\pi}{2}-x;$$

$$\arccos(\cos x)=\begin{cases}x-2\pi k;\ 2\pi k\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi\\ -x+2\pi k;\ (2k-1)\pi\leqslant x\leqslant 2\pi k\end{cases}.$$

а) При $k=0$ $\quad 0\leqslant x\leqslant\pi$ (первый случай), но $-1\leqslant x\leqslant 1$ (условие существования $\arccos x$), значит на $[0;1]$ $\arccos(\cos x)=x$,

тогда $2x^2-1=\dfrac{\pi}{2}-x;\quad 4x^2+2x-2-\pi=0;$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8+4\pi}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{9+4\pi}}{4},$$

но $\dfrac{-1-\sqrt{9+4\pi}}{4}\notin[0;1];\quad \dfrac{\sqrt{9+4\pi}-1}{4}\in[0;1].$

б) Во втором случае при $k=0$ $\quad -\pi\leqslant x\leqslant 0,$

т. е. на $[-1;0]$ $\quad \arccos(\cos x)=-x,$

значит $2x^2-x=\dfrac{\pi}{2}+x;$

$4x^2-2x-2-\pi=0;\quad x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{9+4\pi}}{4};$

$\dfrac{1+\sqrt{9+4\pi}}{4}\notin[-1;0];\quad \dfrac{1-\sqrt{9+4\pi}}{4}\in[-1;0].$

Ответ: $\left\{\dfrac{\sqrt{9+4\pi}-1}{4};\dfrac{1-\sqrt{9+4\pi}}{4}\right\}.$

14) $\sin(2\operatorname{arctg}x)\cdot\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}x)=1.$

Так как $\sin 2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$

то $\sin(2\operatorname{arctg}x)=\dfrac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}x)}=\dfrac{2x}{1+x^2},$

тогда $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}x)}=\dfrac{1}{x};\quad \dfrac{2x}{1+x^2}\cdot\dfrac{1}{x}=1;$

$1+x^2=2;\quad \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right..$

Ответ: $\{-1;1\}$.

15) $\arccos(4x-3) = 3\arccos x.$

$\cos(\arccos(4x-3)) = \cos(3\arccos x);\quad 4x-3 = 4x^3-3x;$
$(\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha);\quad 4x^3-7x+3=0.$

$$\begin{array}{rrrr|l}
-\ 4x^3 & & -\ 7x & +3 & x-1 \\
\underline{4x^3} & \underline{-4x^2} & & & \overline{4x^2+4x-3} \\
 & -\ 4x^2 & -\ 7x & & \\
 & \underline{4x^2} & \underline{-\ 4x} & & \\
 & & -\ -3x & +3 & \\
 & & \underline{-3x} & \underline{+3} &
\end{array}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{4} = \frac{-2\pm 4}{4};\qquad \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2} \notin [-1;1] \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\{0{,}5; 1\}$.

16) $\arcsin^2 x + \arccos^2 x = \dfrac{5\pi^2}{36}.$

Так как $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$,

то $\left(\dfrac{\pi}{2} - \arccos x\right)^2 + \arccos^2 x = \dfrac{5\pi^2}{36};$

$\dfrac{\pi^2}{4} - \pi\arccos x + \arccos^2 x + \arccos^2 x = \dfrac{5\pi^2}{36};$

$72\arccos^2 x - 36\pi\arccos x + 4\pi^2 = 0;$

$18\arccos^2 x - 9\pi\arccos x + \pi^2 = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \arccos x = \dfrac{\pi}{3} \\ \arccos x = \dfrac{\pi}{6} \end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Практикум 16

1. Решите неравенства:

1) $\cos x > \dfrac{1}{2}$;

2) $\cos x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\cos 2x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\sin 3x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

6) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) > -\dfrac{1}{2}$ на $[0; \pi]$;

7) $\sin 2x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

8) $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

9) $\operatorname{tg}\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \geqslant 1$;

10) $\operatorname{tg}\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) < -\sqrt{3}$ на $\left[-\dfrac{3}{8}; \dfrac{21}{8}\right]$;

11) $\operatorname{ctg}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) > -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

12) $\operatorname{ctg}\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) \leqslant \sqrt{3}$;

13) $\cos\left(3\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\right) < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

14) $\sin\left(\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right) > -\dfrac{1}{2}$.

2. Решите неравенства:

1) $\operatorname{arctg} x > \dfrac{\pi}{6}$;

2) $\arccos x < \dfrac{\pi}{3}$;

3) $\arcsin 2x > \arccos x$;

4) $\arccos(8x^2 - 5x) < 2\arccos x$;

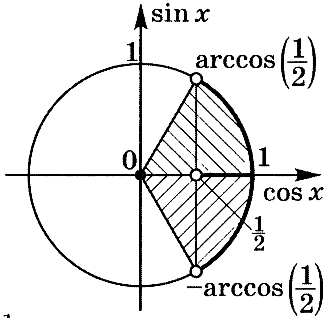
5) $\operatorname{arcctg} x < \arccos 2x$;

6) $2\operatorname{arctg} x > \arcsin x$.

Решение практикума 16

1. Решите неравенства:

1) $\cos x > \dfrac{1}{2}$.

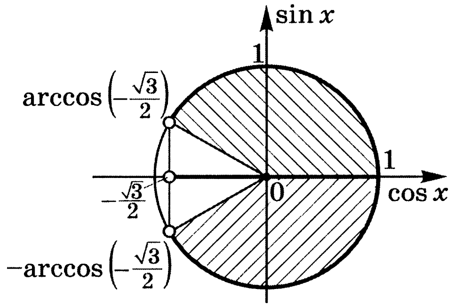


$$-\arccos\frac{1}{2} + 2\pi k < x < \arccos\frac{1}{2} + 2\pi k;$$

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

Ответ: $x \in \left(-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k; \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



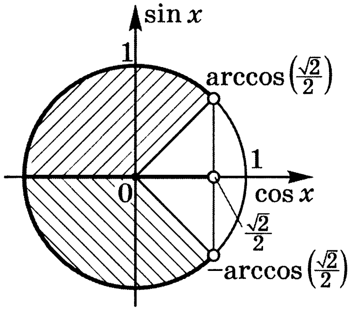
$$-\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k < x < \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k.$$

Так как $\arccos(-m) = \pi - \arccos m$, то

$$-\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k < x < \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

Ответ: $x \in \left(-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k; \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

3) $\cos 2x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

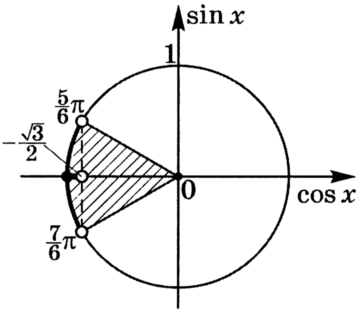


$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k < 2x < 2\pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k;$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < 2x < 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{\pi}{8} + \pi k; \dfrac{7\pi}{8} + \pi k\right)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

4) $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k < 2x + \frac{\pi}{6} < 2\pi - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k.$$

Так как $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$,

то $-\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{5\pi}{6}$;

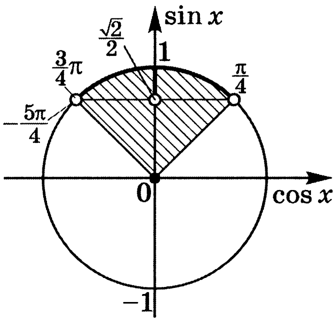
$\dfrac{5\pi}{6} < \alpha < -\dfrac{5\pi}{6}$ — ложь, значит

$\dfrac{5\pi}{6} < \alpha < -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi$; $\quad \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k < 2x + \dfrac{\pi}{6} < 2\pi - \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$;

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < 2x < \pi + 2\pi k; \quad \frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

5) $\sin 3x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

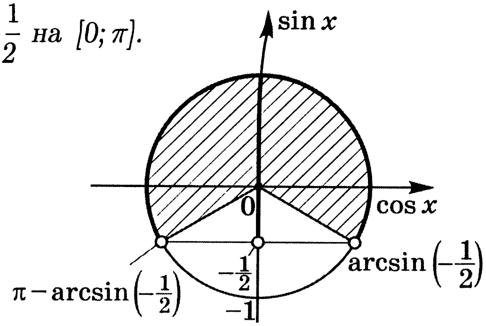


$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k < 3x < \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k;$$

$$\frac{\pi}{3 \cdot 4} + \frac{2\pi}{3} k < x < \frac{3\pi}{3 \cdot 4} + \frac{2\pi}{3} k.$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} k; \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

6) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) > -\dfrac{1}{2}$ *на* $[0; \pi]$.



$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k < 2x + \frac{\pi}{3} < \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k.$$

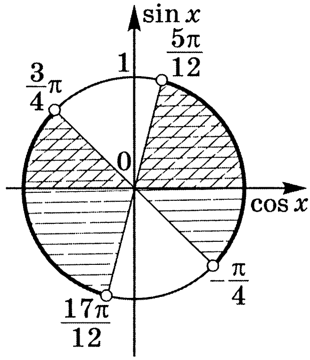
Так как $\arcsin(-m) = -\arcsin m$, то

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < 2x + \frac{\pi}{3} < \pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi k;$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k;$$

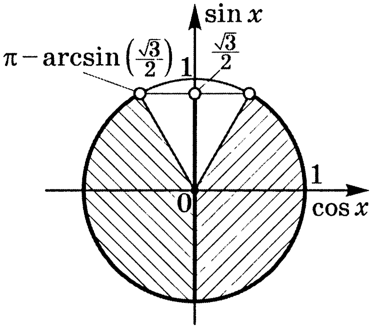
$$-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{5\pi}{12} + \pi k.$$

Учтем, что $x \in [0; \pi]$.



Ответ: $\left[0; \frac{5\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$.

7) $\sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.



$$\pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < \alpha < \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ — ложь.}$$

Тогда

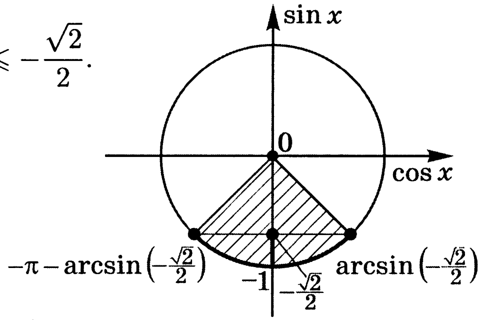
$$\pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\pi < \alpha < \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2\pi k - \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} < 2x < \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k;$$

$$-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k < 2x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

Ответ: $\left\{\left(-\frac{2\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

8) $\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



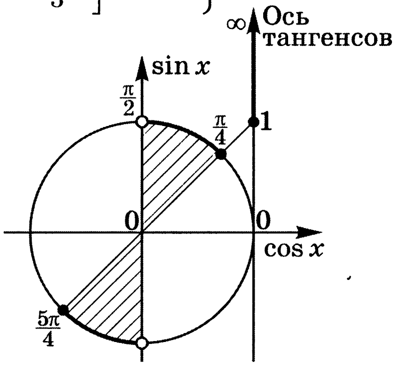
$$-\pi-\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi k \leqslant 3x-\frac{\pi}{3} \leqslant \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi k;$$

$$-\frac{3\pi}{4}+2\pi k \leqslant 3x-\frac{\pi}{3} \leqslant -\frac{\pi}{4}+2\pi k;$$

$$-\frac{5\pi}{12}+2\pi k \leqslant 3x \leqslant \frac{\pi}{12}+2\pi k;\ -\frac{5\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}k.$$

Ответ: $\left\{\left[-\frac{5\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}k; \frac{\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}k\right] \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

9) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \geqslant 1$.



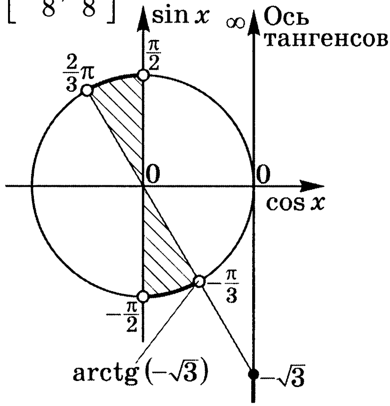
$$\frac{\pi}{2}+\pi k > 2x+\frac{\pi}{3} \geqslant \operatorname{arctg} 1+\pi k;$$

$$\frac{\pi}{2}+\pi k > 2x+\frac{\pi}{3} \geqslant \frac{\pi}{4}+\pi k;\quad \frac{\pi}{6}+\pi k > 2x \geqslant -\frac{\pi}{12}+\pi k;$$

$$\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k > x \geqslant -\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k.$$

Ответ: $\left\{\left[-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

10) $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) < -\sqrt{3}$ на $\left[-\frac{3}{8}; \frac{21}{8}\right]$.



$$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\pi k > 2x-\frac{\pi}{6} > -\frac{\pi}{2}+\pi k.$$

Так как $\operatorname{arctg}(-m) = -\operatorname{arctg} m$,

$$-\frac{\pi}{3}+\pi k > 2x-\frac{\pi}{6} > -\frac{\pi}{2}+\pi k;$$

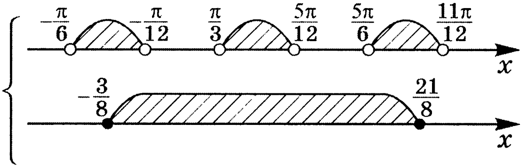
$$-\frac{\pi}{6}+\pi k > 2x > -\frac{\pi}{3}+\pi k; \quad -\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k > x > -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k;$$

но $x \in \left[-\frac{3}{8}; \frac{21}{8}\right]$.

а) $-\frac{\pi}{6} < -\frac{\pi}{8} < -\frac{\pi}{12}$;

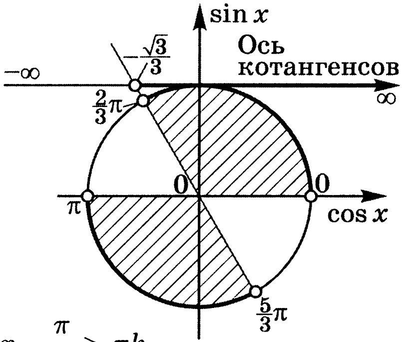
$\pi > 3$, тогда $-\frac{\pi}{6} < -\frac{\pi}{8} < -\frac{3}{8} < -\frac{\pi}{12}$;

б) $\frac{5\pi}{6} < \frac{7\pi}{8} < \frac{11\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{8} > \frac{7\pi}{8} > \frac{21}{8} > \frac{5\pi}{6}$.



Ответ: $\left[-\frac{3}{8}; -\frac{\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; 2\frac{5}{8}\right]$.

11) $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{3}.$



$$\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi k > 2x - \frac{\pi}{4} > \pi k.$$

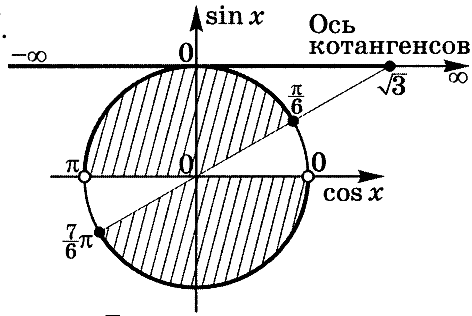
Так как $\operatorname{arcctg}(-m) = \pi - \operatorname{arcctg} m$,

$$\pi - \operatorname{arcctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi k > 2x - \frac{\pi}{4} > \pi k;$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + \pi k > 2x > \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad \frac{11\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k > x > \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k.$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k; \frac{11\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

12) $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \sqrt{3}.$



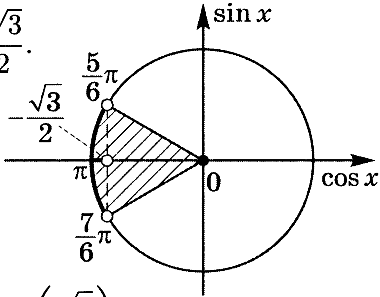
$$\pi + \pi k > 3x + \frac{\pi}{3} \geqslant \operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \pi k;$$

$$\pi + \pi k > 3x + \frac{\pi}{3} \geqslant \frac{\pi}{6} + \pi k; \quad \frac{2\pi}{3} + \pi k > 3x \geqslant -\frac{\pi}{6} + \pi k;$$

$$\frac{2\pi}{9} + \frac{\pi}{3}k > x \geqslant -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}k.$$

Ответ: $\left\{\left[-\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}k; \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi}{3}k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

13) $\cos\left(3\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6};$$

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < 3\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k;$$

$$\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}k < \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) < \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}k.$$

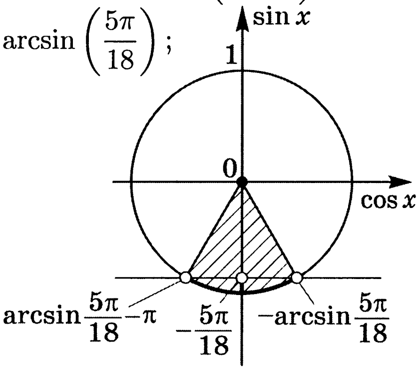
а) $k=-1$;

$$\frac{5\pi}{18} - \frac{2\pi}{3} < \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) < \frac{7\pi}{18} - \frac{2\pi}{3};$$

$-\frac{7\pi}{18} < \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) < -\frac{5\pi}{18}$; но

$-\frac{7\pi}{18} < -1$, а $-\frac{5\pi}{18} > -1$, значит $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) < -\frac{5\pi}{18}$;

$$\arcsin\left(-\frac{5\pi}{18}\right) = -\arcsin\left(\frac{5\pi}{18}\right);$$



$$\arcsin\frac{5\pi}{18} - \pi + 2\pi n < x - \frac{\pi}{6} < -\arcsin\frac{5\pi}{18} + 2\pi n;$$

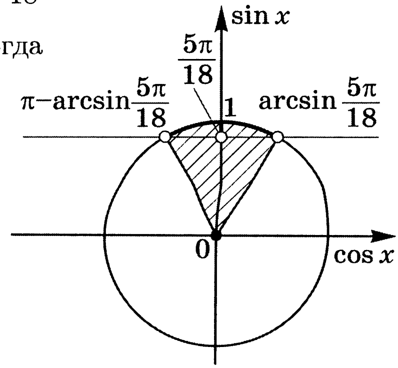
$$\arcsin\frac{5\pi}{18} - \frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} - \arcsin\frac{5}{18} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}.$$

б) $k=0$;

$\dfrac{5\pi}{18} < \sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) < \dfrac{7\pi}{18}$;

$\dfrac{7\pi}{18} > 1$, а $\dfrac{5\pi}{18} < 1$, тогда

$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) > \dfrac{5\pi}{18}$;



$$\pi - \arcsin\frac{5\pi}{18} + 2\pi p > x - \frac{\pi}{6} > \arcsin\frac{5\pi}{18} + 2\pi p;$$

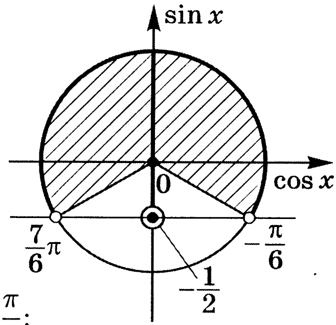
$$\frac{7\pi}{6} - \arcsin\frac{5\pi}{18} + 2\pi p > x > \frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{5\pi}{18} + 2\pi p.$$

При остальных значениях $k \in \mathbb{Z}$ решения нет.

Ответ:

$$\left\{\left(\arcsin\frac{5\pi}{18} - \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} - \arcsin\frac{5\pi}{18} + 2\pi n\right);\right.$$
$$\left.\left(\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{5\pi}{18} + 2\pi p; \frac{7\pi}{6} - \arcsin\frac{5\pi}{18} + 2\pi p\right) \middle|\, n, p \in \mathbb{Z}\right\}.$$

14) $\sin\left(\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right) > -\dfrac{1}{2}$.



$\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\arcsin\dfrac{1}{2} = -\dfrac{\pi}{6}$;

$$\frac{7\pi}{6} + 2\pi k > \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

При $k = 0$ $\quad \dfrac{7\pi}{6} > \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) > -\dfrac{\pi}{6}$,

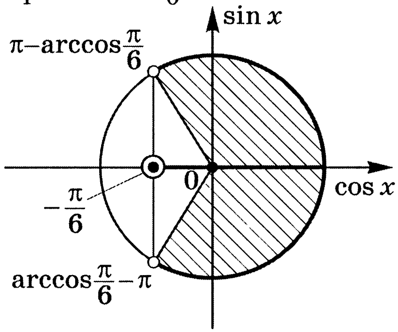
но $\dfrac{7\pi}{6} > 1$, а $-1 < -\dfrac{\pi}{6} < 1$, тогда $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) > -\dfrac{\pi}{6}$;

$\arccos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \pi - \arccos\dfrac{\pi}{6}$;

$-\arccos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \arccos\dfrac{\pi}{6} - \pi$, значит

$\pi - \arccos\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n > x + \dfrac{\pi}{4} > \arccos\dfrac{\pi}{6} - \pi + 2\pi n$;

$\dfrac{3\pi}{4} - \arccos\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n > x > \arccos\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n.$



При других $k \in \mathbb{Z}$ решения нет.

Ответ:

$$\left\{\left(\arccos\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} - \arccos\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \middle| \, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. Решите неравенства:

1) $\operatorname{arctg} x > \dfrac{\pi}{6}$.

$y = \operatorname{arctg} x \uparrow$; $\quad D(y) = (-\infty; \infty)$; $\quad E(y) = \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$;

$y = \operatorname{tg} x \uparrow$, тогда $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) > \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}$; $\quad x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \infty\right)$.

2) $\arccos x < \dfrac{\pi}{3}$.

$y = \arccos x \downarrow$; $\quad D(y) = [-1; 1]$; $\quad E(y) = [0; \pi]$;

$\cos(\arccos x) > \cos\dfrac{\pi}{3}$; $\quad \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right]$.

3) $\arcsin 2x > \arccos x$.

$y_1 = \arcsin 2x$; $\quad D(y_1) = \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$; $\quad E(y_1) = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

$y_2 = \arccos x$; $\quad D(y_2) = [-1; 1]$; $\quad E(y_2) = [0; \pi]$.

Неравенство, возможно, выполняется только при $x \in D(\text{Н})$, где $D(\text{Н}) = D(y_1) \cap D(y_2)$.

Тогда $E(y_1) \cap E(y_2) = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$,

т. е. если $\arcsin 2x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \subset [0; \pi]$,

тогда $x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ с учетом $D(\text{Н}) = \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.

Значит $\arccos x \in \left[\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ $\left(\arccos 0 = \dfrac{\pi}{2};\ \arccos\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}\right)$.

На $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ $\quad y = \sin x \uparrow$,

значит $\sin(\arcsin 2x) > \sin(\arccos x)$;

$$\begin{cases} 2x > \sqrt{1 - x^2} \\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 > 1 - x^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ x < -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{array}\right. \end{cases};$$

$\dfrac{\sqrt{5}}{5} < x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}; \dfrac{1}{2}\right]$.

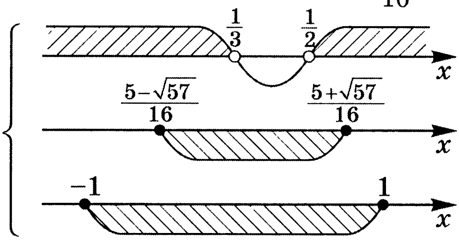
4) $\arccos(8x^2 - 5x) < 2\arccos x$.

$y = \cos x \downarrow$ на $[0;\pi]$, тогда

$\cos\left(\arccos(8x^2 - 5x)\right) > \cos\left(2\arccos x\right)$;

$$\begin{cases} 8x^2 - 5x > 2x^2 - 1 \\ -1 \leqslant 8x^2 - 5x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 6x^2 - 5x + 1 > 0 \\ 8x^2 - 5x - 1 \leqslant 0 \\ 8x^2 - 5x + 1 \geqslant 0 \quad (\forall x) \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases};$$

$$8x^2 - 5x - 1 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{57}}{16}.$$



Ответ: $\left[\dfrac{5-\sqrt{57}}{16}; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5+\sqrt{57}}{16}\right]$.

5) $\operatorname{arcctg} x < \arccos 2x$.

$D(y) = \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$; $\quad y = \operatorname{ctg} x \downarrow$ на $(0;\pi)$;

$\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg} x\right) > \operatorname{ctg}\left(\arccos 2x\right)$;

$x > \dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}$ (см. табл. на стр. 301).

$$\begin{cases} x\left(\sqrt{1-4x^2} - 2\right) > 0 \\ x \neq \pm\dfrac{1}{2} \\ x \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right] \end{cases}; \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right) \\ x > 0 \\ \sqrt{1-4x^2} > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ \sqrt{1-4x^2} < 2 \\ x \in \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)\\ x>0\\ 1-4x^2>4\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ 1-4x^2>0\\ 1-4x^2<4\\ x\in\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}\end{array}\right. ;\qquad \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x>0\\ x^2<-\dfrac{3}{4}\end{cases} & \emptyset\\ \begin{cases}x<0\\ -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}\\ x^2>-\dfrac{3}{4}\end{cases} & -\dfrac{1}{2}<x<0\end{array}\right. .$$

Ответ: $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

6) $2\operatorname{arctg} x > \arcsin x$.

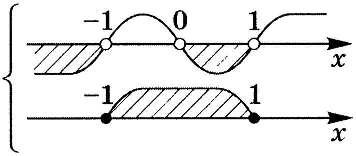
$y=\sin x\uparrow$ на $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$;

$\sin(2\operatorname{arctg} x) > \sin(\arcsin x)$;

$$\begin{cases}\dfrac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}>x\\ -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases},\ \text{так как } \sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\begin{cases}\dfrac{2x}{1+x^2}\geqslant x\\ -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases};\qquad \begin{cases}\dfrac{x(1+x^2-2)}{1+x^2}<0\\ -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases};$$

$$\begin{cases}x(x+1)(x-1)<0\\ -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}.$$



$(0;1)$.

Ответ: $(0;1)$.

Тренировочная работа 19

1. Вычислите:

1) $\dfrac{1}{\pi}\arcsin\left(\cos\dfrac{33\pi}{5}\right)$;

2) $\cos(2\operatorname{arctg}2)-\sin(4\operatorname{arctg}3)$;

3) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{15}{17}\right)$;

4) $\dfrac{2}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{3}{4}\right)+\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{4}{3}\right)\right]$;

5) $\sin^2\left[\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{4}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right]$;

6) $\sin^2\left[\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}-\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right]$;

7) $7\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{7\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{7}\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{7\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{7}\right)\right]$;

8) $\dfrac{3}{\pi}\left(\arcsin\dfrac{11}{14}+\arcsin\dfrac{13}{14}\right)$;

9) $\dfrac{1}{\pi}\left(\arcsin x-\arcsin\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)$ при $x>0$;

10) $\dfrac{1}{\pi}\left(2\operatorname{arctg}x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ при $x<-1$.

2. Решите уравнения:

1) $\operatorname{arcctg}7+\arcsin x=\dfrac{\pi}{4}$;

2) $\arccos x+\arccos 2x=\dfrac{\pi}{3}$;

3) $\arccos x=2\arccos\left(x\sqrt{3}\right)$;

4) $\operatorname{arcctg}(x-1)+\operatorname{arcctg}x+\operatorname{arcctg}(x+1)=\operatorname{arcctg}3x$;

5) $2\arccos\dfrac{x}{2} = \arccos(3-x)$;

6) $2\arcsin x = \arccos\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$;

7) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$;

8) $\operatorname{tg}(5\operatorname{arctg}x) = \operatorname{ctg}(5\operatorname{arctg}x)$.

3. Найдите $E(y)$ (область изменения функции):

1) $y = \dfrac{1}{\pi}\left(2\arccos x - \arccos\left(2x^2-1\right)\right)$;

2) $y = \dfrac{2}{\pi}\left(2\operatorname{arctg}x - \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$;

3) $y = \dfrac{1}{\pi}\left(\arcsin 2x - \arcsin\dfrac{2x+\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{2}}\right)$.

Решение тренировочной работы 19

1. Вычислите:

1) $\dfrac{1}{\pi}\arcsin\left(\cos\dfrac{33\pi}{5}\right)=$ $\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\arcsin\left(\cos\dfrac{33\pi}{5}\right)\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$=\frac{1}{\pi}\arcsin\left[\cos\left(6\pi+\frac{3\pi}{5}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\arcsin\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\sin\frac{\pi}{10}\right)=-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{10}=\boxed{-0{,}1}.$$

2) $\cos(2\operatorname{arctg}2)-\sin(4\operatorname{arctg}3)$.

а) Пусть $\operatorname{arctg}2=\alpha$; $\quad\operatorname{tg}\alpha=2$;

$\cos 2\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\quad\cos 2\alpha=\dfrac{1-4}{1+4}=-\dfrac{3}{5}$.

б) Пусть $\operatorname{arctg}3=\beta$; $\quad\operatorname{tg}\beta=3$;

$\sin 4\beta=2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta$;

$\sin 2\beta=\dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}$; $\quad\sin 2\beta=\dfrac{2\cdot 3}{1+3^2}=\dfrac{3}{5}$;

$\cos 2\beta=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}$; $\quad\cos 2\beta=\dfrac{1-3^2}{1+3^2}=-\dfrac{4}{5}$;

$\sin 4\beta=2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{24}{25}$.

в) $\cos(2\operatorname{arctg}2)-\sin(4\operatorname{arctg}3)=$

$$=-\frac{3}{5}-\left(-\frac{24}{25}\right)=\frac{24-15}{25}=\frac{9}{25}=\boxed{0{,}36}.$$

3) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{15}{17}\right)$.

а) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{5}$.

б) Пусть $\arcsin\dfrac{15}{17} = \alpha$; $\sin\alpha = \dfrac{15}{17}$; $\alpha \in$ I четверти;

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\dfrac{15}{17}\right)^2} = \dfrac{8}{17}$;

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}} = \dfrac{3}{5}$.

в) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{15}{17}\right) =$

$= \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{12}{25} = \boxed{0{,}48}$.

4) $\dfrac{2}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{3}{4}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{4}{3}\right)\right]$.

а) Пусть $\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{3}{4}\right) = \alpha$; $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$.

б) Пусть $\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{4}{3}\right) = \beta$; $\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{4}{3}$.

в) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$;

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{-\frac{3}{4} + \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{-\frac{25}{12}}{\frac{12-12}{12}} = -\frac{25}{0}.$$

Значит $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ не определен, т. е. $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{2}$ или $\alpha+\beta = -\dfrac{\pi}{2}$.

Но $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$ и $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$, значит подходит только $\alpha+\beta = -\dfrac{\pi}{2}$.

г) $\dfrac{2}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{3}{4}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{4}{3}\right)\right] = \dfrac{2}{\pi}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \boxed{-1}$.

5) $\sin^2\left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right]$.

Пусть $\arcsin\frac{4}{5}=\alpha;\quad \sin\alpha=\frac{4}{5};\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2};$

$\operatorname{arctg}(-2)=\beta;\quad \operatorname{tg}\beta=-2;\quad -\frac{\pi}{2}<\beta<0;$

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos 2\beta-\sin 2\beta\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$

а) $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha};$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}\ \ (0<\alpha<\frac{\pi}{2}),$

значит $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5};$

$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

б) $\sin 2\beta=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta};\quad \sin 2\beta=\frac{2\cdot(-2)}{1+(-2)^2}=-\frac{4}{5};$

$\cos 2\beta=\frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta};\quad \cos 2\beta=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5}.$

в) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$

г) $\sin^2\left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right]=\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=\boxed{0{,}2}.$

6) $\sin^2\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$.

Пусть $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\alpha;\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2};\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2};$

$\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)=\beta;\quad \operatorname{tg}\beta=-\frac{1}{3};\quad -\frac{\pi}{2}<\beta<0;$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha.$

а) $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}; \quad \sin\alpha > 0;$

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$-\frac{\pi}{2} < \beta < 0; \quad \sin\beta < 0;$$

$$\sin\beta = \frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

б) $\cos\beta = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}; \quad -\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0; \quad \cos\beta > 0;$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10};$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad \cos\alpha > 0; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

в) $\sin(\alpha-\beta) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\cdot\dfrac{3\sqrt{10}}{10} - \left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{5} =$

$$= \frac{\sqrt{50}}{50}\cdot 5 = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

г) $\sin^2\left[\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right] = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \boxed{0{,}5}.$

7) $7\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{7\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{7}\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{7\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{7}\right)\right].$

Пусть $\arccos\dfrac{2}{7} = \alpha; \quad \cos\alpha = \dfrac{2}{7}; \quad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2};$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{-1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

а) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{7}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{7}\ (\sin\alpha>0);$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\frac{2}{7}}{\frac{3\sqrt{5}}{7}}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

б) $$\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{-1+\frac{\sqrt{5}}{3}}{1+\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}+3}=$$

$$=\frac{(\sqrt{5}-3)^2}{5-9}=-\frac{14-6\sqrt{5}}{4}=-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}.$$

в) $$\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{-1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-1}.$$

Учтем, что $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, тогда

$$\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=-\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{3}}{1-\frac{\sqrt{5}}{3}}=-\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=$$

$$=-\frac{(3+\sqrt{5})^2}{4}=-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}.$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{7}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{7}\right)=$$

$$=-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}=-7.$$

г) $$7\left[\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{7}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{7}\right)\right]=$$

$$=\boxed{-49}.$$

8) $\dfrac{3}{\pi}\left(\arcsin\dfrac{11}{14}+\arcsin\dfrac{13}{14}\right)$.

а) Пусть $\arcsin\dfrac{11}{14}=\alpha$; $\sin\alpha=\dfrac{11}{14;}$ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;

$\arcsin\dfrac{13}{14}=\beta$; $\sin\beta=\dfrac{13}{14}$; $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$.

б) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha$;

$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{11}{14}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$; $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;

$\cos\beta=\sqrt{1-\left(\dfrac{13}{14}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$; $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$,

тогда $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{11}{14}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{14}+\dfrac{13}{14}\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=\dfrac{98\sqrt{3}}{14^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Если $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$ или $\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}$, но так как

$\sin\alpha=\dfrac{11}{14}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. $\alpha>\dfrac{\pi}{4}$, и

$\sin\beta=\dfrac{13}{14}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. $\beta>\dfrac{\pi}{4}$, то $\alpha+\beta>\dfrac{\pi}{2}$.

Итак, $\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}$.

в) $\dfrac{3}{\pi}\left(\arcsin\dfrac{11}{14}+\arcsin\dfrac{13}{14}\right)=\dfrac{3}{\pi}\cdot\dfrac{2\pi}{3}=\boxed{2}$.

9) $\dfrac{1}{\pi}\left(\arcsin x-\arcsin\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)$ при $x>0$.

а) Пусть $\arcsin x=\alpha$; $\sin\alpha=x$; так как $x>0$, то $0<\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$; $\cos\alpha\geqslant 0$, так как $\dfrac{\pi}{2}\geqslant\alpha>0$.

б) Пусть $\arcsin \dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} = \beta$; $\quad \sin\beta = \dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}$.

Учитывая предыдущие обозначения, получим

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha - \sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sqrt{2}} = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Тогда $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

так как $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos\beta \geqslant 0$,

т. е. $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$.

в) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta =$

$$= \sin\left(\alpha - \alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

тогда $\left[\begin{array}{l} \alpha-\beta = \dfrac{\pi}{4} \\ \alpha-\beta = \dfrac{3\pi}{4} \end{array}\right.$.

1. Проверим: $\alpha - \beta = \dfrac{3\pi}{4}$, значит $\alpha = \dfrac{3\pi}{4} + \beta$,

т. е. $0 < \dfrac{3\pi}{4} + \beta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; $\quad -\dfrac{3\pi}{4} < \beta \leqslant -\dfrac{\pi}{4}$.

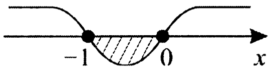
Следовательно, $-\dfrac{3\pi}{4} < \arcsin\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \leqslant -\dfrac{\pi}{4}$.

Учитывая, что $y = \sin x$ на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ возрастающая, получим

$$\sin\left(\arcsin\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{2}\right) \leqslant \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right);$$

$$\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда следует, что $x - \sqrt{1-x^2} \leqslant -1$;
$x + 1 \leqslant \sqrt{1-x^2}$; так как $x > 0$, то
$(x+1)^2 \leqslant 1 - x^2$;
$2x(x+1) \leqslant 0$;



но $[-1;0] \not\subset (0;\infty)$, значит $\alpha - \beta = \dfrac{3\pi}{4}$ не подходит.

2. $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4}$. Рассуждая аналогично, получим $x - 1 \leqslant \sqrt{1-x^2}$, но по $D(y)$ $0 < x \leqslant 1$.

Значит $x - 1 \leqslant 0$ всегда, т. е. $\sqrt{1-x^2} \geqslant x - 1$ всегда, а значит $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4}$ — истина.

Тогда, учитывая, что $\dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{\pi}{4} = 0{,}25$, получим

$$\frac{1}{\pi}\left(\arcsin x - \arcsin \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{0{,}25} \text{ при } x > 0.$$

10) $\dfrac{1}{\pi}\left(2\,\mathrm{arctg}\, x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ при $x < -1$.

а) Пусть $\mathrm{arctg}\, x = \alpha$; $\mathrm{tg}\,\alpha = x$.

Так как $x < -1$ и $y = \mathrm{tg}\, x$ на $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ возрастающая, то $\mathrm{tg}\,\alpha < \mathrm{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$; $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < -\dfrac{\pi}{4}$;

$-\pi < 2\alpha < -\dfrac{\pi}{2}$.

б) Пусть $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \beta$, т. е. $\sin\beta = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Но $x < -1$, значит $\dfrac{2x}{1+x^2} < 0$ и в силу возрастания $y = \sin x$ на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ $\sin\beta < \sin 0$, т. е. $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \beta < 0$.

в) Так как $\mathrm{tg}\,\alpha = x$, то $\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha} = \sin 2\alpha$.

г) $2\operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = 2\alpha + \arcsin(\sin 2\alpha)$.

Учитывая, что $\arcsin(\sin x) =$

$$= \begin{cases} x - 2\pi k, & -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi - x + 2\pi k, & \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

и $-\pi < 2\alpha < -\dfrac{\pi}{2}$, нам подходит только второй случай при $k = -1$, т. е. $\arcsin(\sin\alpha) = \pi - \alpha - 2\pi$.

Следовательно, в данном случае

$\arcsin(\sin 2\alpha) = -\pi - 2\alpha$, т. е.

$2\operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = 2\alpha - \pi - 2\alpha = -\pi$.

Тогда $\dfrac{1}{\pi}\left(2\operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}\right) = \dfrac{1}{\pi} \cdot (-\pi) = \boxed{-1}$ при $x < -1$.

Для вычисления можно использовать производную. Действительно, так как

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, и $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, то

$$y' = \frac{1}{\pi}\left(2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2 - (2x)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{1+x^2} + \frac{2\left(1-x^2\right)}{|1-x^2|\,(1+x^2)}\right),$$

но $x < -1$, тогда $\left|1-x^2\right| = -\left(1-x^2\right)$.

$$y' = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{1+x^2} - 21 + x^2\right) = 0, \text{ т. е. } y = \mathrm{const}.$$

Выберем для удобства $x = -\sqrt{3} < -1$;

$$y\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{1}{\pi}\left(2\,\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \arcsin\left(\frac{-2\sqrt{3}}{1+3}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -1.$$

2. Решите уравнения:

1) $\mathrm{arcctg}\,7 + \arcsin x = \frac{\pi}{4}$; $\qquad \arcsin x = \frac{\pi}{4} - \mathrm{arcctg}\,7$;

так как $0 < \mathrm{arcctg}\,7 < \frac{\pi}{2}$, то $0 > -\mathrm{arctg}\,7 > -\frac{\pi}{2}$. $\quad \left(+\frac{\pi}{4}\right)$

Получим $\frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}\,7 > -\frac{\pi}{4}$, но $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) \subset \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$,

т. е. $\frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}\,7 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а значит не выходит из области изменения $y = \arcsin m$.

Тогда $\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \mathrm{arcctg}\,7\right)$;

$\sin(\arcsin x) = x$.

Вычислим $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \mathrm{arcctg}\,7\right) =$

$= \sin\frac{\pi}{4}\cos(\mathrm{arcctg}\,7) - \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin(\mathrm{arcctg}\,7)$.

Напомним:

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha}}; \quad \sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha}};$$

$\mathrm{arcctg}\,7 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. $\sin\alpha > 0$, $\quad \cos\alpha > 0$.

$$\cos(\mathrm{arcctg}\,7) = \frac{\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\,7)}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2(\mathrm{arcctg}\,7)}} = \frac{7}{\sqrt{1+7^2}} =$$

$$= \frac{7\sqrt{50}}{50} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} 7) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} 7)}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Значит $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arcctg} 7\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{7\sqrt{2}}{10} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{10} =$

$= \frac{7}{10} - \frac{1}{10} = 0{,}6,$ т. е. $x = 0{,}6.$

Ответ: $x = 0{,}6$.

2) $\arccos x + \arccos 2x = \frac{\pi}{3}.$

$\arccos 2x = \frac{\pi}{3} - \arccos x$, тогда

$\cos(\arccos 2x) =$

$= \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos(\arccos x) + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin(\arccos x)\,;$

$2x = \frac{1}{2}\cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right);$ (см. табл. на стр. 301)

$\frac{3x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2};$

$$\begin{cases} \frac{9}{4}x^2 = \frac{3}{4}(1-x^2) \quad 4x^2 = 1 \\ x \geqslant 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ x \geqslant 0 \end{cases}; \qquad x = \frac{1}{2}.$$

Проверим.

При $x = \frac{1}{2}$ $\arccos\frac{1}{2} + \arccos 1 = \frac{\pi}{3};$

$\frac{\pi}{3} + 0 = \frac{\pi}{3};$ $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ — истина.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

3) $\arccos x = 2\arccos\left(x\sqrt{3}\right)$.

$\cos\left(\arccos x\right) = \cos\left(2\arccos\left(x\sqrt{3}\right)\right)$;

$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$ **5.2**

$x = 2\left(\cos^2\left(\arccos\left(x\sqrt{3}\right)\right)\right) - 1;$

$x = 2\left(x\sqrt{3}\right)^2 - 1;$

$$6x^2 - x - 1 = 0; \qquad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. .$$

Проверим.

а) $x = \dfrac{1}{2}$; $\arccos\dfrac{1}{2} = 2\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\dfrac{\pi}{3} = 2\cdot\dfrac{\pi}{6}$ — истина.

б) $x = -\dfrac{1}{3}$; $\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 2\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

$\pi - \arccos\dfrac{1}{3} = 2\left(\pi - \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ — ложь, так как

$$\begin{cases} \pi - \arccos\dfrac{1}{3} < \pi \\ 2\left(\pi - \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) > \pi \quad \left(\pi - \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3} > \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}.$$

Ответ: $x = \dfrac{1}{2}$.

Примечание. Вопросы равносильности преобразований для уравнений, содержащих arc-функции, довольно трудны, поэтому прямая проверка бывает более эффективной и простой.

4) $\operatorname{arcctg}(x-1)+\operatorname{arcctg} x+\operatorname{arcctg}(x+1)=\operatorname{arcctg} 3x$.

$\operatorname{arcctg}(x-1)+\operatorname{arcctg}(x+1)=\operatorname{arcctg} 3x-\operatorname{arcctg} x$;

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta} \text{ при } \begin{cases}\sin(\alpha+\beta)\neq 0\\ \sin\alpha\neq 0\\ \sin\beta\neq 0\end{cases} \quad \textbf{4.5}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha} \text{ при } \begin{cases}\sin(\alpha-\beta)\neq 0\\ \sin\alpha\neq 0\\ \sin\beta\neq 0\end{cases} \quad \textbf{4.6}$$

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(x-1)+\operatorname{arcctg}(x+1))=$

$=\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 3x-\operatorname{arcctg} x)$;

$$\frac{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(x-1))\cdot\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(x+1))-1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(x-1))+\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(x+1))}=$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 3x)\cdot\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)+1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)-\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 3x)},$$

тогда $\dfrac{(x-1)(x+1)-1}{x-1+x+1}=\dfrac{3x\cdot x+1}{x-3x}$; $\quad \dfrac{x^2-2}{2x}=\dfrac{3x^2+1}{-2x}$;

$$\begin{cases}x\neq 0\\ 3x^2+1+x^2-2=0\end{cases}; \quad \begin{cases}x\neq 0\\ x^2=\dfrac{1}{4}\end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

Проверка:

а) $x=\dfrac{1}{2}$:

$$\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arcctg}\frac{3}{2}=\operatorname{arcctg}\frac{3}{2};$$

$$\pi-\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arcctg}\frac{3}{2}=\operatorname{arcctg}\frac{3}{2};$$

$$\pi+\operatorname{arcctg}\frac{3}{2}=\operatorname{arcctg}\frac{3}{2} \text{ — ложь.}$$

б) $x=-\dfrac{1}{2}$:

$$\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{2}\right)+\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}=\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\pi+\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{2}\right)=\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{2}\right) \text{ — ложь.}$$

Ответ: $\emptyset$.

5) $2\arccos\frac{x}{2} = \arccos(3-x)$.

$\cos\left(2\arccos\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\arccos(3-x)\right);$

$2\cos^2\left(\arccos\frac{x}{2}\right) - 1 = 3 - x;$

$2\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 = 3 - x;\quad \frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0;$

$x^2 + 2x - 8 = 0;\quad \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Рассмотрим $D(У)$: $\begin{cases} \left|\frac{x}{2}\right| \leqslant 1 \\ |3-x| \leqslant 1 \end{cases};\quad \begin{cases} x \leqslant 2 \\ x \geqslant -2 \\ x - 3 \leqslant 1 \\ x - 3 \geqslant -1 \end{cases};$

$\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases};\quad x = 2.$

Получили $D(У) = 2$. Проверкой $x = 2$ подтверждаем, что это корень.

Ответ: $x = 2$.

Примечание. Если бы мы догадались сразу установить $D(У)$, то решение было бы значительно проще.

6) $2\arcsin x = \arccos\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

$\cos(2\arcsin x) = \cos\left(\arccos\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)\right);$

$1 - 2\sin^2(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2};$

$1 - 2x^2 = 2x\sqrt{1-x^2}.$

Чтобы решать дальше, проанализируем ситуацию.

Так как $\pi \geqslant \arccos\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$, то

$\frac{\pi}{2} \geqslant \arcsin x \geqslant 0$, значит $x \in [0;1]$, тогда на $[0;1]$

$$1 - 2x^2 = 2x\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 - 4x^2 + 4x^4 = 4x^2 - 4x^4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 8x^4 - 8x^2 + 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \left[\begin{aligned} x &= \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ x &= \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{aligned} \right. \end{cases}.$$

а) Очевидно, что $\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \notin \left[0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

б) Проверим $\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$:

$2-\sqrt{2} \leqslant 2; \quad -\sqrt{2} \leqslant 0$ — верно.

Ответ: $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

7) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$. Выясним D(У):

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1 \\ 1-x^2 \geqslant 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1-x^2 \leqslant 1 \end{cases}; \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

$\cos(\arcsin x) = \cos\left(\arccos\sqrt{1-x^2}\right)$;

так как $\dfrac{\pi}{2} \geqslant \arcsin x \geqslant -\dfrac{\pi}{2}$, то $\cos(\arcsin x) \geqslant 0$.

$\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}$; $\quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$ — похоже, получили тождество на $[-1;1]$.

Увы, мы ошиблись, так как может быть, что $\alpha \neq \beta$, а $\cos\alpha = \cos\beta$ (например, $\cos\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{7\pi}{4}$).

Вернемся к исходному уравнению.

$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$.

Так как $\pi \geqslant \arccos(1-x^2) \geqslant 0$, а $\dfrac{\pi}{2} \geqslant \arcsin x \geqslant -\dfrac{\pi}{2}$, то равенство в уравнении возможно только при $\arcsin x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, но тогда $x \in [0;1]$, значит $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$ тождественно только на $[0;1]$.

Ответ: $[0;1]$.

Примечание. Если бы мы были более внимательны к тождествам в таблице, отражающей соотношения между arc-функциями, то мы бы сразу использовали формулу 8.7. В данном случае мы ее просто доказали (см. стр. 300).

8) $\operatorname{tg}(5\operatorname{arctg} x) = \operatorname{ctg}(5\operatorname{arctg} x)$.

Так как $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$, то

$\operatorname{tg}(5\operatorname{arctg} x) = \operatorname{ctg}\left(5\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)\right)$;

$\operatorname{tg}(5\operatorname{arctg} x) = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2} - 5\operatorname{arctg} x\right)$;

$\operatorname{tg}(5\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}(5\operatorname{arctg} x)$.

Если $5\operatorname{arctg} x \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$; $\quad x \neq \pm\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$, то утверждение истинно.

Ответ: любое $x \neq \pm\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{10}$ есть решение данного уравнения.

3. Найдите $E(y)$ (область изменения функции):

1) $y = \dfrac{1}{\pi}\left(2\arccos x - \arccos\left(2x^2-1\right)\right) \quad E(y) = ?$

Обозначим $\arccos x = \alpha \in [0;\pi]$, тогда $x = \cos\alpha$, значит $2x^2 - 1 = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$. Известно, что

$$\arccos(\cos 2\alpha) = \begin{cases} 2\alpha - 2\pi k; & 2\pi k \leqslant 2\alpha \leqslant (2k+1)\pi \\ -2\alpha + 2\pi k; & (2k-1)\pi \leqslant \alpha \leqslant 2\pi k \end{cases}.$$

Так как $0 \leqslant 2\alpha \leqslant 2\pi$, то

а) на $[0;\pi]$ $\quad \arccos(\cos 2\alpha) = 2\alpha$ при $k = 0$ (первый случай), тогда на $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ $y(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}(2\alpha - 2\alpha) = 0$. $(2\alpha \in [0;\pi])$;

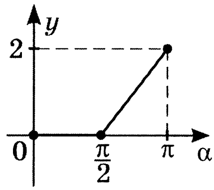
б) на $[\pi; 2\pi]$ $\arccos(\cos 2\alpha) = -2\alpha + 2\pi n$ при $k = 1$ (второй случай), тогда на $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

$y(\alpha) = \frac{1}{\pi}(2\alpha - (2\alpha + 2\pi)) = \frac{4\alpha - 2\pi}{\pi}$; $(2\alpha \in [\pi; 2\pi])$;

$y(\alpha) = \frac{4\alpha - 2\pi}{\pi}$ — возрастающая линейная функция относительно α, значит

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4 \cdot \frac{\pi}{2} - 2\pi}{\pi} = 0;$$

$$y(\pi) = \frac{4\pi - 2\pi}{\pi} = 2.$$



Т. е. $E(y) = [0; 2]$ на $[0; \pi]$.

Рассмотрим другой способ нахождения $E(y)$ для

$$y = \frac{1}{\pi}\left(2\arccos x - \arccos\left(2x^2 - 1\right)\right).$$

Найдем $E(y)$, используя аппарат дифференциального исчисления.

$$y' = (\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$y' = \left(\arccos\left(2x^2 - 1\right)\right)' = \frac{4x}{-2|x|\sqrt{1 - x^2}};$$

$$y' = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{4x}{2|x|\sqrt{1 - x^2}}\right); \quad D(y) = [-1; 1].$$

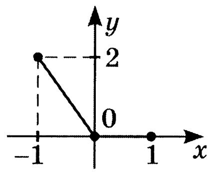
а) на $x > 0$ $y' = 0$, т. е. $y = \mathrm{const}$ на $(0; \infty)$;

$y(1) = \frac{1}{\pi}(2 \cdot 0 - 0) = 0.$

б) на $x < 0$ $y' = -\frac{4}{\sqrt{1 - x^2}} < 0$; $y(\alpha) \downarrow$ (убывающая).

$$y(0) = \frac{1}{\pi}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi\right) = 0;$$

$$y(-1) = \frac{1}{\pi}(2 \cdot \pi - 0) = 2;$$



значит $E(y) = [0; 2]$ на $[-1; 1]$.

2) $y = \dfrac{2}{\pi}\left(2\operatorname{arctg} x - \arccos\dfrac{1-x^2}{1=x^2}\right) \quad E(y) =?$

Пусть $\operatorname{arctg} x = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = x$,

причем $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$,

значит $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \cos 2\alpha.$

Отсюда следует, что $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \arccos(\cos 2\alpha)$, где

$$\arccos(\cos 2\alpha) = \begin{cases} 2\alpha - 2\pi k,\ 2\pi k \leqslant 2\alpha \leqslant 2\pi k + \pi \\ -2\alpha + 2\pi k,\ (2k-1)\pi \leqslant 2\alpha \leqslant 2\pi k \end{cases}.$$

Покажем, что это возможно.

а) в первом случае при $k=0 \quad 0 \leqslant 2\alpha \leqslant \pi; \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$,

но по определению $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$,

значит на $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right) \quad \arccos(\cos 2\alpha) = 2\alpha$,

тогда на $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right) \quad y(\alpha) = \dfrac{2}{\pi}(2\alpha - 2\alpha) = 0.$

б) Во втором случае при $k = 0$

$-\pi \leqslant 2\alpha \leqslant 0; \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant 0.$

Учитывая, что $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ на $\left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$,

$y(\alpha) = \dfrac{2}{\pi}\,(2\alpha - (-2\alpha)) = \dfrac{8\alpha}{\pi}$ —

возрастающая линейная функция.

$y\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -4; \quad y(0) = 0.$

Т. е на $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \quad E(y) = (-4; 0].$

3) $y = \dfrac{1}{\pi}\left(\arcsin 2x - \arcsin \dfrac{2x+\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{2}}\right); \quad E(y) = ?$

Пусть $\arcsin 2x = \alpha$, где $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, тогда $\sin\alpha = 2x$,

значит $\dfrac{2x+\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sin\alpha + \sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sqrt{2}} =$

$= \dfrac{\sin\alpha + |\cos\alpha|}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sqrt{2}} = \left(\text{на } \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \quad \cos\alpha \geqslant 0\right)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha = \sin\alpha\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha =$

$= \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right).$

Так как $\arcsin\left(\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\right) =$

$$= \begin{cases} \alpha + \dfrac{\pi}{4} - 2\pi k, & -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant \alpha + \dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi - \alpha & \\ \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, & \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant \alpha + \dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{3}{2}\pi + 2\pi k \end{cases},$$

то рассмотрим при $k = 0$

а) первый случай $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha + \dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$,

т. е $-\dfrac{3}{4}\pi \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, но $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$,

значит на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{4}\right]$ $\arcsin\left(\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \alpha + \dfrac{\pi}{4}$,

тогда на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{4}\right]$

$y(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}\left(\alpha - \arcsin\left(\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\right) =$

$= \dfrac{1}{\pi}\left(\alpha - \alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{4}.$

б) на $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ будет находиться уже в условиях второго случая при $k = 0$.

Действительно, если $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{3}{4}\pi$, значит на $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$

$$y(\alpha) = \frac{1}{\pi}\left(\alpha - \arcsin\left(\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\alpha - \frac{3}{4}\pi + \alpha\right) = \frac{1}{\pi}\left(2\alpha - \frac{3}{4}\pi\right).$$

Так как $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} \leqslant 2\alpha \leqslant \pi$, а значит $-\frac{\pi}{4} \leqslant 2\alpha - \frac{3}{4}\pi \leqslant \frac{\pi}{4}$, т. е. $y(\alpha) \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

Подводя итоги, приходим к выводу, что для функции $y(x) = \frac{1}{\pi}\left(\arcsin 2x - \arcsin\frac{2x + \sqrt{1 - 4x^2}}{\sqrt{2}}\right)$

$E(y) = \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

Системы тригонометрических уравнений

Практикум 17 (Системы уравнений)

Решите системы:

1) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 0 \\ x - y = \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$;

2) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$;

3) $\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ x + y = -\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$;

4) $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ y - x = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$;

5) $\begin{cases} \sin x - 2\sin y = 0 \\ x - y = \dfrac{5\pi}{3} \end{cases}$;

6) $\begin{cases} 2\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin y = \dfrac{1}{2}\cos y \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$;

7) $\begin{cases} \cos x + \cos y = -\sqrt{3} \\ |x + y| = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$;

8) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ |x - y| = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$.

Решение практикума 17 (Системы уравнений)

Решите системы:

1) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 0 \\ x - y = \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$.

$\begin{cases} 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2} = 0 \\ x - y = \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3} = 0 \\ x = y + \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$;

$\begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2} = 0 \\ x = y + \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x = y + \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$;

$\begin{cases} \dfrac{y + y + \frac{4\pi}{3}}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x = y + \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} y + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x = y + \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$;

$\begin{cases} y = -\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4\pi}{3} + \pi k \end{cases}$; $\begin{cases} y = -\dfrac{\pi}{6} + \pi k \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + \pi k \end{cases}$.

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{7\pi}{6} + \pi k; -\dfrac{\pi}{6} + \pi k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$.

$\begin{cases} 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2} = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2} = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$;

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = 2\pi k \\ x = \dfrac{\pi}{3} - y \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{\pi}{3} - y - y}{2} = 2\pi k \\ x = \dfrac{\pi}{3} - y \end{cases}; \quad \begin{cases} y - \dfrac{\pi}{6} = 2\pi n \quad (n = -k) \\ x = \dfrac{\pi}{3} - y \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} - 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \dfrac{\pi}{6} - 2\pi n \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{6} - 2\pi n; \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

3) $$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ x + y = -\dfrac{\pi}{6} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right] = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ x + y = -\dfrac{\pi}{6} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \cos(x-y)\right] = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ x + y = -\dfrac{\pi}{6} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \cos(x-y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x + y = -\dfrac{\pi}{6} \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos(x-y) = 0 \\ y = -x - \dfrac{\pi}{6} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ y = -x - \dfrac{\pi}{6} \end{cases}; \quad \begin{cases} x + x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ y = -x - \dfrac{\pi}{6} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} + \pi k \\ y = -x - \dfrac{\pi}{6} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}k \\ y = -x - \dfrac{\pi}{6} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}k \\ y = -\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{2}k - \dfrac{\pi}{6} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}k \\ y = -\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2}k \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}k; -\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2}k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4) $$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ y - x = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ y - x = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ y - x = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y - x = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin(x+y) = 0 \\ y = x + \dfrac{3\pi}{4} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + y = \pi k \\ y = x + \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x + x + \dfrac{3\pi}{4} = \pi k \\ y = x + \dfrac{3\pi}{4} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}k \\ y = -\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}k + \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}k \\ y = \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}k \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\left(-\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}k; \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5) $\begin{cases} \sin x - 2\sin y = 0 \\ x - y = \dfrac{5\pi}{3} \end{cases}.$

$$\begin{cases} \sin\left(y + \dfrac{5\pi}{3}\right) - 2\sin y = 0 \\ x = y + \dfrac{5\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \sin y \cdot \cos\dfrac{5\pi}{3} + \cos y \cdot \sin\dfrac{5\pi}{3} - 2\sin y = 0 \\ x = y + \dfrac{5\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos y - 2\sin y = 0 \\ x = y + \dfrac{5\pi}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} -\dfrac{3}{2}\sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos y \\ x = y + \dfrac{5\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x = y + \dfrac{5\pi}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} y = -\dfrac{\pi}{6} + \pi k \\ x = y + \dfrac{5\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{\pi}{6} + \pi k \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{5\pi}{3} + \pi k \end{cases}; \quad \begin{cases} y = -\dfrac{\pi}{6} + \pi k \\ x = \dfrac{3\pi}{2} + \pi k \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\left(1{,}5\pi + \pi k; -\dfrac{\pi}{6} + \pi k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

6) $\begin{cases} 2\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin y = \dfrac{1}{2}\cos y \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}.$

$$\begin{cases} 2\cos x = \dfrac{1}{2}\cos y + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin y \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos y+\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin y \\ x=\frac{\pi}{3}-y \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right) \\ x=\frac{\pi}{3}-y \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right)=0 \\ x=\frac{\pi}{3}-y \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{3}-y=\frac{\pi}{2}+\pi k \\ x=\frac{\pi}{3}-y \end{cases}; \quad \begin{cases} -y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\pi k \\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\pi k \end{cases};$$

$$\begin{cases} y=-\frac{\pi}{6}-\pi k \\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; -\frac{\pi}{6}-\pi k\right) \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

7) $\begin{cases} \cos x+\cos y=-\sqrt{3} \\ |x+y|=\frac{\pi}{3} \end{cases}.$

$$\begin{cases} 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}=-\sqrt{3} \\ |x+y|=\frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

Так как $y=\cos x$ — четная, то

$$\begin{cases} 2\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{x-y}{2}=-\sqrt{3} \\ |x+y|=\frac{\pi}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} \sqrt{3}\cos\frac{x-y}{2}=-\sqrt{3} \\ |x+y|=\frac{\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos\frac{x-y}{2}=-1 \\ |x+y|=\frac{\pi}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x-y}{2}=\pi+2\pi k \\ |x+y|=\frac{\pi}{3} \end{cases};$$

$$\left\{\begin{array}{l} x-y=2\pi+4\pi k \\ \left[\begin{array}{ll} x+y=\dfrac{\pi}{3} & \text{①}+\text{②} \\ x+y=-\dfrac{\pi}{3} & \text{②}-\text{①} \end{array}\right. \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 2x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi+4\pi k \\ 2y=\dfrac{\pi}{3}-2\pi-4\pi k \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 2x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi+4\pi k \\ 2y=-\dfrac{\pi}{3}-2\pi-4\pi k \end{array}\right. \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k \\ y=-\dfrac{5\pi}{6}-2\pi k \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k \\ y=-\dfrac{7\pi}{6}-2\pi k \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k; -\dfrac{5\pi}{6}-2\pi k\right);\right.$

$\left.\left(\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k; -\dfrac{7\pi}{6}-2\pi k\right) \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$

8) $\left\{\begin{array}{l} \sin x+\sin y=1 \\ |x-y|=\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right..$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=1 \\ |x-y|=\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right..$$

Так как $y=\cos x$ — четная, то

$$\left\{\begin{array}{l} 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=1 \\ |x-y|=\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.; \quad \left\{\begin{array}{l} \sin\dfrac{x+y}{2}=1 \\ |x-y|=\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.;$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{2}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k \\ |x-y|=\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.; \quad \left\{\begin{array}{l} x+y=\pi+4\pi k \\ \left[\begin{array}{l} x-y=\dfrac{2\pi}{3} \\ x-y=-\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+y=\pi+4\pi k \\ x-y=\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=\pi+4\pi k \\ x-y=-\dfrac{2\pi}{3} \end{cases}\end{array}\right. \quad \begin{array}{l} ① + ② \\ ① - ② \end{array};$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 2x=\dfrac{5\pi}{3}+4\pi k \\ 2y=\dfrac{\pi}{3}+4\pi k \end{cases} \\ \begin{cases} 2x=\dfrac{\pi}{3}+4\pi k \\ 2y=\dfrac{5\pi}{3}+4\pi k \end{cases}\end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k \\ y=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k \\ y=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k \end{cases}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k; \dfrac{\pi}{6}+2\pi k\right); \left(\dfrac{\pi}{6}+2\pi k; \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k\right) \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Практикум 18 (Системы уравнений)

Решите системы:

1) $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \sin y \cdot \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases};$

2) $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2} \end{cases};$

3) $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cdot \cos y \\ \cos^2 x = \sin x \cdot \sin y \end{cases};$

4) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases};$

5) $\begin{cases} 4\,\mathrm{tg}\,3x = 3\,\mathrm{tg}\,2y \\ 2\sin x \cdot \cos(x-y) = \sin y \end{cases};$

6) $\begin{cases} 4x + 3\cos x = 8y + 3\cos 2y \\ 4x^2 - xy - 3 = x - y \end{cases};$

7) $\begin{cases} \mathrm{tg}^2\,\pi x + \sqrt[4]{\sin \pi y} = 0 \\ (y^3 - xy - 6)\sqrt{4 \cdot 3^{1-x} - 2 - \left(\dfrac{1}{9}\right)^x} = 0 \end{cases};$

8) $\begin{cases} \sin^4 \pi x + \sqrt{1 + \cos \pi y} = 0 \\ (x^3 + y^2 + 2xy - 5)\sqrt{7 \cdot 2^{y+2} - 3 \cdot 4^y - 10} = 0 \end{cases}.$

Решение практикума 18 (Системы уравнений)

Решите системы:

1) $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} & ①+② \\ \sin y \cdot \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{4} & ①-② \end{cases};$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y = (-1)^k\dfrac{\pi}{3} + \pi k & ①+② \\ x-y = \pi n & ①-② \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x = (-1)^k\dfrac{\pi}{3} + \pi k + \pi n \\ 2y = (-1)^k\dfrac{\pi}{3} + \pi k - \pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = (-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}k + \dfrac{\pi}{2}n \\ y = (-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}k - \dfrac{\pi}{2}n \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\left((-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}(k+n); (-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}(k-n)\right) \mid k,n \in \mathbb{Z}\right\}.$

2) $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{2} & ①+② \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2} & ②-① \end{cases};$

$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y = 1 \\ \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ \cos(x+y) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-y = 2\pi k & ①+② \\ x+y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n & ②-① \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x = 2\pi k + \dfrac{\pi}{2} + \pi n \\ 2y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n - 2\pi k \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}n + \pi k \\ y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}n - \pi k \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}(n+2k); \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}(n-2k)\right) \mid k,n \in \mathbb{Z}\right\}.$

3) $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cdot \cos y & ① + ② \\ \cos^2 x = \sin x \cdot \sin y & ② - ① \end{cases};$

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \cdot \sin y - \cos x \cdot \cos y \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ \cos 2x = -\cos(x+y) \end{cases}; \quad \begin{cases} x - y = 2\pi k \\ \cos 2x = -\cos(x+y) \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = x - 2\pi k \\ \cos 2x = -\cos(x + x - 2\pi k) \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x - 2\pi k \\ \cos 2x = -\cos 2x \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = x - 2\pi k \\ \cos 2x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x - 2\pi k \\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}n - 2\pi k \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}n \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}n; \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}(n - 4k) \right) \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$

4) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2\sin\dfrac{x+y}{2} \cdot \cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 2\cos\dfrac{x+y}{2} \cdot \cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad ① : ②;$

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = 1 \quad \left(\cos\frac{x-y}{2} \neq 0 \right);$$

$\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, т. е. $x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, тогда

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \cos x + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k - x \right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \cos x + \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4} \right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k \\ x-\dfrac{\pi}{4}=\pm\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}+2\pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k-\dfrac{\pi}{4}\mp\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}-2\pi n \\ x=\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}+2\pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{\pi}{4}\mp\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}+2\pi(k-n) \\ x=\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}+2\pi n \end{cases}.$$

Ответ:

$$\left\{\left(\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}\mp\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}+2\pi(k-n)\right)\Big|\ k,n\in\mathbb{Z}\right\}.$$

5) $\begin{cases} 4\operatorname{tg}3x=3\operatorname{tg}2y \\ 2\sin x\cdot\cos(x-y)=\sin y \end{cases};$

$$\begin{cases} 4\operatorname{tg}3x=3\operatorname{tg}2y \\ \sin(x+x-y)+\sin(x-x+y)=\sin y \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4\operatorname{tg}3x=3\operatorname{tg}2y \\ \sin(2x-y)=0 \end{cases};\quad \begin{cases} 4\operatorname{tg}3x=3\operatorname{tg}2y \\ 2x-y=\pi k \end{cases};\quad \begin{cases} 4\operatorname{tg}3x=3\operatorname{tg}4x \\ y=2x-\pi k \end{cases}.$$

Рассмотрим отдельно решение уравнения

$4\operatorname{tg}3x-3\operatorname{tg}4x=0.\quad 4\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}-3\dfrac{\sin 4x}{\cos 4x}=0;$

$D(y):\ \begin{cases} \cos 3x\neq 0 \\ \cos 4x\neq 0 \end{cases};$

$4\sin 3x\cdot\cos 4x-3\sin 4x\cdot\cos 3x=0;$

$2\sin 7x-2\sin x-1{,}5\sin 7x-1{,}5\sin x=0;$

$\sin 7x-7\sin x=0;\quad \sin 7x+\sin x-8\sin x=0;$

$2\sin 4x\cdot\cos 3x-8\sin x=0;$

$4\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x-8\sin x=0;$

$8\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x-8\sin x=0.$

а) $\sin x = 0$; $x = \pi n$, тогда $\begin{cases} x = \pi n \\ 2x - y = \pi k \end{cases}$; $\begin{cases} x = \pi n \\ y = 2\pi n - \pi k \end{cases}$;

б) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x - 1 = 0$;

$\frac{1}{2}[\cos 4x + \cos 2x] \cdot \cos 2x - 1 = 0$;

$(2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x) \cdot \cos 2x - 2 = 0$.

Пусть $\cos 2x = t \in [-1; 1]$; $2t^3 + t^2 - t - 2 = 0$;

$f(1) = 0$, тогда $2(t-1)(t^2 + t + 1) + t(t-1) = 0$;

$(t-1)(2t^2 + 3t + 2) = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ 2t^2 + 3t + 2 = 0 \quad (D < 0) \end{array}\right.$;

$\cos 2x = 1$; $2x = 2\pi p$; $x = \pi p$.

Тогда решение совпадает со случаем а).

Ответ: $\{(\pi n; 2\pi n - \pi k) \mid k, n \in \mathbb{Z}\}$.

6) $\begin{cases} 4x + 3\cos x = 8y + 3\cos 2y \\ 4x^2 - xy - 3 = x - y \end{cases}$.

Пусть $f(x) = 4x + 3\cos x$; $f'(x) = 4 - 3\sin x > 0$,

значит функция f строго монотонная, а значит каждое свое значение принимает только один раз.

В правой части та же функция, только от $2y$. Получаем равенство $f(x) = f(2y)$. В силу монотонности это равенство равносильно

$\begin{cases} x = 2y \\ 4x^2 - xy - 3 = x - y \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2y \\ 16y^2 - 2y^2 - 3 - y = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x = 2y \\ 14y^2 - y - 3 = 0 \end{cases}$;

$y_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 168}}{28} = \dfrac{1 \pm 13}{28}$; $\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{3}{7} \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{\left(1; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{6}{7}; -\frac{3}{7}\right)\right\}$.

7) $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 \pi x + \sqrt[4]{\sin \pi y} = 0 \\ (y^3 - xy - 6)\sqrt{4 \cdot 3^{1-x} - 2 - \left(\dfrac{1}{9}\right)^x} = 0 \end{cases}.$

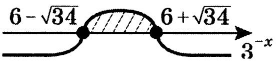
Так как $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 \pi x \geqslant 0 \\ \sqrt[4]{\sin \pi y} \geqslant 0 \end{cases}$, то $\begin{cases} \operatorname{tg} \pi x = 0 \\ \sin \pi y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \pi x = \pi k \\ \pi y = \pi n \end{cases}$;

$\begin{cases} x = k \\ y = n \end{cases} \Big| \, k, n \in \mathbb{Z}$, т. е. и x, и y — целые числа.

Из второго уравнения для существования корней необходимо

$4 \cdot 3^{1-x} - 2 - \left(\dfrac{1}{9}\right)^x \geqslant 0; \quad 12 \cdot 3^{-x} - 2 - 3^{-2x} \geqslant 0;$

$-\left(3^{-2x} - 12 \cdot 3^{-x} + 2\right) \geqslant 0; \quad (3^{-x}) = 6 \pm \sqrt{36 - 2} = 6 \pm \sqrt{34};$



$6 + \sqrt{34} \geqslant 3^{-x} \geqslant 6 - \sqrt{34}.$

Учтем, что $11 < 6 + \sqrt{34} < 12$; $\dfrac{1}{12} < \dfrac{1}{6 + \sqrt{34}} < \dfrac{1}{11}$;

$\dfrac{1}{12} < \dfrac{6 - \sqrt{34}}{2} < \dfrac{1}{11}$; $\dfrac{1}{9} < \dfrac{1}{6} < 6 - \sqrt{34} < \dfrac{2}{11} < \dfrac{1}{3}$.

Таким образом, $11 < 6 + \sqrt{34} < 12$ и $\dfrac{1}{9} < 6 - \sqrt{34} < \dfrac{1}{3}$.

Значит для $x \in \mathbb{Z}$ $\;3^{-x} < 12$, т. е. $-x \leqslant 2$; $\;x \geqslant -2$.

Аналогично для $x \in \mathbb{Z}$ $\;3^{-x} > \dfrac{1}{9}$, т. е. $-x \geqslant -1$; $\;x \leqslant 1$.

Следовательно, возможные корни второго уравнения $x \in \{-2; -1; 0; 1\}$. Проверим их:

а) Пусть $x = -2$.

Второе уравнение приобретает вид $y^3 + 2y - 6 = 0$.

Его целые корни могут быть только числами ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.

Проверкой убеждаемся, что целых корней у уравнения нет.

б) Пусть $x=-1$. Получаем уравнение $y^3+y-6=0$.

Аналогично целых корней у него нет.

в) Пусть $x=0$. Имеем уравнение $y^3-6=0$ — также целых корней нет.

г) Пусть $x=1$. У уравнения $y^3-y-6=0$ есть единственный целый корень $y=2$.

Итак, единственная пара решений системы — $(1;2)$.

Ответ: $(1;2)$.

8) $\begin{cases} \sin^4 \pi x+\sqrt{1+\cos \pi y}=0 \\ (x^3+y^2+2xy-5)\sqrt{7\cdot 2^{y+2}-3\cdot 4^y-10}=0 \end{cases}$.

Решение проведем аналогично.

Из первого уравнения

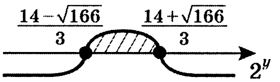
$\begin{cases} \sin^4 \pi x=0 \\ 1+\cos \pi y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} \pi x=\pi k \\ \pi y=\pi+2\pi n \end{cases}$; $\begin{cases} x=k \\ y=1+2n \end{cases}$.

Значит, решениями системы могут быть только целые x и целые нечетные y.

Второе уравнение системы имеет решение, если

$-\left(3\cdot(2^y)^2-28\cdot 2^y+10\right)\geqslant 0$;

$$(2^y)_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{196-30}}{3}=\frac{14\pm\sqrt{166}}{3}.$$



$$\frac{14+\sqrt{166}}{3}\geqslant 2^y\geqslant\frac{14-\sqrt{166}}{2}.$$

Учтем, что $\frac{1}{3}<\frac{14-\sqrt{166}}{3}<\frac{1}{2}$; $8<\frac{14+\sqrt{166}}{3}<9$.

Рассуждая аналогично предыдущей задаче, получим $y\in\{-1;1;3\}$.

Проверим, какие из этих чисел действительно являются корнями.

а) Пусть $y = -1$.

Из второго уравнения $x^3+1-2x-5=0$; $x^3-2x-4=0$; $x = 2$ — корень. Разделив уголком, получим

$$\frac{x^3 - 2x - 4}{x - 2} = x^2 + 2x + 2; \quad (x - 2)(x^2 + 2x + 2) = 0.$$

Множитель $x^2 + 2x + 2$ корней не имеет, значит $x = 2$ — единственный корень, и пара $(2; -1)$ — решение системы.

б) Пусть $y = 1$.

Второе уравнение принимает вид $x^3 + 2x - 4 = 0$.

Проверкой убеждаемся, что из возможных целых корней ±1, ±2, ±4 ни один не является корнем.

в) Пусть $y = 3$.

Тогда имеем уравнение $x^3 + 6x + 4 = 0$. Аналогично убеждаемся, что целых корней нет.

Ответ: $(2; -1)$.

7

Тренировочные карточки

Карточка 1

1. Разложите на множители:

1) $\sin\dfrac{5\alpha}{3}+\sin\dfrac{3\alpha}{2}$;

2) $\cos 10\alpha\cdot\cos 8\alpha+\cos 8\alpha\cdot\cos 6\alpha$;

3) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$.

2. Докажите тождества:

1) $\dfrac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$;

2) $\dfrac{\sin^2 3\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2 3\alpha-\cos 5\alpha\cdot\cos\alpha}=2\cos 2\alpha$;

3. Вычислите:

1) $\sin^2 68^\circ-\sin^2 38^\circ-0{,}5\sin 106^\circ+3$;

2) $\dfrac{3\,(\cos 20^\circ-\sin 20^\circ)}{\sqrt{2}\sin 25^\circ}$;

3) $(\operatorname{tg} 14^\circ+\operatorname{ctg} 28^\circ)\cdot\cos 14^\circ\cdot\sin 14^\circ$;

4) $$\frac{\sin^2\frac{\pi}{5}\cdot\cos^2\frac{\pi}{5}}{1-\cos^4\frac{2\pi}{5}-\cos^2\frac{2\pi}{5}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{5}};$$

5) $$\frac{5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14}\right)-\sin\frac{\pi}{14}\right)}{\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{14}};$$

6) $$\frac{\sin^2 32^\circ+\sin 26^\circ}{5\cos^2 32^\circ};$$

7) $$\frac{\cos 9^\circ+\cos 51^\circ+\sqrt{3}\cos 21^\circ}{2\sqrt{3}\cos 21^\circ};$$

8) $$\frac{2\cos^2 16^\circ+2\cos^2 76^\circ-3}{\cos^2 44^\circ};$$

9) $$\frac{3\cos 196^\circ+12\cos 164^\circ}{\cos 16^\circ};$$

10) $$\frac{\sin 43^\circ+\sin 17^\circ}{2\cos 13^\circ+3\sin 77^\circ};$$

11) $$\frac{3\cos 23^\circ-3\sin 113^\circ+\cos 203^\circ}{\cos 13^\circ\cdot\cos 10^\circ-\cos 80^\circ\cdot\cos 77^\circ}.$$

Карточка 2

1. Разложите на множители:

1) $1+\sin\dfrac{2\alpha}{3}$;

2) $\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha - \cos 4\alpha$;

3) $1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$.

2. Докажите тождества:

1) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$;

2) $\dfrac{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - 1} = \operatorname{ctg}^2\alpha$.

3. Вычислите:

1) $\sin 43^\circ\cdot\sin 17^\circ + \sin^2 13^\circ - 2$;

2) $\dfrac{(1+\operatorname{tg}10^\circ)\cdot\cos 10^\circ}{\sqrt{2}\sin 55^\circ}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}15^\circ - \operatorname{ctg}15^\circ}{\operatorname{ctg}30^\circ}$;

4) $\sin\dfrac{2\pi}{7}\cdot\dfrac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}\right)\cdot\cos^2\frac{\pi}{14}}{1+\cos\frac{\pi}{7}}$;

5) $\dfrac{3\left(\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{10}\right)}{2\cos\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}}$;

6) $\operatorname{tg}7^\circ\cdot\left(\dfrac{1}{\sin 14^\circ}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}14^\circ}\right)$;

7) $\dfrac{\cos 48^\circ+\cos 42^\circ+\sqrt{2}\cos 3^\circ}{\sqrt{2}\sin 87^\circ}$;

8) $\cos^2 23^\circ + \cos^2 83^\circ + \cos^2 37^\circ + 3$;

9) $\dfrac{3\cos 9^\circ + \sin 81^\circ}{\sin 21^\circ + \sin 39^\circ}$;

10) $\dfrac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \sin 44^\circ + \sin 48^\circ}{2\sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ}$;

11) $\dfrac{5\cos 63^\circ + 2\sin 27^\circ - 4\sin 207^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \sin 78^\circ + \sin 75^\circ \cdot \sin 12^\circ}$.

Карточка 3

1. Разложите на множители:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{4}\right)$;

2) $\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\cos 6\alpha$;

3) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$.

2. Докажите тождества:

1) $\dfrac{\cos 4\alpha+\cos 2\alpha}{\cos^2\frac{3\alpha}{2}-\sin^2\frac{3\alpha}{2}}=2\cos\alpha$;

2) $\dfrac{\cos^2 2\alpha-4\cos^2\alpha+3}{\cos^2 2\alpha+4\cos^2\alpha-1}=\operatorname{tg}^4\alpha$.

3. Вычислите:

1) $\cos^2 36^\circ-\cos^2 120^\circ-0{,}5\sin 18^\circ-0{,}5$;

2) $\dfrac{\sqrt{2}(\cos 25^\circ-\cos 65^\circ)}{\sin 20^\circ}$;

3) $\dfrac{(\operatorname{tg} 26^\circ-\operatorname{ctg} 52^\circ)\cdot\cos 26^\circ\cdot\sin 52^\circ}{\cos 78^\circ}$;

4) $\dfrac{\left(1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)^2\cdot\cos^2\frac{\pi}{8}}{\sin^2\frac{\pi}{8}}$;

5) $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{9}}{5\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{9}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{7}-\frac{2\pi}{9}\right)}$;

6) $\dfrac{\cos^2 34^\circ-\sin 22^\circ}{4\sin^2 34^\circ}$;

7) $\dfrac{\cos 73^\circ+\cos 47^\circ+2\cos 13^\circ}{2\cos 13^\circ}$;

8) $\dfrac{2\sin^2 85^\circ + 2\sin^2 25^\circ - 3}{4\cos^2 55^\circ}$;

9) $\dfrac{\cos 71^\circ + \cos 49^\circ}{7\cos 11^\circ - 3\sin 79^\circ}$;

10) $\dfrac{\cos 16^\circ - \cos 24^\circ - \cos 32^\circ + \cos 40^\circ}{\cos 86^\circ \cdot \sin 8^\circ \cdot \cos 28^\circ}$;

11) $\dfrac{3\sin 124^\circ - \cos 146^\circ - 2\cos 34^\circ}{\cos 49^\circ \cdot \cos 15^\circ + \cos 41^\circ \cdot \cos 75^\circ}$.

Карточка 4

1. Разложите на множители:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)$;

2) $\sin 10\alpha\cdot\sin 8\alpha+\sin 8\alpha\cdot\sin 6\alpha$;

3) $\cos\alpha+2\sin 2\alpha-\cos 3\alpha$.

2. Докажите тождества:

1) $\dfrac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=2$;

2) $\dfrac{1+2\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha-2\cos\alpha+1}=-\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

3. Вычислите:

1) $\sin 49^\circ\cdot\sin 11^\circ+\cos^2 71^\circ+1$;

2) $\dfrac{\sin 40^\circ-\cos 40^\circ}{\sqrt{2}\cos 85^\circ}$;

3) $\sin 24^\circ\cdot(\operatorname{tg} 12^\circ+\operatorname{ctg} 12^\circ)$;

4) $\dfrac{\left(\sin\frac{\pi}{9}-\cos\frac{\pi}{9}\right)^2-1}{\sin\frac{2\pi}{9}}$;

5) $\dfrac{\cos\frac{2\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{3\pi}{10}\cdot\sin\frac{\pi}{10}}$;

6) $\dfrac{\sin 10^\circ\cdot(1+\operatorname{tg}^2 5^\circ)}{\operatorname{tg} 5^\circ}$;

7) $\dfrac{\cos 85^\circ-\cos 35^\circ-\sqrt{3}\cos 65^\circ}{\sqrt{3}\sin 25^\circ}$;

8) $\cos^2 86^\circ+\cos^2 34^\circ-\cos^2 64^\circ+3$;

9) $\dfrac{\cos 49^\circ+2\sin 41^\circ}{\sin 79^\circ-\sin 19^\circ}$;

10) $\dfrac{\sin 48^\circ-\sin 60^\circ-\sin 72^\circ+\sin 84^\circ}{4\cos 84^\circ\cdot\sin 12^\circ\cdot\sin 66^\circ}$;

11) $\dfrac{6\sin 25^\circ-3\cos 65^\circ+7\sin 155^\circ}{\cos 53^\circ\cdot\cos 12^\circ-\cos 37^\circ\cdot\cos 78^\circ}$.

Карточка 5

Вычислите:

1) $\dfrac{2+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1+5\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$;

2) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, если $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

3) $\operatorname{tg} x$, если $\sin(x+30^\circ)+\sin(x-30^\circ) = 2\sqrt{3}\cos x$;

4) $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{1}{4}$;

5) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2$;

6) $\sin(\pi+2\alpha)$, если $\sin\alpha+\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

7) $2\sin 3\alpha\cdot\sin 2\alpha+\cos 5\alpha$, если $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}6}$;

8) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}6$;

9) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{3}$;

10) $\cos\alpha+\cos\beta$, если $\alpha-\beta = \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha+\beta = 4\pi$;

11) $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}$, $\alpha-\beta = \dfrac{\pi}{2}$;

12) $\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}$, если $\sin x = 0{,}21$;

13) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Карточка 6

Вычислите:

1) $\dfrac{\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}{5\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 3}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$;

2) $\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2}$;

3) $\operatorname{tg} x$, если $\sin(x - 45^\circ) + \sin(x + 45^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x$;

4) $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}25$;

5) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = -2$;

6) $\sin\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$, если $\cos\alpha = -\sqrt{0{,}1}$;

7) $2\sin 3\alpha\cdot\cos 5\alpha - \sin 8\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}9$;

8) $\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}2$;

9) $\cos\left(\dfrac{4\pi}{3} - 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

10) $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$, если $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{3}$;

11) $\cos(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}$, $\alpha + \beta = 1{,}5\pi$;

12) $\operatorname{tg} x$, если $\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2} = \sqrt{0{,}4}$;

13) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}8$.

Карточка 7

Вычислите:

1) $\dfrac{2+3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=4$;

2) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, если $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$;

3) $\sin x$, если $\sin(x+30^\circ)+\sin(x-30^\circ)=\sqrt{3}$;

4) $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$;

5) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=3$;

6) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\alpha\right)$, если $\sin\alpha=-\sqrt{0{,}7}$;

7) $2\sin 5\alpha\cdot\cos 3\alpha-\sin 8\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{0{,}6}$;

8) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha=0{,}8$;

9) $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-3$;

10) $\sin\alpha+\sin\beta$, если $\alpha+\beta=3\pi$, $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{3}$;

11) $\sqrt{2}\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}$, $\alpha+\beta=\dfrac{5\pi}{4}$;

12) $\cos x$, если $\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}=\sqrt{0{,}5}$;

13) $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=1{,}2$.

Карточка 8

Вычислите:

1) $\dfrac{2+5\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$;

2) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, если $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$;

3) $\operatorname{ctg}x$, если $\cos(x+30^\circ)+\cos(x-30^\circ)=\sqrt{3}\sin x$;

4) $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{4}$;

5) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=3$;

6) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)$, если $\cos\alpha=-\sqrt{0{,}2}$;

7) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha=-0{,}6$;

8) $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}-2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$;

9) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$, если $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{2}$, $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$;

10) $3\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha\cdot\cos\beta=-\dfrac{1}{2}$, $\alpha-\beta=\dfrac{7\pi}{2}$;

11) $\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}$, если $\sin x=-0{,}44$;

12) $2\cos 3\alpha\cdot\cos 2\alpha-\cos 5\alpha$, если $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{0{,}6}$;

13) $\dfrac{1}{\sin^4\alpha}+\dfrac{1}{\cos^4\alpha}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Карточка 9

1. Вычислите:

1) $\sqrt{2}\cos 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 73^\circ \cdot \operatorname{tg} 73^\circ - \sqrt{3}\sin 780^\circ$;

2) $7\sin 75^\circ \cos 75^\circ$;

3) $\operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 4^\circ \cdot \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 86^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ$;

4) $\left(\operatorname{tg} 40^\circ - \cos^{-1} 40^\circ\right)\left(\cos 40^\circ - \operatorname{ctg} 40^\circ\right)^{-1} - \dfrac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ}$;

5) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = -0{,}5$.

2. Найдите минимальное значение функции (при $\operatorname{tg}\alpha > 0$)

$$f(\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

3. Решите уравнения:

1) $2\cos^2\dfrac{\pi x}{6} + 3\sin\dfrac{\pi x}{6} = 0$ при $|x| \leqslant 1$;

2) $\operatorname{tg}(\pi x) - \sqrt{3}\operatorname{ctg}(\pi x) = \sqrt{3} - 1$ при $x \in [-2{,}5; -2]$.

4. *Вычислите:*

1) $\dfrac{2}{\pi}\left(\arcsin\dfrac{3}{4} + \arccos\dfrac{3}{4}\right)$;

2) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{15}{17}\right)$.

Карточка 10

1. Вычислите:

1) $(6\operatorname{tg}^2 30^\circ + 2\cos 180^\circ)\cdot\sin 93^\circ$;

2) $\dfrac{\sin 20^\circ\cdot\cos 10^\circ\cdot\cos 60^\circ + \cos 160^\circ\cdot\cos 100^\circ\cdot\sin 150^\circ}{\sin 21^\circ\cdot\cos 9^\circ + \cos 159^\circ\cdot\cos 99^\circ}$;

3) $128\cdot\sin^2 20^\circ\cdot\sin^2 40^\circ\cdot\sin^2 60^\circ\cdot\sin^2 80^\circ$;

4) $\dfrac{\sin^4 3 + \cos^4 3 - 1}{\cos^6 3 + \sin^6 3 - 1} : \dfrac{1}{3}$.

2. Найдите наименьшее значение функции

$$f(\alpha) = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

3. Вычислите:

1) $\dfrac{1}{\pi}\left(\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;

2) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{5} - 2\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

4. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{tg}(2\pi x) = \operatorname{tg}(3\pi x)$, $\quad 2{,}4 < x < 3{,}2$;

2) $2\cos^2(\pi x) = \sqrt{2}\sin(\pi x)$; $\quad |x| \leqslant \dfrac{1}{2}$;

3) $\sin^3\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) - \cos^3\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$; $1{,}5 < x < 3$.

Карточка 11

1. Вычислите:

1) $\dfrac{6\sin 390^\circ \cdot \cos(-390^\circ)}{\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ}$;

2) $\sin^6 15^\circ + 3\sin^2 15^\circ \cdot \cos^2 15^\circ + \cos^6 15^\circ$;

3) $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ$;

4) $\sqrt{26}\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{5}{12}$ при $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

5) $\sqrt{3}\sin 2\alpha + \sin\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ при $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

6) $\dfrac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}(-1) + \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;

7) $\sin\left(2\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$.

2. Решите уравнения:

1) $2\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) + \cos(2\pi x) = 3$ при $10 \leqslant x \leqslant 11$;

2) $5\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi x}{3}\right) - \cos^{-2}\left(2\pi + \dfrac{\pi x}{3}\right) = 3$ при $1 \leqslant x \leqslant 4$;

3) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{5} - 2\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = x^2 - 3x - 4{,}5$.

Карточка 12

1. Вычислите:

1) $\left(2\cos 30^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \operatorname{ctg} 960^\circ\right)^{-1}$;

2) $\sin 167^\circ \cdot \sin 107^\circ + \sin 257^\circ \cdot \sin 197^\circ$;

3) $\cos 17^\circ \cdot \cos 73^\circ - \sin 13^\circ \cdot \cos 21^\circ - \cos 4^\circ \cdot \cos 86^\circ$;

4) $\cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$;

5) $\sin 18^\circ$;

6) $A(\alpha) = \dfrac{2\sin^2\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{3\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$;

7) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$, если $\sin 4\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ при $\dfrac{\pi}{8} < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$;

8) $\operatorname{ctg} 40^\circ - \dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg} 5^\circ} + \sqrt{\operatorname{tg} 5^\circ}}{\sqrt{\operatorname{ctg} 5^\circ} - \sqrt{\operatorname{tg} 5^\circ}}$.

2. Решите уравнения:

1) $\sin^3\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \cdot \cos^3\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$ при $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0$;

2) $\cos(2\operatorname{arctg} 7) - \sin(4\operatorname{arctg} 3) = x^2 - 4x - 5$.

Карточка 13

1. Решите уравнения:

1) $\sqrt{3}+2\cos\left(\dfrac{\pi x}{9}\right)=0$ при $8<x<20$;

2) $\sin(x-30^\circ)\cdot\cos 2x=\sin(x-30^\circ)$;

3) $\dfrac{5}{1+\operatorname{tg}^2 x}=3\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos x$;

4) $\cos 3x=\sin 2x$;

5) $\dfrac{\sin 6x}{\sin 4x}=1$ при $170^\circ<x<200^\circ$;

6) $\cos(70^\circ+x)\cdot\cos(20^\circ-x)=\dfrac{1}{2}$;

7) $\sin x+\sin 2x=\cos x+2\cos^2 x$;

8) $\cos 2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=2{,}5$;

9) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x$;

10) $\sin^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cdot\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0$;

11) $\sin 2x+\operatorname{tg} x=2$.

2. Докажите тождество $\dfrac{(1+\operatorname{tg}\alpha)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

3. Вычислите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{2}+1$.

4. Решите неравенство $\sqrt{5-2\sin x}\geqslant 6\sin x-1$.

5. Постройте график

$$y(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\frac{(1-\operatorname{tg} x)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}.$$

Карточка 14

1. Решите уравнения:

1) $1 + 2\sin\frac{\pi x}{3} = 0$ при $2 < x < 4$;

2) $\cos 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x$;

3) $\sin 2x = \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \sin x$;

4) $\sin 2x + \cos 3x = 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

5) $\cos 5x + \cos x = -2\cos 3x$;

6) $2\sin(40^\circ + x) \cdot \sin(50^\circ - x) = -1$;

7) $\sin 4x = \cos^4 x - \sin^4 x$;

8) $8\cos^4 x = 11\cos 2x - 1$;

9) $\cos\frac{4x}{3} + \sin^2\frac{3x}{2} + 2\sin^2\frac{5x}{6} = \cos^2\frac{3x}{2}$;

10) $\sqrt{3}\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$;

11) $\dfrac{\sin^2 x - 2}{\sin^2 x - 4\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$.

2. Докажите тождество $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{2}$.

3. Вычислите

$\sin(\alpha - 2\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$, $\operatorname{tg}\beta = -0{,}75$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

4. Решите неравенство $\sqrt{7 - 18\operatorname{tg} x} \geqslant 6\operatorname{tg} x + 11$.

5. Постройте график:

$$y(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \frac{\operatorname{ctg} 2x \cdot (1 + \operatorname{tg} 2x)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}.$$

Карточка 15

1. Решите уравнения:

1) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$;

2) $\dfrac{\cos x}{1-\sin x} = 0$;

3) $\sin 2x = \sin 3x$;

4) $\cos(2x - 630^\circ) = \sin(4x + 540^\circ)$ при $90^\circ < x < 180^\circ$;

5) $\sin x + \sin 5x = 2\cos 2x$;

6) $\cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x$;

7) $\sin x - \cos x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$;

8) $2\sin x \cdot \sin 8x = \cos 7x$;

9) $\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sqrt{3}\sin x$;

10) $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 8x = \dfrac{1}{4}\sin 12x$;

11) $\sin^3 x \cdot (1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x \cdot (1 + \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{\sin x \cdot \cos x}$;

12) $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.

2. Докажите тождество

$$1 + 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha + 2\cos 6\alpha = \frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha}.$$

3. Вычислите $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - 4\sin 70^\circ$.

4. Постройте график $y(x) = \sin x \cdot \sqrt{\sin^2 x} - \cos x \cdot \sqrt{\cos^2 x}$.

Карточка 16

1. Решите уравнения:

1) $2\sin^2 2x + 7\sin 2x - 4 = 0$;

2) $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = 0$;

3) $\cos\dfrac{x}{3} = \cos 2x$;

4) $\sin(3x - 450^\circ) = \sin(6x - 540^\circ)$ при $0^\circ < x < 45^\circ$;

5) $\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x} = 1$ при $170^\circ < x < 280^\circ$;

6) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;

7) $\sin 2x + \cos 2x = -1$;

8) $2\sin 2x \cdot \cos x = \sin 3x$;

9) $\sin 4x + \cos 4x = \sqrt{2}\sin x$;

10) $4\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 6x$;

11) $\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) + 1 = 0$;

12) $\cos 2x + \cos x = \sin 3x$.

2. Докажите тождество

$$1 - 2\cos 4\alpha + 2\cos 8\alpha - 2\cos 12\alpha = -\frac{\cos 14\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

3. Вычислите $\operatorname{tg} 20^\circ + 4\sin 20^\circ$.

4. Постройте график $y(x) = \sin x \cdot |\operatorname{ctg} x|$.

Решение карточки 1

1. Разложите на множители:

1) $\sin\dfrac{5\alpha}{3}+\sin\dfrac{3\alpha}{2}=$

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\ \textbf{7.3}$$

$=2\sin\dfrac{19\alpha}{12}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{12}.$

2) $\cos 10\alpha\cdot\cos 8\alpha+\cos 8\alpha\cdot\cos 6\alpha=$

$=\cos 8\alpha\cdot(\cos 10\alpha+\cos 6\alpha)=$

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\ \textbf{7.1}$$

$=2\cos 8\alpha\cdot\cos 8\alpha\cdot\cos 2\alpha=2\cos^2 8\alpha\cdot\cos 2\alpha.$

3) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=$

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\ \textbf{7.3}$$

$=2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha+\sin 2\alpha=$

$=\sin 2\alpha\cdot(2\cos\alpha+1)=$

$=\sin 2\alpha\cdot 2\left(\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\right)=$

$=2\sin 2\alpha\cdot\left(\cos\alpha+\cos\dfrac{\pi}{3}\right)=$

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\ \textbf{7.1}$$

$=4\sin 2\alpha\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha-\frac{\pi}{3}}{2}\right)=$

$=4\sin 2\alpha\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right).$

2. Докажите тождества:

1) $\dfrac{\cos 3\alpha + \cos\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$

$$\mathrm{L} = \frac{\cos 3\alpha + \cos\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha} =$$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$	7.1
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$	7.4

$$= \frac{2\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L} = \operatorname{ctg}\alpha\\ \Pi = \operatorname{ctg}\alpha\end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

2) $\dfrac{\sin^2 3\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha\cdot\cos\alpha} = 2\cos 2\alpha.$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$	7.3
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$	7.4
$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$	7.7
$2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$	5.7
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$	5.1
$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$	5.2

$$\mathrm{L} = \frac{\sin^2 3\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha\cdot\cos\alpha} =$$

$$= \frac{(\sin 3\alpha - \sin\alpha)(\sin 3\alpha + \sin\alpha)}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha\cdot\cos\alpha} =$$

$$= \frac{(\sin 3\alpha - \sin\alpha)(\sin 3\alpha + \sin\alpha)}{\cos^2 3\alpha - \frac{1}{2}(\cos 6\alpha + \cos 4\alpha)} =$$

$$= \frac{2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(1 + \cos 6\alpha) - \frac{1}{2}\cos 6\alpha - \frac{1}{2}\cos 4\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin 2\alpha}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6\alpha - \frac{1}{2}\cos 6\alpha - \frac{1}{2}\cos 4\alpha} = \frac{2\sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(1-\cos 4\alpha)} = \frac{2\sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = 2\cos 2\alpha;$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{L} &= 2\cos 2\alpha \\ \Pi &= 2\cos 2\alpha \end{aligned}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

3. Вычислите:

1) $\sin^2 68° - \sin^2 38° - 0{,}5\sin 106° + 3 =$

$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$ **5.2**

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ **7.2**

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$$= \frac{1}{2}(1-\cos 136°) - \frac{1}{2}(1-\cos 76°) - 0{,}5\sin 106° + 3 =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}5\cos 136° - 0{,}5 + 0{,}5\cos 76° - 0{,}5\sin 106° + 3 =$$

$$= 0{,}5(\cos 76° - \cos 136°) - 0{,}5\sin 106° + 3 =$$

$$= 0{,}5\cdot(-2)\sin 106°\cdot\sin(-30°) - 0{,}5\sin 106° + 3 =$$

$$= 0{,}5\sin 106° - 0{,}5\sin 106° + 3 = \boxed{3}.$$

2) $\dfrac{3\,(\cos 20° - \sin 20°)}{\sqrt{2}\sin 25°} =$

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ **3.5**

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ **7.4**

$$= \frac{3\,(\cos(90° - 70°) - \sin 20°)}{\sqrt{2}\sin 25°} =$$

$$= \frac{3(\sin 70° - \sin 20°)}{\sqrt{2}\sin 25°} =$$

$$= \frac{3\cdot 2\sin 25°\cdot\cos 45°}{\sqrt{2}\sin 25°} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{3}.$$

3) $(\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{ctg} 28^\circ) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ =$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ **5.1**

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ **5.2**

$$= \left(\frac{\sin 14^\circ}{\cos 14^\circ} + \frac{\cos 28^\circ}{\sin 28^\circ}\right) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ =$$

$$= \left(\frac{\sin 14^\circ}{\cos 14^\circ} + \frac{\cos 28^\circ}{2\sin 14^\circ \cdot \cos 14^\circ}\right) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ =$$

$$= \left(\frac{2\sin^2 14^\circ + \cos 28^\circ}{2\sin 14^\circ \cos 14^\circ}\right) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ =$$

$$= \left(\frac{2\sin^2 14^\circ + 1 - 2\sin^2 14^\circ}{2\sin 14^\circ \cdot \cos 14^\circ}\right) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ =$$

$$= \left(\frac{1}{2\sin 14^\circ \cdot \cos 14^\circ}\right) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

4) $$\frac{\sin^2\frac{\pi}{5} \cdot \cos^2\frac{\pi}{5}}{1 - \cos^4\frac{2\pi}{5} - \cos^2\frac{2\pi}{5} \cdot \sin^2\frac{2\pi}{5}} =$$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ **5.1**

$$= \frac{\sin^2\frac{\pi}{5} \cdot \cos^2\frac{\pi}{5}}{1 - \cos^2\frac{2\pi}{5} \cdot \left(\cos^2\frac{2\pi}{5} + \sin^2\frac{2\pi}{5}\right)} =$$

$$= \frac{\sin^2\frac{\pi}{5} \cdot \cos^2\frac{\pi}{5}}{1 - \cos^2\frac{2\pi}{5}} = \frac{\frac{1}{4}\sin^2\frac{2\pi}{5}}{\sin^2\frac{2\pi}{5}} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

5) $$\frac{5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14}\right) - \sin\frac{\pi}{14}\right)}{\cos\frac{\pi}{7} \cdot \sin\frac{\pi}{14}} =$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ **3.5**

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ **7.4**

$$= \frac{5\left(\sin\frac{3\pi}{14} - \sin\frac{\pi}{14}\right)}{\cos\frac{\pi}{7} \cdot \sin\frac{\pi}{14}} = \frac{5 \cdot 2\sin\frac{\pi}{14} \cdot \cos\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7} \cdot \sin\frac{\pi}{14}} = \boxed{10}.$$

6) $$\frac{\sin^2 32^\circ + \sin 26^\circ}{5\cos^2 32^\circ} =$$

$$\boxed{2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha}$$ **5.2**

$$\boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha}$$ **3.6**

$$\boxed{2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha}$$ **5.2**

$$= \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos 64^\circ) + \sin(90^\circ - 64^\circ)}{5\cos^2 32^\circ} =$$

$$= \frac{0{,}5 - 0{,}5\cos 64^\circ + \cos 64^\circ}{5\cos^2 32^\circ} =$$

$$= \frac{0{,}5 + 0{,}5\cos 64^\circ}{5\cos^2 32^\circ} = \frac{\cos^2 32^\circ}{5\cos^2 32^\circ} = \boxed{\frac{1}{5}}.$$

7) $$\frac{\cos 9^\circ + \cos 51^\circ + \sqrt{3}\cos 21^\circ}{2\sqrt{3}\cos 21^\circ} =$$

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$ **7.1**

$$= \frac{2\cos 30^\circ \cdot \cos 21^\circ + \sqrt{3}\cos 21^\circ}{2\sqrt{3}\cos 21^\circ} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cos 21^\circ + \sqrt{3}\cos 21^\circ}{2\sqrt{3}\cos 21^\circ} = \boxed{1}.$$

8) $$\frac{2\cos^2 16^\circ + 2\cos^2 76^\circ - 3}{\cos^2 44^\circ} =$$

$$\boxed{2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha}$$ **5.2**

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$ **7.1**

$$\boxed{2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha}$$ **5.2**

$$\boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha}$$ **3.6**

$$= \frac{1+\cos 32^\circ+1+\cos 152^\circ-3}{\cos^2 44^\circ} = \frac{-1+2\cos 92^\circ\cdot\cos 60^\circ}{\cos^2 44^\circ} =$$

$$= \frac{-1+\cos 92^\circ}{\cos^2 44^\circ} = \frac{-(1-\cos 92^\circ)}{\cos^2 44^\circ} = \frac{-2\sin^2 46^\circ}{\cos^2 44^\circ} =$$

$$= -\frac{2\sin^2(90^\circ - 46^\circ)}{\cos^2 44^\circ} = -\frac{2\cos^2 44^\circ}{\cos^2 44^\circ} = \boxed{-2}.$$

9) $$\frac{3\cos 196^\circ + 12\cos 164^\circ}{\cos 16^\circ} =$$

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$	3.17
$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$	3.13

$$= \frac{3\cos(180^\circ + 16^\circ) + 12\cos(180^\circ - 16^\circ)}{\cos 16^\circ} =$$

$$= \frac{-3\cos 16^\circ - 12\cos 16^\circ}{\cos 16^\circ} = \boxed{-15}.$$

10) $$\frac{\sin 43^\circ + \sin 17^\circ}{2\cos 13^\circ + 3\sin 77^\circ} =$$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	7.3
$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	3.6

$$= \frac{2\sin 30^\circ\cdot\cos 13^\circ}{2\cos 13^\circ + 3\sin(90^\circ - 13^\circ)} = \frac{\cos 13^\circ}{2\cos 13^\circ + 3\cos 13^\circ} = \boxed{\frac{1}{5}}.$$

11) $$\frac{3\cos 23^\circ - 3\sin 113^\circ + \cos 203^\circ}{\cos 13^\circ\cdot\cos 10^\circ - \cos 80^\circ\cdot\cos 77^\circ} =$$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$	7.7
$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$	3.13
$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$	3.3
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$	3.17

$$= \frac{3\cos 23^\circ - 3\sin(90^\circ + 23^\circ) + \cos(180^\circ + 23^\circ)}{0{,}5(\cos 23^\circ + \cos 3^\circ) - 0{,}5(\cos 157^\circ + \cos 3^\circ)} =$$

$$= \frac{3\cos 23^\circ - 3\cos 23^\circ - \cos 23^\circ}{0{,}5\cos 23^\circ + 0{,}5\cos 3^\circ - 0{,}5\cos(180^\circ - 23^\circ) - 0{,}5\cos 3^\circ} =$$

$$= -\frac{\cos 23^\circ}{0{,}5\cos 23^\circ + 0{,}5\cos 23^\circ} = \boxed{-1}.$$

Решение карточки 2

1. Разложите на множители:

1) $1+\sin\dfrac{2\alpha}{3}=$

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\ \textbf{7.3}$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{2\alpha}{3}=2\sin\left(\frac{3\pi+4\alpha}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi-4\alpha}{12}\right).$$

2) $\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha-\cos 4\alpha=$

$$\boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\ \textbf{7.2}$$

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\ \textbf{7.3}$$

$$=2\sin 3\alpha\cdot\sin\alpha+2\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha=2\sin 3\alpha\cdot(\sin\alpha+\sin 2\alpha)=$$

$$=2\sin 3\alpha\cdot 2\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=4\sin 3\alpha\cdot\sin 1{,}5\alpha\cdot\cos 0{,}5\alpha.$$

3) $1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=$

$$\boxed{2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha}\ \textbf{5.2}$$

$$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\ \textbf{5.1}$$

$$\boxed{\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\ \textbf{7.10}$$

$$=2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cos\alpha\cdot(\cos\alpha+\sin\alpha)=$$

$$=2\cos\alpha\cdot\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sqrt{2}\cos\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

2. Докажите тождества:

1) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha.$

$$\text{L}=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L}=\operatorname{tg}^2\alpha\\ \Pi=\operatorname{tg}^2\alpha\end{array}\right|\Rightarrow \text{L}=\Pi.$$

2) $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\operatorname{ctg}^2\alpha.$

$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$ **5.2**

$$\text{L}=\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\frac{\cos^2\alpha-\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha-\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\frac{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha-\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha-\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha;$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L}=\operatorname{ctg}^2\alpha\\ \Pi=\operatorname{ctg}^2\alpha\end{array}\right|\Rightarrow \text{L}=\Pi.$$

3. Вычислите:

1) $\sin 43^\circ\cdot\sin 17^\circ+\sin^2 13^\circ-2=$

$\boxed{\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]}$ **7.8**

$\boxed{2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha}$ **5.2**

$$=\frac{1}{2}(\cos 26^\circ-\cos 60^\circ)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 26^\circ-2=$$

$$=\frac{1}{2}\cos 26^\circ-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 26^\circ-2=\boxed{-1{,}75}.$$

2) $\dfrac{(1+\operatorname{tg}10^\circ)\cdot\cos 10^\circ}{\sqrt{2}\sin 55^\circ}=$

$\boxed{\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha}$ **3.6**

$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$ **7.1**

$\boxed{\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha}$ **3.5**

$$=\frac{\cos 10^\circ+\sin 10^\circ}{\sqrt{2}\sin 55^\circ}=\frac{\cos 10^\circ+\sin(90^\circ-80^\circ)}{\sqrt{2}\sin 55^\circ}=$$

$$=\frac{\cos 10^\circ+\cos 80^\circ}{\sqrt{2}\sin 55^\circ}=\frac{2\cos 45^\circ\cdot\cos 35^\circ}{\sqrt{2}\sin 55^\circ}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cos(90^\circ-55^\circ)}{\sqrt{2}\sin 55^\circ}=\frac{\sin 55^\circ}{\sin 55^\circ}=\boxed{1}.$$

3) $$\frac{\operatorname{tg}15^\circ-\operatorname{ctg}15^\circ}{\operatorname{ctg}30^\circ}=$$ $\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$ **5.2** $\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$ **5.1**

$$=\frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}-\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}}{\operatorname{ctg}30^\circ}=\frac{\frac{\sin^2 15^\circ-\cos^2 15^\circ}{\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ}}{\operatorname{ctg}30^\circ}=$$

$$=\frac{-\frac{\cos 30^\circ}{0{,}5\sin 30^\circ}}{\operatorname{ctg}30^\circ}=-2\frac{\operatorname{ctg}30^\circ}{\operatorname{ctg}30^\circ}=\boxed{-2}.$$

4) $$\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}\right)\cdot\cos^2\frac{\pi}{14}}{1+\cos\frac{\pi}{7}}=$$ $\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$ **5.1** $\boxed{2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha}$ **5.2**

$$=\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\frac{\left(\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}}+\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\right)\cdot\cos^2\frac{\pi}{14}}{1+\cos\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\frac{\left(\frac{\sin^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{7}}\right)\cdot\cos^2\frac{\pi}{14}}{1+\cos\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\frac{1}{0{,}5\sin\frac{2\pi}{7}}\cdot\cos^2\frac{\pi}{14}}{2\cos^2\frac{\pi}{14}}=\frac{2\cos^2\frac{\pi}{14}}{2\cos^2\frac{\pi}{14}}=\boxed{1}.$$

5) $$\frac{3\left(\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{10}\right)}{2\cos\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}}=$$

$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha}$ **3.6**

$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$ **7.1**

$$=\frac{3\left(\cos\frac{\pi}{5}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)\right)}{2\cos\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{3\left(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)}{2\cos\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}}=$$

$$=\frac{3\cdot 2\cos\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}}{2\cos\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}}=\boxed{3}.$$

6) $$\operatorname{tg} 7^\circ \cdot \left(\frac{1}{\sin 14^\circ} + \frac{1}{\operatorname{tg} 14^\circ}\right) =$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha \quad \textbf{5.2}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \quad \textbf{5.1}$$

$$= \operatorname{tg} 7^\circ \cdot \left(\frac{1}{\sin 14^\circ} + \frac{\cos 14^\circ}{\sin 14^\circ}\right) = \operatorname{tg} 7^\circ \cdot \left(\frac{1+\cos 14^\circ}{\sin 14^\circ}\right) =$$

$$= \operatorname{tg} 7^\circ \cdot \frac{2\cos^2 7^\circ}{\sin 14^\circ} = \frac{\sin 7^\circ}{\cos 7^\circ} \cdot \frac{2\cos^2 7^\circ}{\sin 14^\circ} = \boxed{1}.$$

7) $$\frac{\cos 48^\circ + \cos 42^\circ + \sqrt{2}\cos 3^\circ}{\sqrt{2}\sin 87^\circ} =$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad \textbf{7.1}$$

$$= \frac{2\cos 45^\circ \cdot \cos 3^\circ + \sqrt{2}\cos 3^\circ}{\sqrt{2}\sin(90^\circ - 3^\circ)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cos 3^\circ + \sqrt{2}\cos 3^\circ}{\sqrt{2}\cos 3^\circ} = \boxed{2}.$$

8) $$\cos^2 23^\circ + \cos^2 83^\circ + \cos^2 37^\circ + 3 =$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha \quad \textbf{5.2}$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \quad \textbf{3.17}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad \textbf{7.2}$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha \quad \textbf{3.5}$$

$$= 0{,}5(1 + \cos 46^\circ) + 0{,}5(1 + \cos 166^\circ) +$$
$$+ 0{,}5(1 + \cos 74^\circ) + 3 =$$
$$= 0{,}5 + 0{,}5\cos 46^\circ + 0{,}5 + 0{,}5\cos(180^\circ - 14^\circ) +$$
$$+ 0{,}5 + 0{,}5\cos 74^\circ + 3 =$$
$$= 4{,}5 + 0{,}5\cos 46^\circ - 0{,}5\cos 14^\circ + 0{,}5\cos 74^\circ =$$
$$= 4{,}5 - \sin 30^\circ \cdot \sin 16^\circ + 0{,}5\cos(90^\circ - 16^\circ) =$$
$$= 4{,}5 - 0{,}5\sin 16^\circ + 0{,}5\sin 16^\circ = \boxed{4{,}5}.$$

9) $$\frac{3\cos 9^\circ + \sin 81^\circ}{\sin 21^\circ + \sin 39^\circ} =$$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	7.3
$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	3.6

$$= \frac{3\cos 9^\circ + \sin(90^\circ - 9^\circ)}{2\sin 30^\circ \cdot \cos 9^\circ} = \frac{3\cos 9^\circ + \cos 9^\circ}{2\sin 30^\circ \cdot \cos 9^\circ} = \boxed{4}.$$

10) $$\frac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \sin 44^\circ + \sin 48^\circ}{2\sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ} =$$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	7.3
$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	3.6

$$= \frac{2\sin 44^\circ \cdot \cos 4^\circ + 2\sin 40^\circ \cdot \cos 4^\circ}{2\sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ} =$$

$$= \frac{2\cos 4^\circ \cdot (\sin 44^\circ + \sin 40^\circ)}{2\sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin 42^\circ \cdot \cos 2^\circ}{\sin(90^\circ - 2^\circ) \cdot \sin 42^\circ} = \frac{2\cos 2^\circ}{\cos 2^\circ} = \boxed{2}.$$

11) $$\frac{5\cos 63^\circ + 2\sin 27^\circ - 4\sin 207^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \sin 78^\circ + \sin 75^\circ \cdot \sin 12^\circ} =$$

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	3.6
$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$	3.30
$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$	3.1
$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$	7.8

$$= \frac{5\cos 63^\circ + 2\sin(90^\circ - 63^\circ) - 4\sin(270^\circ - 63^\circ)}{0{,}5(\cos 63^\circ - \cos 93^\circ) + 0{,}5(\cos 63^\circ - \cos 87^\circ)} =$$

$$= \frac{5\cos 63^\circ + 2\cos 63^\circ + 4\cos 63^\circ}{0{,}5\cos 63^\circ - 0{,}5\cos(90^\circ + 3^\circ) + 0{,}5\cos 63^\circ - 0{,}5\cos(90^\circ - 3^\circ)} =$$

$$= \frac{11\cos 63^\circ}{\cos 63^\circ + 0{,}5\sin 3^\circ - 0{,}5\sin 3^\circ} = \frac{11\cos 63^\circ}{\cos 63^\circ} = \boxed{11}.$$

Решение карточки 3

1. Разложите на множители:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{4}\right)=$ $\boxed{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$ **7.5**

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{4}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{4}\right)}.$$

2) $\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\cos 6\alpha=$

$\boxed{\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]}$ **7.8**

$\boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$ **7.2**

$$=\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos 5\alpha)-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\cos 6\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos 5\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\cos 6\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 6\alpha-\cos 5\alpha)=-\sin\frac{11\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

3) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)=$

$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$ **7.3**

$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$ **5.1**

$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$ **7.1**

$$=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\left[\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]=$$

$$=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=$$

$$=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

2. Докажите тождества:

1) $$\frac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{\cos^2 \frac{3\alpha}{2} - \sin^2 \frac{3\alpha}{2}} = 2\cos\alpha.$$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ **7.1**

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ **5.2**

$$\text{L} = \frac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{\cos^2 \frac{3\alpha}{2} - \sin^2 \frac{3\alpha}{2}} = \frac{2\cos 3\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos 3\alpha} = 2\cos\alpha;$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L} = 2\cos\alpha \\ \Pi = 2\cos\alpha\end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi.$$

2) $$\frac{\cos^2 2\alpha - 4\cos^2\alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4\cos^2\alpha - 1} = tg^4\,\alpha.$$

$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$ **5.2**

$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$ **5.2**

$$\text{L} = \frac{\cos^2 2\alpha - 4\cos^2\alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4\cos^2\alpha - 1} = \frac{\cos^2 2\alpha - 2 - 2\cos 2\alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 2 + 2\cos 2\alpha - 1} =$$

$$= \frac{\cos^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha + 1}{\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha + 1} = \frac{(\cos 2\alpha - 1)^2}{(\cos 2\alpha + 1)^2} =$$

$$= \frac{4\sin^4\alpha}{4\cos^4\alpha} = \text{tg}^4\,\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L} = \text{tg}^4\,\alpha \\ \Pi = \text{tg}^4\,\alpha\end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi.$$

3. Вычислите:

1) $\cos^2 36^\circ - \cos^2 120^\circ - 0{,}5\sin 18^\circ - 0{,}5 =$

$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$ **5.2**

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ **3.6**

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos 72^\circ) - 0{,}25 - 0{,}5\sin(90^\circ - 72^\circ) - 0{,}5 =$$

$$= 0{,}5 + 0{,}5\cos 72^\circ - 0{,}75 - 0{,}5\cos 72^\circ = \boxed{-0{,}25}.$$

2) $\dfrac{\sqrt{2}(\cos 25^\circ - \cos 65^\circ)}{\sin 20^\circ} =$

$\boxed{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}$ **7.2**

$= \dfrac{\sqrt{2}\cdot 2\sin 20^\circ\cdot\sin 45^\circ}{\sin 20^\circ} = \boxed{2}.$

3) $\dfrac{(\operatorname{tg} 26^\circ - \operatorname{ctg} 52^\circ)\cdot\cos 26^\circ\cdot\sin 52^\circ}{\cos 78^\circ} =$

$\boxed{\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha}$ **3.11**

$\boxed{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$ **7.6**

$\boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha}$ **3.6**

$= \dfrac{(\operatorname{tg} 26^\circ - \operatorname{ctg}(90^\circ - 38^\circ))\cdot\cos 26^\circ\cdot\sin 52^\circ}{\cos 78^\circ} =$

$= \dfrac{(\operatorname{tg} 26^\circ - \operatorname{tg} 38^\circ)\cdot\cos 26^\circ\cdot\sin(90^\circ - 38^\circ)}{\cos 78^\circ} =$

$= \dfrac{-\frac{\sin 12^\circ}{\cos 26^\circ\cdot\cos 38^\circ}\cdot\cos 26^\circ\cdot\cos 38^\circ}{\cos 78^\circ} =$

$= -\dfrac{\sin(90^\circ - 78^\circ)}{\cos 78^\circ} = -\dfrac{\cos 78^\circ}{\cos 78^\circ} = \boxed{-1}.$

4) $\dfrac{\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)^2\cdot\cos^2\frac{\pi}{8}}{\sin^2\frac{\pi}{8}} =$ $\boxed{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}}$ **5.10**

$= \left(1 - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}\right)^2\cdot\operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}} = \left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} - 1\right)^2 =$

$= \left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{8} - 1\right)^2 = \left(\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} - 1\right)^2 =$

$= \left(\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 1\right)^2 = \boxed{2}.$

5) $$\frac{\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{9}}{5\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{9}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{7}-\frac{2\pi}{9}\right)}=$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{9}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{7}-\frac{2\pi}{9}\right)}{5\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{9}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{7}-\frac{2\pi}{9}\right)}=\boxed{\frac{2}{5}}.$$

6) $$\frac{\cos^2 34^\circ-\sin 22^\circ}{4\sin^2 34^\circ}=$$

$2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$ **5.2**

$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$ **3.6**

$2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$ **5.2**

$$=\frac{0{,}5(1+\cos 68^\circ)-\sin(90^\circ-68^\circ)}{4\sin^2 34^\circ}=$$

$$=\frac{0{,}5+0{,}5\cos 68^\circ-\cos 68^\circ}{4\sin^2 34^\circ}=$$

$$=\frac{0{,}5-0{,}5\cos 68^\circ}{4\sin^2 34^\circ}=\frac{\sin^2 34^\circ}{4\sin^2 34^\circ}=\boxed{\frac{1}{4}}.$$

7) $$\frac{\cos 73^\circ+\cos 47^\circ+2\cos 13^\circ}{2\cos 13^\circ}=$$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ **7.1**

$$=\frac{2\cos 60^\circ\cdot\cos 13^\circ+2\cos 13^\circ}{2\cos 13^\circ}=\frac{3\cos 13^\circ}{2\cos 13^\circ}=\boxed{1{,}5}.$$

8) $$\frac{2\sin^2 85^\circ+2\sin^2 25^\circ-3}{4\cos^2 55^\circ}=$$

$2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$ **5.2**

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ **7.1**

$2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$ **5.2**

$$=\frac{1-\cos 170^\circ+1-\cos 50^\circ-3}{4\cos^2 55^\circ}=-\frac{1+\cos 170^\circ+\cos 50^\circ}{4\cos^2 55^\circ}=$$

$$=-\frac{1+2\cos 110^\circ\cdot\cos 60^\circ}{4\cos^2 55^\circ}=-\frac{2\cos^2 55^\circ}{4\cos^2 55^\circ}=\boxed{-\frac{1}{2}}.$$

9) $$\frac{\cos 71^\circ + \cos 49^\circ}{7\cos 11^\circ - 3\sin 79^\circ} =$$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	7.1
$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	3.6

$$= \frac{2\cos 60^\circ \cdot \cos 11^\circ}{7\cos 11^\circ - 3\sin(90^\circ - 11^\circ)} =$$

$$= \frac{\cos 11^\circ}{7\cos 11^\circ - 3\cos 11^\circ} = \frac{\cos 11^\circ}{4\cos 11^\circ} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

10) $$\frac{\cos 16^\circ - \cos 24^\circ - \cos 32^\circ + \cos 40^\circ}{\cos 86^\circ \cdot \sin 8^\circ \cdot \cos 28^\circ} =$$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	7.1
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	7.2
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	3.5

$$= \frac{2\cos 28^\circ \cdot \cos 12^\circ - 2\cos 28^\circ \cdot \cos 4^\circ}{\cos 86^\circ \cdot \sin 8^\circ \cdot \cos 28^\circ} =$$

$$= \frac{2\cos 28^\circ \cdot (\cos 12^\circ - \cos 4^\circ)}{\cos 86^\circ \cdot \sin 8^\circ \cdot \cos 28^\circ} =$$

$$= \frac{-2 \cdot 2\sin 4^\circ \cdot \sin 8^\circ}{\cos(90^\circ - 4^\circ)\cdot \sin 8^\circ} = -\frac{4\sin 4^\circ}{\sin 4^\circ} = \boxed{-4}.$$

11) $$\frac{3\sin 124^\circ - \cos 146^\circ - 2\cos 34^\circ}{\cos 49^\circ \cdot \cos 15^\circ + \cos 41^\circ \cdot \cos 75^\circ} =$$

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$	7.7
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	7.1

$$= \frac{3\sin(90^\circ + 34^\circ) - \cos(180^\circ - 34^\circ) - 2\cos 34^\circ}{0{,}5(\cos 64^\circ + \cos 34^\circ) + 0{,}5(\cos 116^\circ + \cos 34^\circ)} =$$

$$= \frac{3\cos 34^\circ + \cos 34^\circ - 2\cos 34^\circ}{0{,}5\cos 64^\circ + 0{,}5\cos 34^\circ + 0{,}5\cos 116^\circ + 0{,}5\cos 34^\circ} =$$

$$= \frac{2\cos 34^\circ}{\cos 34^\circ + \cos 90^\circ \cdot \cos 26^\circ} = \frac{2\cos 34^\circ}{\cos 34^\circ} = \boxed{2}.$$

Решение карточки 4

1. Разложите на множители:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)=$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ **3.1**

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ **3.18**

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ **7.4**

$=-\sin 4\alpha+\sin 8\alpha=2\cos 6\alpha\cdot\sin 2\alpha.$

2) $\sin 10\alpha\cdot\sin 8\alpha+\sin 8\alpha\cdot\sin 6\alpha=$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$ **7.8**

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ **7.1**

$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$ **5.2**

$=0{,}5(\cos 2\alpha-\cos 18\alpha)+0{,}5(\cos 2\alpha-\cos 14\alpha)=$

$=0{,}5\cos 2\alpha-0{,}5\cos 18\alpha+0{,}5\cos 2\alpha-0{,}5\cos 14\alpha=$

$=\cos 2\alpha-0{,}5(\cos 18\alpha+\cos 14\alpha)=\cos 2\alpha-\cos 16\alpha\cdot\cos 2\alpha=$

$=\cos 2\alpha(1-\cos 16\alpha)=2\cos 2\alpha\cdot\sin^2 8\alpha.$

3) $\cos\alpha+2\sin 2\alpha-\cos 3\alpha=$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ **7.2**

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ **7.3**

$=2\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha+2\sin 2\alpha=2\sin 2\alpha\cdot(1+\sin\alpha)=$

$=2\sin 2\alpha\cdot\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\alpha\right)=$

$=2\sin 2\alpha\cdot 2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)=$

$=4\sin 2\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$

2. Докажите тождества:

1) $$\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=2.$$

$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$ **5.2**

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ **5.1**

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ **3.5**

$$\text{L}=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{0{,}5\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right)}=$$

$$=\frac{1-\sin 2\alpha}{0{,}5(1-\sin 2\alpha)}=2.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L}=2\\ \Pi=2\end{array}\right|\Rightarrow \text{L}=\Pi.$$

2) $$\frac{1+2\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha-2\cos\alpha+1}=-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ **5.2**

$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$ **5.2**

$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$ **5.2**

$$\text{L}=\frac{1+2\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha-2\cos\alpha+1}=$$

$$=\frac{1+2\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}{2\cos^2\alpha-1-2\cos\alpha+1}=$$

$$=\frac{2\cos\alpha\cdot(1+\cos\alpha)}{-2\cos\alpha\cdot(1-\cos\alpha)}=-\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L}=-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\\ \Pi=-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\end{array}\right|\Rightarrow \text{L}=\Pi.$$

3. Вычислите:

1) $\sin 49^\circ \cdot \sin 11^\circ + \cos^2 71^\circ + 1 =$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right] \quad \textbf{7.8}$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha \quad \textbf{5.2}$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \quad \textbf{3.17}$$

$= 0{,}5(\cos 38^\circ - \cos 60^\circ) + 0{,}5(1 + \cos 142^\circ) + 1 =$

$= 0{,}5\cos 38^\circ - 0{,}5\cos 60^\circ + 0{,}5 + 0{,}5\cos(180^\circ - 38^\circ) + 1 =$

$= 0{,}5\cos 38^\circ - 0{,}25 + 1{,}5 - 0{,}5\cos 38^\circ = \boxed{1{,}25}$.

2) $\dfrac{\sin 40^\circ - \cos 40^\circ}{\sqrt{2}\cos 85^\circ} =$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha \quad \textbf{3.5}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad \textbf{7.4}$$

$= \dfrac{\sin 40^\circ - \cos(90^\circ - 50^\circ)}{\sqrt{2}\cos 85^\circ} = \dfrac{\sin 40^\circ - \sin 50^\circ}{\sqrt{2}\cos(90^\circ - 5^\circ)} =$

$= -\dfrac{2\sin 5^\circ \cdot \cos 45^\circ}{\sqrt{2}\sin 5^\circ} = -\dfrac{\sqrt{2}\sin 5^\circ}{\sqrt{2}\sin 5^\circ} = \boxed{-1}$.

3) $\sin 24^\circ \cdot (\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{ctg} 12^\circ) =$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \quad \textbf{5.3}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \quad \textbf{5.1}$$

$= \sin 24^\circ \cdot \left(\dfrac{\operatorname{tg}^2 12^\circ + 1}{\operatorname{tg} 12^\circ}\right) =$

$= 2\sin 12^\circ \cdot \cos 12^\circ \cdot \left(\dfrac{1}{\sin 12^\circ \cdot \cos 12^\circ}\right) = \boxed{2}$.

4) $\dfrac{\left(\sin\frac{\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{9}\right)^2 - 1}{\sin\frac{2\pi}{9}} =$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \quad \textbf{5.1}$$

$= \dfrac{\sin^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\frac{\pi}{9} - 2\sin\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{9} - 1}{\sin\frac{2\pi}{9}} =$

$= -\dfrac{2\sin\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{9}}{\sin\frac{2\pi}{9}} = -\dfrac{\sin\frac{2\pi}{9}}{\sin\frac{2\pi}{9}} = \boxed{-1}$.

5) $$\frac{\cos\frac{2\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{3\pi}{10}\cdot\sin\frac{\pi}{10}} = \quad \boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \quad \textbf{7.2}$$

$$=\frac{-2\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{3\pi}{10}}{2\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{3\pi}{10}}=\boxed{-1}.$$

6) $$\frac{\sin 10^\circ\cdot(1+\operatorname{tg}^2 5^\circ)}{\operatorname{tg} 5^\circ} = \quad \boxed{1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}} \quad \textbf{1.8}$$

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha} \quad \textbf{5.1}$$

$$=\frac{2\sin 5^\circ\cdot\cos 5^\circ}{0{,}5\sin 10^\circ}=\frac{2\sin 5^\circ\cdot\cos 5^\circ}{\sin 5^\circ\cdot\cos 5^\circ}=\frac{2\sin 5^\circ}{\sin 5^\circ}=\boxed{2}.$$

7) $$\frac{\cos 85^\circ-\cos 35^\circ-\sqrt{3}\cos 65^\circ}{\sqrt{3}\sin 25^\circ}=$$

$$\boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \quad \textbf{7.1}$$

$$\boxed{\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha} \quad \textbf{3.5}$$

$$=\frac{-2\sin 60^\circ\cdot\sin 25^\circ-\sqrt{3}\cos 65^\circ}{\sqrt{3}\sin 25^\circ}=$$

$$=\frac{-\sqrt{3}\sin 25^\circ-\sqrt{3}\cos(90^\circ-25^\circ)}{\sqrt{3}\sin 25^\circ}=$$

$$=\frac{-\sqrt{3}\sin 25^\circ-\sqrt{3}\sin 25^\circ}{\sqrt{3}\sin 25^\circ}=\boxed{-2}.$$

8) $$\cos^2 86^\circ+\cos^2 34^\circ-\cos^2 64^\circ+3=$$

$$\boxed{2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha} \quad \textbf{5.2}$$

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \quad \textbf{7.1}$$

$$\boxed{\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha} \quad \textbf{3.17}$$

$$\boxed{\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha} \quad \textbf{3.6}$$

$$\boxed{\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha} \quad \textbf{3.3}$$

$$=0{,}5(1+\cos 172^\circ)+0{,}5(1+\cos 68^\circ)-0{,}5(1+\cos 128^\circ)+3=$$

$$=0{,}5+0{,}5\cos 172^\circ+0{,}5+0{,}5\cos 68^\circ-0{,}5-0{,}5\cos 128^\circ+3=$$

$$= 3{,}5 + 0{,}5 \cdot 2\cos 120^\circ \cdot \cos 52^\circ - 0{,}5\cos 128^\circ =$$
$$= 3{,}5 - 0{,}5\cos 52^\circ - 0{,}5\cos(180^\circ - 52^\circ) =$$
$$= 3{,}5 - 0{,}5\cos 52^\circ + 0{,}5\cos 52^\circ = \boxed{3{,}5}.$$

9) $\dfrac{\cos 49^\circ + 2\sin 41^\circ}{\sin 79^\circ - \sin 19^\circ} =$

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	3.6
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$	7.4

$$= \frac{\cos 49^\circ + 2\sin(90^\circ - 49^\circ)}{2\sin 30^\circ \cdot \cos 49^\circ} = \frac{\cos 49^\circ + 2\cos 49^\circ}{\cos 49^\circ} = \boxed{3}.$$

10) $\dfrac{\sin 48^\circ - \sin 60^\circ - \sin 72^\circ + \sin 84^\circ}{4\cos 84^\circ \cdot \sin 12^\circ \cdot \sin 66^\circ} =$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$	7.3
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$	7.2

$$= \frac{2\sin 66^\circ \cdot \cos 18^\circ - 2\sin 66^\circ \cdot \cos 6^\circ}{4\cos 84^\circ \cdot \sin 12^\circ \cdot \sin 66^\circ} = \frac{\cos 18^\circ - \cos 6^\circ}{2\cos 84^\circ \cdot \sin 12^\circ} =$$
$$= \frac{-2\sin 12^\circ \cdot \sin 6^\circ}{2\cos(90^\circ - 6^\circ)\cdot \sin 12^\circ} = -\frac{\sin 6^\circ}{\sin 6^\circ} = \boxed{-1}.$$

11) $\dfrac{6\sin 25^\circ - 3\cos 65^\circ + 7\sin 155^\circ}{\cos 53^\circ \cdot \cos 12^\circ - \cos 37^\circ \cdot \cos 78^\circ} =$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$	7.7
$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	3.6
$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$	3.3
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$	3.17

$$= \frac{6\sin(90^\circ - 65^\circ) - 3\cos 65^\circ + 7\sin(90^\circ + 65^\circ)}{0{,}5(\cos 65^\circ + \cos 41^\circ) - 0{,}5(\cos 115^\circ + \cos 41^\circ)} =$$
$$= \frac{6\cos 65^\circ - 3\cos 65^\circ + 7\cos 65^\circ}{0{,}5\cos 65^\circ + 0{,}5\cos 41^\circ - 0{,}5\cos(180^\circ - 65^\circ) - 0{,}5\cos 41^\circ} =$$
$$= \frac{10\cos 65^\circ}{0{,}5\cos 65^\circ + 0{,}5\cos 65^\circ} = \boxed{10}.$$

Решение карточки 5

Вычислите:

1) $\dfrac{2+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1+5\cos^2\alpha} =$ при $\operatorname{tg}\alpha = 2$

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\operatorname{tg}^2\alpha$ **1.8**

$$= \frac{(2+\sin\alpha\cdot\cos\alpha) : \cos^2\alpha}{(1+5\cos^2\alpha) : \cos^2\alpha} = \frac{\frac{2}{\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha}+5} =$$

$$= \frac{2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+\operatorname{tg}\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+5} = \frac{2(1+4)+2}{1+4+5} = \boxed{1{,}2}.$$

2) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right) =$ при $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ **7.4**

$$= 2\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

3) $\sin(x+30^\circ)+\sin(x-30^\circ) = 2\sqrt{3}\cos x;\quad \operatorname{tg} x = ?$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ **7.3**

$$2\sin x\cdot\cos 30^\circ = 2\sqrt{3}\cos x;\qquad \sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{3}\cos x;$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x = \boxed{2}.$$

4) $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{1}{4}$.

$$\sin\alpha = -\frac{1}{4};\quad \cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 1-2\cdot\frac{1}{16} = \boxed{\frac{7}{8}}.$$

5) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2;\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot 2}{1-4} = \boxed{-\frac{4}{3}}.$$

6) $\sin(\pi + 2\alpha)$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2};$$

$$1 + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}; \quad 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{1}{2};$$

$$\sin(\pi + 2\alpha) = -\sin 2\alpha = -2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

7) $2\sin 3\alpha\cdot\sin 2\alpha + \cos 5\alpha$, если $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}6}$.

$$2\sin 3\alpha\cdot\sin 2\alpha + \cos 5\alpha = \cos\alpha - \cos 5\alpha + \cos 5\alpha =$$
$$= \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 2\cdot 0{,}6 - 1 = \boxed{0{,}2}.$$

8) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}6$.

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \quad 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \quad \textbf{5.2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) = \frac{1}{2}(1 + \sin\alpha) =$$
$$= \frac{1 + 0{,}6}{2} = \boxed{0{,}8}.$$

9) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{3}$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos 2\alpha + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin 2\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha + \sqrt{3}\sin 2\alpha\right) = \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \quad \textbf{5.4} \qquad \sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \quad \textbf{5.3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{\sqrt{3}\cdot 2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(2\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{3}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}}{1+\left(2\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+12} = \boxed{\frac{1}{26}}.$$

10) $\cos\alpha + \cos\beta$, если $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha + \beta = 4\pi$.

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$ 7.1

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos 2\pi\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \boxed{\sqrt{2}}.$$

11) $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \frac{1}{2} =$$

$$= \cos\alpha\cdot\cos\beta - \frac{1}{2} + \sin\alpha\cdot\sin\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta =$$

$$= \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} =$$

$$= \cos(\alpha-\beta) - 1 = \cos\frac{\pi}{2} - 1 = \boxed{-1}.$$

12) $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$, если $\sin x = 0{,}21$.

$$\sin x = 0{,}21; \quad 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 0{,}21;$$

$$1 + 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 0{,}21 + 1;$$

$$\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 1{,}21;$$

$$\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1{,}21; \quad \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{1{,}21} = \boxed{\pm 1{,}1}.$$

13) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Так как $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

то $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$;

$1 + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\quad 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$;

$\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = \dfrac{1}{16}$, тогда

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha =$$

$$= \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha =$$

$$= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = 1 - 2\cdot\frac{1}{16} = \boxed{\frac{7}{8}}.$$

Решение карточки 6

Вычислите:

1) $\dfrac{\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}{5\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 3}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

$$\frac{\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}{5\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 3} = \left(\frac{\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}{5\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 3}\right)\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - 2}{5\operatorname{tg}\alpha + \frac{3}{\cos^2\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - 2}{5\operatorname{tg}\alpha + 3 + 3\operatorname{tg}^2\alpha} =$$

$$= \frac{4-2}{-5\cdot 2 + 3 + 3\cdot 4} = \boxed{0{,}4}.$$

2) $\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2}$.

$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$	7.6
$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$	7.7
$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	1.5

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{0{,}5\left(\cos 2x + \cos\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{0{,}5\cos 2x} = \frac{2}{2\cos^2 x - 1} =$$

$$= \frac{2}{\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x + 1} - 1} = \frac{2}{\frac{2}{\frac{1}{4}+1} - 1} = \frac{10}{3} = \boxed{3\frac{1}{3}}.$$

3) $\operatorname{tg} x$, если $\sin(x - 45^\circ) + \sin(x + 45^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x$.

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$	7.3

$$\sin(x - 45^\circ) + \sin(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x;$$

$$2\sin x\cdot\cos 45^\circ=\frac{\sqrt2}{2}\cos x;\quad \sqrt2\sin x=\frac{\sqrt2}{2}\cos x;$$

$$\sin x=\frac12\cos x;\quad \operatorname{tg}x=\boxed{\frac12}.$$

4) $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=0{,}25$.

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot 0{,}0625-1=\boxed{-0{,}875}.$$

5) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=-2$.

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{4-1}{-4}=\boxed{-0{,}75}.$$

6) $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$, если $\cos\alpha=-\sqrt{0{,}1}$.

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=-\cos 2\alpha=$$

$$=-(2\cos^2\alpha-1)=1-2\cos^2\alpha=1-2\cdot 0{,}1=\boxed{0{,}8}.$$

7) $2\sin 3\alpha\cdot\cos 5\alpha-\sin 8\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}9$.

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$ 4.1

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$ 4.2

$\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}9;$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0{,}81;$

$1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0{,}81;\quad -2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-0{,}19.$

Поэтому

$$2\sin 3\alpha\cdot\cos 5\alpha-\sin 8\alpha=2\sin 3\alpha\cdot\cos 5\alpha-\sin(5\alpha+3\alpha)=$$

$$=2\sin 3\alpha\cdot\cos 5\alpha-\sin 3\alpha\cdot\cos 5\alpha-\cos 3\alpha\cdot\sin 5\alpha=$$

$$=\sin 3\alpha\cdot\cos 5\alpha-\cos 3\alpha\cdot\sin 5\alpha=-\sin 2\alpha=$$

$$=-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\boxed{-0{,}19}.$$

8) $\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha=-0{,}2$.

$2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$ **5.2**

$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$ **3.25**

$$\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\alpha=0{,}5-0{,}1=\boxed{0{,}4}.$$

9) $\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}-2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$ **4.4**

$\cos 2\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ **5.4**

$\sin 2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ **5.3**

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\alpha\right)=\cos\frac{4\pi}{3}\cdot\cos 2\alpha+\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\sin 2\alpha=$$
$$=-\left(\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right)=$$
$$=-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right)=$$
$$=-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{3}{16}}{1+\frac{3}{16}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{3}{16}}\right)=\boxed{-\frac{37}{38}}.$$

10) $\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}$, если $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$, $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{3}$.

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=$$
$$=\frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\boxed{1}.$$

11) $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}$, $\alpha+\beta=1{,}5\pi$.

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta+0{,}5-\sin\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=$

$=\cos(\alpha+\beta)+0{,}5+0{,}5=\cos\dfrac{3\pi}{2}+1=\boxed{1}$.

12) $\operatorname{tg}x$, если $\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}=\sqrt{0{,}4}$.

$\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}=\sqrt{0{,}4}$;

$\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}=0{,}4$;

$1+2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}=0{,}4$; $\quad\sin x=-0{,}6$;

$\cos x=\pm\sqrt{1-0{,}6^2}=\pm0{,}8$;

$\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\quad\operatorname{tg}x=\dfrac{-0{,}6}{\pm0{,}8}=\boxed{\pm0{,}75}$.

13) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=0{,}8$.

$\sin\alpha+\cos\alpha=0{,}8$;

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0{,}64$;

$1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0{,}64$; $\quad 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-0{,}36$;

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-0{,}18$;

$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha)=$

$=0{,}8\cdot(1+0{,}18)=\boxed{0{,}944}$.

Решение карточки 7

Вычислите:

1) $\dfrac{2+3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=4$.

$$\frac{2+3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{(2+3\sin\alpha\cdot\cos\alpha):\cos^2\alpha}{(\sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha):\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{2}{\cos^2\alpha}+3\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+3\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=$$

$$=\frac{2\cdot17+12}{16+4}=\boxed{2{,}3},\text{ так как }\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\alpha.$$

2) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, если $\sin x=\dfrac{\sqrt2}{4}$.

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$ **7.3**

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt2\sin x=$$

$$=\sqrt2\cdot\frac{\sqrt2}{4}=\boxed{\frac12}.$$

3) $\sin x$, если $\sin(x+30^\circ)+\sin(x-30^\circ)=\sqrt3$.

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$ **7.3**

$2\sin x\cdot\cos30^\circ=\sqrt3;$

$\sqrt3\sin x=\sqrt3;\qquad \sin x=\boxed{1}.$

4) $\sin2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac12$.

$$\sin2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$ **5.3**

$$\sin2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot0{,}5}{1+0{,}25}=\frac{1}{1{,}25}=\boxed{0{,}8}.$$

5) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 3$.

$\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ **5.5**

$$tg\,\alpha + ctg\,\alpha = tg\,\alpha + \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{2\,tg\,\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2\,tg\,\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{6}{1-9} + \frac{1-9}{6} = \boxed{-2\frac{1}{12}}.$$

6) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)$, если $\sin\alpha = -\sqrt{0{,}7}$.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\cos 2\alpha = -(1-2\sin^2\alpha) = -1+2\cdot 0{,}7 = \boxed{0{,}4}.$$

7) $2\sin 5\alpha\cdot\cos 3\alpha - \sin 8\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{0{,}6}$.

$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$ **7.9**

$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{0{,}6}$;

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0{,}6$;

$1 + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0{,}6$;

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -0{,}4$; $\quad \sin 2\alpha = -0{,}4$;

$2\sin 5\alpha\cdot\cos 3\alpha - \sin 8\alpha =$

$= \sin 8\alpha + \sin 2\alpha - \sin 8\alpha =$

$= \sin 2\alpha = \boxed{-0{,}4}$.

8) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}8$.

$\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right) =$

$2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha$ **5.2**

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ **3.5**

$$= \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) = \frac{1}{2}(1-\sin\alpha) = \frac{1}{2}(1-0{,}8) = \boxed{0{,}1}.$$

9) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-3$.

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha$	4.1
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$	3.1
$\cos 2\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	5.4
$\sin 2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	5.3

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos 2\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin 2\alpha\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)=\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=$$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-9}{1+9}-\frac{6}{1+9}=\boxed{-1{,}4}.$$

10) $\sin\alpha+\sin\beta$, если $\alpha+\beta=3\pi$, $\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$.

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$=2\sin\frac{3\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{-\sqrt{3}}.$$

11) $\sqrt{2}\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}$, $\alpha+\beta=\frac{5\pi}{4}$.

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2};$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right];$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{5\pi}{4}+\cos(\alpha-\beta)\right];$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{значит}\ \sqrt{2}\cos(\alpha-\beta)=\boxed{1}.$$

12) $\cos x$, *если* $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = \sqrt{0{,}5}.$

$$\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = \sqrt{0{,}5};$$

$$\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = \left(\sqrt{0{,}5}\right)^2;$$

$$1-2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 0{,}5; \quad -2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = -0{,}5; \quad \sin x = 0{,}5;$$

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}; \quad \cos x = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \boxed{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

13) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 1{,}2.$

$$\sin\alpha - \cos\alpha = 1{,}2;$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 1{,}44;$$

$$1 - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 1{,}44; \quad 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -0{,}44;$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -0{,}22;$$

$$\sin^3\alpha - \cos^3\alpha =$$

$$= (\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha) =$$

$$= (\sin\alpha - \cos\alpha)(1 + \sin\alpha\cdot\cos\alpha) =$$

$$= 1{,}2(1 - 0{,}22) = \boxed{0{,}936}.$$

Решение карточки 8

Вычислите:

1) $\dfrac{2+5\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\alpha$ **1.8**

$$\frac{2+5\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$$

$$=\frac{(2+5\sin\alpha\cdot\cos\alpha):\cos^2\alpha}{(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha):\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{2}{\cos^2\alpha}+5\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+5\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}=\boxed{-20}.$$

2) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos(x-\dfrac{\pi}{4})$, если $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ **7.1**

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos(x-\frac{\pi}{4})=2\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}=$$

$$=\sqrt{2}\cos x=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{5}=\boxed{0{,}4}.$$

3) $\operatorname{ctg}x$, если $\cos(x+30^\circ)+\cos(x-30^\circ)=\sqrt{3}\sin x$.

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ **7.1**

$\cos(x+30^\circ)+\cos(x-30^\circ)=\sqrt{3}\sin x;$

$2\cos 30^\circ\cdot\cos x=\sqrt{3}\sin x;$

$\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}\sin x;\qquad \operatorname{ctg}x=\boxed{1}.$

4) $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{4}$. $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$ **1.5**

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - 1 = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\frac{1}{16}}{1+\frac{1}{16}} = \boxed{\frac{15}{17}}.$$

5) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 3$.

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \sin\alpha = \frac{2\cdot 3}{1+9} = \boxed{0{,}6}.$$

6) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$, если $\cos\alpha = -\sqrt{0{,}2}$.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha = 1 - 0{,}4 = \boxed{0{,}6}.$$

7) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}6$.

$2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$ **5.2**

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ **3.5**

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin\alpha + 1) = \frac{1}{2}(1 - 0{,}6) = \boxed{0{,}2}.$$

8) $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6} - 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

$\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ **5.4**

$\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ **5.3**

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$ **4.2**

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}-2\alpha\right)=\sin\frac{7\pi}{6}\cdot\cos 2\alpha-\cos\frac{7\pi}{6}\cdot\sin 2\alpha=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{27}{4}}{1+\frac{27}{4}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{27}{4}}=\boxed{\frac{59}{62}}.$$

9) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$, если $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{2}$, $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{3\pi}{4}}=\boxed{1}.$$

10) $3\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha\cdot\cos\beta=-\dfrac{1}{2}$, $\alpha-\beta=\dfrac{7\pi}{2}$.

Так как $\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)$, то

$$3\cos(\alpha+\beta)=3\cdot(2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha-\beta))=$$

$$=3\cdot\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\cos\frac{7\pi}{2}\right)=3\cdot(-1-0)=\boxed{-3}.$$

11) $\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}$, если $\sin x=-0{,}44$.

$$\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2=$$

$$=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=$$

$$=1-\sin x=1+0{,}44=1{,}44;$$

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{1{,}44},$$

значит, $\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}=\boxed{\pm1{,}2}$.

12) $2\cos 3\alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos 5\alpha$, если $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}6}$.

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$ **7.7**

$$2\cos 3\alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos 5\alpha = \cos 5\alpha + \cos\alpha - \cos 5\alpha =$$

$$= \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1{,}2 - 1 = \boxed{0{,}2}.$$

13) $\dfrac{1}{\sin^4\alpha} + \dfrac{1}{\cos^4\alpha}$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}};$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{3}{2};$$

$$1 + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{3}{2};\quad 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2};\quad \sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{\sin^4\alpha} + \frac{1}{\cos^4\alpha} = \frac{\cos^4\alpha + \sin^4\alpha}{\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^4\alpha + \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{(\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^4} =$$

$$= \frac{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 2(\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^4} = \frac{1 - 2\cdot\frac{1}{16}}{\frac{1}{64\cdot 4}} = \boxed{224}.$$

Решение карточки 9

1. Вычислите:

1) $\sqrt{2}\cos 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 73^\circ \cdot \operatorname{tg} 73^\circ - \sqrt{3}\sin 780^\circ =$

$$= \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 - \sqrt{3}\sin 60^\circ = \frac{2}{2}\cdot 1 - \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{3}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

2) $7\sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ =$

$$= \frac{7}{2}\cdot 2\cdot\sin 75^\circ\cdot\cos 75^\circ = \frac{7}{2}\cdot\sin 150^\circ = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{7}{4}}.$$

3) $\operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 4^\circ \cdot \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 86^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ$.

$\operatorname{tg} 46^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 44^\circ) = \operatorname{ctg} 44^\circ;$

$\operatorname{tg} 48^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 42^\circ) = \operatorname{ctg} 42^\circ;$

. . . .

$\operatorname{tg} 88^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 2^\circ) = \operatorname{ctg} 2^\circ;$

$\operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 4^\circ \cdot \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 86^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ =$

$= \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 4^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{ctg} 44^\circ \cdot \operatorname{ctg} 42^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{ctg} 2^\circ = \boxed{1}.$

4) $\left(\operatorname{tg} 40^\circ - \cos^{-1} 40^\circ\right)\left(\cos 40^\circ - \operatorname{ctg} 40^\circ\right)^{-1} - \dfrac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} =$

$$= \left(\frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} - \frac{1}{\cos 40^\circ}\right)\cdot\frac{1}{\left(\cos 40^\circ - \frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}\right)} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 40^\circ - 1}{\cos 40^\circ}\cdot\frac{1}{\cos 40^\circ\left(1 - \frac{1}{\sin 40^\circ}\right)} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 40^\circ - 1}{\cos^2 40^\circ}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 40^\circ - 1}{\sin 40^\circ}} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} =$$

$$= \frac{(\sin 40^\circ - 1)\cdot\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ\cdot(\sin 40^\circ - 1)} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} = \boxed{0}.$$

5) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=-0{,}5$.

Найдем $\operatorname{tg}\alpha$ по формуле тангенса двойного угла:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cdot(-0{,}5)}{1-(-0{,}5)^2}=\frac{-1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{-1}{\frac{3}{4}}=\boxed{-\frac{4}{3}}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\cos\alpha$, получим:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{1-\frac{4}{3}}=\frac{1}{\frac{3-4}{3}}=\frac{3}{-1}=\boxed{-3}.$$

2. Найдите минимальное значение функции (при $\operatorname{tg}\alpha>0$)

$$f(\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha+ctg\,\alpha+tg\,\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

а) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=$

$$=2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

Минимальное значение выражение принимает, когда $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$, т. е.

$$\alpha+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\quad \alpha=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k.$$

б) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\geqslant 2$ (так как $\operatorname{tg}\alpha>0$).

Найдем α, при которых достигается равенство

$\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=2$; домножим на $\operatorname{tg}\alpha$:

$\operatorname{tg}^2\alpha+1=2\operatorname{tg}\alpha$; $\quad\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha+1=0$;

$(\operatorname{tg}\alpha-1)^2=0$; $\quad\operatorname{tg}\alpha=1$; $\quad\alpha=\dfrac{\pi}{4}+\pi k$.

в) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=$

$$=\frac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{4}\cdot 4\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{4}{\sin^2 2\alpha}.$$

Минимальное значение принимается, когда $\sin^2 2\alpha=1$;

$\sin^2 2\alpha=1;\quad 2\alpha=\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\quad \alpha=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k.$

Теперь убедимся, что существует такое α, при котором достигаются все три минимума одновременно.

$$\alpha=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k;$$
$$\alpha=\frac{\pi}{4}+\pi k;\qquad | k\in\mathbb{Z}.$$
$$\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k;$$

Очевидно, что $\alpha=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k$ удовлетворяет всем трем условиям; кроме того, $\operatorname{tg}\alpha>0$, следовательно $f_{\min}=f(\alpha)=-\sqrt{2}+4+2=\boxed{6-\sqrt{2}}.$

3. Решите уравнения:

1) $2\cos^2\dfrac{\pi x}{6}+3\sin\dfrac{\pi x}{6}=0$ при $|x|\leqslant 1$.

$$2\left(1-\sin^2\frac{\pi x}{6}\right)+3\sin\frac{\pi x}{6}=0;\quad 2-2\sin^2\frac{\pi x}{6}+3\sin\frac{\pi x}{6}=0;$$

$$2\sin^2\frac{\pi x}{6}-3\sin\frac{\pi x}{6}-2=0.$$

Решим это квадратное уравнение относительно $\sin\dfrac{\pi x}{6}$:

$$\sin\frac{\pi x}{6}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm 5}{4}=\left[\begin{array}{l}2\\ -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{\pi x}{6} = 2 \quad \notin [-1;1] \\ \sin\dfrac{\pi x}{6} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi x}{6} = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \dfrac{\pi x}{6} = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{6} = -\dfrac{1}{6} + 2k \\ \dfrac{x}{6} = -\dfrac{5}{6} + 2k \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{ll} x = -1 + 12k & x = -1 \\ x = -5 + 12k & \emptyset \ (\text{так как } |x| \leqslant 1) \end{array}\right..$$

Ответ: $x = -1$.

2) $\operatorname{tg}(\pi x) - \sqrt{3}\operatorname{ctg}(\pi x) = \sqrt{3} - 1$ при $x \in [-2{,}5; -2]$.

Домножим на $\operatorname{tg}(\pi x)$:

$\operatorname{tg}^2(\pi x) - \sqrt{3} = \left(\sqrt{3} - 1\right)\operatorname{tg}(\pi x)$;

$\operatorname{tg}^2(\pi x) - \left(\sqrt{3} - 1\right)\operatorname{tg}(\pi x) - \sqrt{3} = 0$.

Получилось квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}(\pi x)$. Решим его.

$$\operatorname{tg}(\pi x) = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 + 4\sqrt{3}}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{3 + 1 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{3 + 1 + 2\sqrt{3}}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2}}{2} = \frac{\left(\sqrt{3} - 1\right) \pm \left(\sqrt{3} + 1\right)}{2}.$$

а) $\operatorname{tg}(\pi x) = \sqrt{3}$; $\quad \pi x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k$; $\quad x = \dfrac{1}{3} + k$; $x \notin [-2{,}5; -2]$, так как $k \in \mathbb{Z}$;

б) $\operatorname{tg}(\pi x) = -1$; $\quad \pi x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$; $\quad x = -\dfrac{1}{4} + k$; $\quad x \doteq -2\dfrac{1}{4}$ при $k = -2$.

Ответ: $x = -2\dfrac{1}{4}$.

4. Вычислите:

1). $\dfrac{2}{\pi}\left(\arcsin\dfrac{3}{4}+\arccos\dfrac{3}{4}\right)$.

Возьмем косинус от выражения в скобках, учтя, что $\arcsin\dfrac{3}{4}\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\arccos\dfrac{3}{4}\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$\cos\left(\arcsin\frac{3}{4}+\arccos\frac{3}{4}\right)=$$
$$=\cos\left(\arccos\frac{3}{4}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)-$$
$$-\sin\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)\cdot\cos\left(\arccos\frac{3}{4}\right)=$$
$$=\frac{3}{4}\cos\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}\sin\left(\arccos\frac{3}{4}\right)=$$
$$=\frac{3}{4}\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)}-\frac{3}{4}\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{3}{4}\right)}=$$
$$=\frac{3}{4}\sqrt{1-\frac{9}{16}}-\frac{3}{4}\sqrt{1-\frac{9}{16}}=0,$$

значит, $\arcsin\dfrac{3}{4}+\arccos\dfrac{3}{4}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$.

$\dfrac{\pi}{2}>\arcsin\dfrac{3}{4}>\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{4}>\arccos\dfrac{3}{4}>0$, тогда

$\dfrac{3\pi}{4}>\arcsin\dfrac{3}{4}+\arccos\dfrac{3}{4}>\dfrac{\pi}{4}$,

что возможно только при $k=0$, тогда

$\arcsin\dfrac{3}{4}+\arccos\dfrac{3}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

Следовательно, $\dfrac{2}{\pi}\left(\arcsin\dfrac{3}{4}+\arccos\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\boxed{1}$.

Примечание. Зная тождество $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$, можно было бы уместить решение в одну строку.

2) $\sin\left(2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{2}\right)\cdot \mathrm{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{15}{17}\right)$.

Пусть $\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{2}=\alpha$, $\arcsin\dfrac{15}{17}=\beta$,

тогда $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\sin\beta=\dfrac{15}{17}$; $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Найдем $\sin 2\alpha$ и $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\beta}{2}\right)$, а затем перемножим.

а) $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, значит $\cos\alpha=2\sin\alpha$;

$\cos^2\alpha=4\sin^2\alpha$; $1-\sin^2\alpha=4\sin^2\alpha$;

$1=5\sin^2\alpha$; $\sin^2\alpha=\dfrac{1}{5}$; $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\left(\sin\alpha>0,\text{ так как } \alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$;

$\cos\alpha=2\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Итак, $\sin 2\alpha=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$.

б) $\sin\beta=\dfrac{15}{17}$;

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1-\frac{225}{289}}=\sqrt{\frac{64}{289}}=\frac{8}{17}$$

$\left(\cos\beta>0,\text{ так как } \beta\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$;

$$\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}=\frac{\frac{15}{17}}{1+\frac{8}{17}}=\frac{15}{17+8}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

Значит, $\sin 2\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{12}{25}=\boxed{0{,}48}$.

Решение карточки 10

1. Вычислите:

1) $(6\operatorname{tg}^2 30^\circ + 2\cos 180^\circ)\cdot \sin 93^\circ =$

$$= \left(6\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\cdot(-1)\right)\cdot \sin 93^\circ = \left(\frac{6}{3}-2\right)\cdot \sin 93^\circ = \boxed{0}.$$

2) $$\frac{\sin 20^\circ\cdot\cos 10^\circ\cdot\cos 60^\circ + \cos 160^\circ\cdot\cos 100^\circ\cdot\sin 150^\circ}{\sin 21^\circ\cdot\cos 9^\circ + \cos 159^\circ\cdot\cos 99^\circ} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin 20^\circ\cdot\cos 10^\circ + \frac{1}{2}\cos 160^\circ\cdot\cos 100^\circ}{\sin 21^\circ\cdot\cos 9^\circ + \cos 159^\circ\cdot\cos 99^\circ} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 20^\circ\cdot\cos 10^\circ + \cos 20^\circ\cdot\sin 10^\circ}{\sin 21^\circ\cdot\cos 9^\circ + \cos 21^\circ\cdot\sin 9^\circ} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(20^\circ+10^\circ)}{\sin(21^\circ+9^\circ)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

3) $128\cdot\sin^2 20^\circ\cdot\sin^2 40^\circ\cdot\sin^2 60^\circ\cdot\sin^2 80^\circ =$

$$= 128\sin^2 20^\circ\cdot\sin^2 40^\circ\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\sin^2 80^\circ =$$

$$= 3\cdot 32\sin^2 20^\circ\cdot\sin^2 40^\circ\cdot\sin^2 80^\circ;$$

$$\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ = \sin 40^\circ\cdot(\sin 20^\circ\cdot\sin 80^\circ) =$$

$$= \cos 50^\circ\cdot(\cos 10^\circ\cos 70^\circ) = \cos 50^\circ\cdot\frac{1}{2}(\cos 80^\circ+\cos 60^\circ) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 50^\circ\cdot\cos 80^\circ + \frac{1}{4}\cos 50^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 130^\circ + \cos 30^\circ) + \frac{1}{4}\cos 50^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 130^\circ + \cos 50^\circ) + \frac{1}{4}\cos 30^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}(-\cos 50^\circ + \cos 50^\circ) + \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Значит, $3\cdot 32(\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ)^2 = 3\cdot 32\cdot\frac{3}{64} = \boxed{\frac{9}{2}}.$

4) $\dfrac{\sin^4 3+\cos^4 3-1}{\cos^6 3+\sin^6 3-1} : \dfrac{1}{3}$.

а) $\sin^4 3+\cos^4 3-1=$
$=\left(\sin^2 3\right)^2+\left(\cos^2 3\right)^2+$
$+2\sin^2 3\cdot\cos^2 3-1-2\cos^2 3\cdot\sin^2 3=$
$=\left(\sin^2 3+\cos^2 3\right)^2-1-\dfrac{1}{2}\cdot 4\sin^2 3\cdot\cos^2 3=$
$=1-1-\dfrac{1}{2}\sin^2 6=-\dfrac{1}{2}\sin^2 6;$

б) $\sin^6 3+\cos^6 3-1=\left(\cos^2 3\right)^3+\left(\cos^2 3\right)^3-1=$
$=\left(\sin^2 3+\cos^2 3\right)\left(\cos^4 3+\sin^4 3-\sin^2 3\cdot\cos^2 3\right)-1=$
$=\cos^4 3+\sin^4 3-\sin^2 3\cdot\cos^2 3-1=$
$=\left(\sin^2 3+\cos^2 3\right)^2-2\sin^2 3\cdot\cos^2 3-\sin^2 3\cdot\cos^2 3-1=$
$=1-3\sin^2 3\cdot\cos^2 3-1=$
$=-\dfrac{3}{4}\cdot 4\sin^2 3\cdot\cos^2 3=-\dfrac{3}{4}\sin^2 6.$

Следовательно,

$$\frac{\sin^4 3+\cos^4 3-1}{\cos^6 3+\sin^6 3-1} : \frac{1}{3}=\frac{-\frac{1}{2}\sin^2 6}{-\frac{3}{4}\sin^2 6} : \frac{1}{3}=\frac{2}{3} : \frac{1}{3}=\boxed{2}.$$

2. Найдите наименьшее значение функции

$$f(\alpha)=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha};\quad \operatorname{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Произведем замену:

$f(\alpha)=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+1+\operatorname{ctg}^2\alpha+1=$
$=2\left(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\right)+2;$

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}\geqslant 2;$$

значит $2\left(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\right)\geqslant 4;\quad 2\left(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\right)+2\geqslant 6.$

Итак, $f(\alpha)\geqslant 6$, т. е. $f_{\min}(\alpha)=6$.

3. Вычислите:

1) $\dfrac{1}{\pi}\left(\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\boxed{0{,}5}.$$

2) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{5}-2\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right).$

Обозначим $\arccos\dfrac{3}{5}=\alpha$, а $\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\beta$,

тогда $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\beta=-\dfrac{1}{2}$; $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

а) Вычислим $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{1+\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-\frac{9}{25}}}{1+\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{\frac{16}{25}}}{\frac{8}{5}}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{5}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

б) $\operatorname{tg}2\beta=\dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}$; $\operatorname{tg}\beta=-\dfrac{1}{2}$, значит

$$\operatorname{tg}2\beta=\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{-1}{\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}-2\beta\right)=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}2\beta}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}2\beta}=$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}=\frac{\frac{3}{6}+\frac{8}{6}}{1-\frac{4}{6}}=\frac{\frac{11}{6}}{\frac{2}{6}}=\boxed{5{,}5}.$$

4. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{tg}(2\pi x) = \operatorname{tg}(3\pi x), \quad 2{,}4 < x < 3{,}2.$

$$\operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{tg}(2\pi x) = \operatorname{tg}(\pi x + 2\pi x);$$

$$\operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{tg}(2\pi x) = \frac{\operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{tg}(2\pi x)}{1 - \operatorname{tg}(\pi x)\cdot\operatorname{tg}(2\pi x)}.$$

а) Пусть $\operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{tg}(2\pi x) \neq 0$ (обозначим это условие (*)), тогда

$$1 = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}(\pi x)\cdot\operatorname{tg}(2\pi x)};$$

$$1 - \operatorname{tg}(\pi x)\cdot\operatorname{tg}(2\pi x) = 1; \quad \operatorname{tg}(\pi x)\cdot\operatorname{tg}(2\pi x) = 0.$$

1. $\operatorname{tg}(\pi x) = 0; \quad \pi x = \pi k; \quad x = k \,|\, k \in \mathbb{Z};$
   $x = 3 \in (2{,}4; 3{,}2)$ при $k = 3$ не удовлетворяет условию (*);
2. $\operatorname{tg}(2\pi x) = 0; \quad 2\pi x = \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}; \quad x = \dfrac{k}{2};$
   $x = 2{,}5 \in (2{,}4; 3{,}2)$ при $k = 5$;
   $x = 3 \in (2{,}4; 3{,}2)$ при $k = 6$ не удовлетворяет условию (*).

б) Пусть $\operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{tg}(2\pi x) = 0$, тогда

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

$$\sin(3\pi x) = 0; \quad 3\pi x = \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{k}{3}.$$

$x = 2\frac{2}{3} \in (2{,}4; 3{,}2)$ при $k = 8$;

$x = 3 \in (2{,}4; 3{,}2)$ при $k = 9$.

Ответ: $\left\{2{,}5; 2\frac{2}{3}; 3\right\}$.

2) $2\cos^2(\pi x) = \sqrt{2}\sin(\pi x); \quad |x| \leqslant \dfrac{1}{2}.$

$$2\left(1 - \sin^2(\pi x)\right) = \sqrt{2}\sin(\pi x); \; 2 - 2\sin^2(\pi x) = \sqrt{2}\sin(\pi x);$$

$$2\sin^2(\pi x) + \sqrt{2}\sin(\pi x) - 2 = 0.$$

Решим квадратное уравнение относительно $\sin(\pi x)$:

$$\sin(\pi x) = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2+16}}{4} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{4} = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{4}.$$

а) $\sin(\pi x) = -\sqrt{2} \notin [-1; 1] \quad \emptyset$;

б) $\sin(\pi x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \quad \pi x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k; \quad x = \dfrac{1}{4} + 2k \mid k \in \mathbb{Z};$

$$\pi x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \quad x = \frac{3}{4} + 2k; \quad x = \frac{1}{4}; \quad |x| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x = \dfrac{1}{4}$.

3) $\sin^3\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) - \cos^3\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$;
$1{,}5 < x < 3$.

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = \frac{1}{4};$$

$$2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(-\left(\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)\right) = \frac{1}{2};$$

$$\sin(\pi x) \cdot (-\cos(\pi x)) = \frac{1}{2}; \quad -\sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x) = \frac{1}{2};$$

$$2\sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x) = -1; \quad \sin(2\pi x) = -1;$$

$$2\pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad x = -\frac{1}{4} + k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$x_1 = \frac{7}{4} \ (k = 2); \quad x_2 = \frac{11}{4} \ (k = 3);$$

$x_1, x_2 \in (1{,}5; 3)$.

Ответ: $\{1{,}75; 2{,}75\}$.

Решение карточки 11

1. Вычислите:

1) $$\frac{6\sin 390^\circ\cdot\cos(-390^\circ)}{\cos^2 30^\circ-\sin^2 30^\circ}=\frac{6\sin 390^\circ\cdot\cos 390^\circ}{\cos 60^\circ}=$$
$$=\frac{6\sin(360^\circ+30^\circ)\cdot\cos(360^\circ+30^\circ)}{\cos 60^\circ}=$$
$$=\frac{6\sin 30^\circ\cdot\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ}=\frac{3\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}=3\operatorname{tg}60^\circ=\boxed{3\sqrt{3}}.$$

2) $$\sin^6 15^\circ+3\sin^2 15^\circ\cdot\cos^2 15^\circ+\cos^6 15^\circ=$$
$$=\left(\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ\right)\left(\sin^4 15^\circ-\sin^2 15^\circ\cdot\cos^2 15^\circ+\cos^4 15^\circ\right)+$$
$$+3\sin^2 15^\circ\cdot\cos^2 15^\circ=$$
$$=\sin^4 15^\circ+\cos^4 15^\circ+2\sin^2 15^\circ\cdot\cos^2 15^\circ=$$
$$=\left(\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ\right)^2=\boxed{1}.$$

3) $$\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}40^\circ\cdot\operatorname{tg}80^\circ=\frac{\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ}{\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ}.$$

а) $$\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ=$$
$$=\frac{2\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}=$$
$$=\frac{2\sin 40^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ}=\frac{2\sin 80^\circ\cdot\cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ}=$$
$$=\frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}.$$

б) $$\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ=$$
$$=\sin(90^\circ-70^\circ)\cdot\sin(90^\circ-50^\circ)\cdot\sin(90^\circ-10^\circ)=$$
$$=\cos 70^\circ\cdot\cos 50^\circ\cdot\cos 10^\circ=$$
$$=\frac{1}{2}\cos 50^\circ\cdot\cos 80^\circ+\frac{1}{4}\cos 50^\circ=$$
$$=\frac{1}{4}(\cos 130^\circ+\cos 30^\circ)+\frac{1}{4}\cos 50^\circ=$$
$$=\frac{1}{4}(\cos 130^\circ+\cos 50^\circ)+\frac{1}{4}\cos 30^\circ=$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos(180^\circ - 50^\circ) + \cos 50^\circ\right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= \frac{1}{4}(-\cos 50^\circ + \cos 50^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Таким образом, $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{8}}{\frac{1}{8}} = \boxed{\sqrt{3}}$.

4) $\sqrt{26}\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{5}{12}$ при $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad -\frac{5}{12} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$
$$-5\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) = 24\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}; \quad 24\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 5\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 1\right);$$
$$24\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 5\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 5; \quad 5\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 24\frac{\alpha}{2} - 5 = 0;$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{144+25}}{5} = \frac{12 \pm \sqrt{169}}{5} = \frac{12 \pm 13}{5};$$
$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 5 \\ \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{5} \end{array}\right.;$$
$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 0,$$

значит, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{5}$ не подходит.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad \cos\frac{\alpha}{2} > 0 \quad \left(\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}\right).$$

Поэтому $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+5^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

Значит, $\sqrt{26}\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{26} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{26}} = \boxed{1}$.

5) $\sqrt{3}\sin 2\alpha + \sin\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ при $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

а) Найдем $\cos\alpha$.

$\cos\alpha < 0$, поэтому $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \left(\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2} = -\dfrac{1}{7}$.

б) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$, $\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$,

значит, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{7}}{2}} = \dfrac{2}{7}\sqrt{7}$.

в) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, значит,

$\sin 2\alpha = 2\cdot\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\left(-\dfrac{1}{7}\right) = -\dfrac{8\sqrt{3}}{49}$.

г) $\sqrt{3}\sin 2\alpha + \sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{8\sqrt{3}}{49}\right) + \dfrac{2}{7}\sqrt{7} = \dfrac{14\sqrt{7}-24}{49}$.

Ответ: $\sqrt{3}\sin 2\alpha + \sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{14\sqrt{7}-24}{49}$.

6) $\dfrac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}(-1) + \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$

$= \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{2}$.

7) $\sin\left(2\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$.

Обозначим $\arcsin\dfrac{4}{5} = \alpha$, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Найдем $\sin 2\alpha$.

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{16}{25}} = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$;

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{5} = \boxed{\dfrac{24}{25}}$.

2. Решите уравнения:

1) $2\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)+\cos(2\pi x)=3$ при $10\leqslant x\leqslant 11$.

Для любых x $2\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\leqslant 2$ и $\cos(2\pi x)\leqslant 1$,

значит, для любых x $2\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)+\cos(2\pi x)\leqslant 3$.

Очевидно, что для корней уравнения одновременно должны выполняться равенства $2\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)=2$ и $\cos(2\pi x)=1$.

а) $2\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)=2;\quad \sin^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)=1\Rightarrow\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)=0;$
$\dfrac{\pi x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\quad k\in\mathbb{Z};$
$x=1+2k$, по условию $x=11$ $(k=5)$.

б) $\cos(2\pi x)=1;\quad 2\pi x=2\pi n;\quad n\in\mathbb{Z};$

$x=n;$ по условию $x=n=10$ или $x=n=11$.

Одновременно с первым равенством решением является только $x=11\in[10;11]$.

Ответ: $x=11$.

2) $5\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi x}{3}\right)-\cos^{-2}\left(2\pi+\dfrac{\pi x}{3}\right)=3$ при $1\leqslant x\leqslant 4$;

Так как $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\alpha$, то

$5\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi x}{3}-\left(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi x}{3}\right)=3;\quad \operatorname{tg}^2\dfrac{\pi x}{3}=1.$

а) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{3}=1;\quad \dfrac{\pi x}{3}=\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\quad x=\dfrac{3}{4}+3k\,|\,k\in\mathbb{Z}.$

Учитывая, что $x\in[1;4]$, замечаем, что подходит только $k=1$, $x=3{,}75$.

б) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{3}=-1;\quad \dfrac{\pi x}{3}=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z};\quad x=-\dfrac{3}{4}+3n.$

Тут подходит только $n=1$, $x=2{,}25$.

Ответ: $\{2{,}25;3{,}75\}$.

3) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5} - 2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = x^2 - 3x - 4{,}5.$

$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ **4.6**

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ **5.9**

$\operatorname{ctg}2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$ **5.6**

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5} - 2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}\right) - \operatorname{tg}\left(2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)};$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}\right) = \frac{1-\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}{\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)} = \frac{1-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = 0{,}5;$$

$\arccos\dfrac{3}{5} \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, значит $\sin\left(\arccos\dfrac{3}{5}\right) =$

$$= \sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{3}{5}\right)} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arcctg}(-0{,}5)\right)} =$$

$$= \frac{2\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}(-0{,}5)\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\operatorname{arcctg}(-0{,}5)\right)-1} = \frac{-1}{0{,}25-1} = \frac{4}{3}.$$

Значит, $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{5} - 2\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) =$

$$= \frac{\frac{1}{2}-\frac{4}{3}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}} = -0{,}5.$$

Получаем уравнение $x^2 - 3x - 4{,}5 = -0{,}5;$

$x^2 - 3x - 4 = 0;\quad \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-1; 4\}$.

Решение карточки 12

1. Вычислите:

1) $\left(2\cos 30^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \operatorname{ctg} 960^\circ\right)^{-1} =$

$$= \left(\sqrt{3} - 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1} = \left(\frac{3+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{16\sqrt{3}-3}{12}\right)^{-1} = \frac{12}{16\sqrt{3}-3} =$$

$$= \frac{12\left(16\sqrt{3}+3\right)}{256\cdot 3 - 9} = \frac{4\left(16\sqrt{3}+3\right)}{256-3} = \boxed{\frac{4\left(16\sqrt{3}+3\right)}{253}}.$$

2) $\sin 167^\circ \cdot \sin 107^\circ + \sin 257^\circ \cdot \sin 197^\circ =$

$$= \sin(180^\circ - 13^\circ)\cdot\sin(90^\circ + 17^\circ) +$$
$$+ \sin(270^\circ - 13^\circ)\cdot\sin(180^\circ + 17^\circ) =$$
$$= \sin 13^\circ \cdot \cos 17^\circ + \sin 17^\circ \cdot \cos 13^\circ =$$
$$= \sin(17^\circ + 13^\circ) = \sin 30^\circ = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

3) $\cos 17^\circ \cdot \cos 73^\circ - \sin 13^\circ \cdot \cos 21^\circ - \cos 4^\circ \cdot \cos 86^\circ =$

$$= \cos 17^\circ \cdot \sin 17^\circ - \sin 13^\circ \cdot \cos 21^\circ - \cos 4^\circ \cdot \cos 86^\circ =$$
$$= \frac{1}{2}\sin 34^\circ - \frac{1}{2}(\sin 34^\circ - \sin 8^\circ) - \cos 4^\circ \cdot \sin 4^\circ =$$
$$= \frac{1}{2}\sin 34^\circ - \frac{1}{2}\sin 34^\circ + \frac{1}{2}\sin 8^\circ - \frac{1}{2}\sin 8^\circ = \boxed{0}.$$

4) $\cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ =$

$$= \cos 50^\circ \cdot \frac{1}{2}(2\cos 10^\circ \cdot \cos 70^\circ) =$$
$$= \frac{1}{2}\cos 50^\circ \cdot (\cos 80^\circ + \cos 60^\circ) =$$
$$= \frac{1}{2}\cos 50^\circ \cdot \cos 80^\circ + \frac{1}{4}\cos 50^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 130^\circ + \cos 30^\circ) + \frac{1}{4}\cos 50^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 130^\circ + \frac{1}{4}\cos 50^\circ + \frac{1}{4}\cos 30^\circ =$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 50^\circ + \frac{1}{4}\cos 50^\circ + \frac{1}{4}\cos 30^\circ = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{8}}.$$

5) $\sin 18^\circ$.

$\sin 54^\circ = \sin(90^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ$;

$\cos(2\cdot 18^\circ) = 1 - 2\sin^2 18^\circ$;

$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\cdot\cos 2\alpha + \cos\alpha\cdot\sin 2\alpha =$

$= \sin\alpha\cdot\big(1 - 2\sin^2\alpha\big) + 2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha =$

$= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cdot\big(1 - \sin^2\alpha\big) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

$\sin 54^\circ = \sin(3\cdot 18^\circ) = \cos(2\cdot 18^\circ)$;

$3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$;

$4\sin^3 18^\circ - 2\sin^2 18^\circ - 3\sin 18^\circ + 1 = 0$;

Обозначим $a = \sin 18^\circ$, тогда $4a^3 - 2a^2 - 3a + 1 = 0$;

Очевидно, $a = 1$ является корнем: $4 - 2 - 3 + 1 = 0$. Разделим:

$$\begin{array}{r|l}
4a^3 - 2a^2 - 3a + 1 & a - 1 \\ \cline{2-2}
-\;\underline{4a^3 - 4a^2\phantom{{}-3a+1}} & 4a^2 + 2a - 1 \\
2a^2 - 3a + 1 & \\
-\;\underline{2a^2 - 2a\phantom{{}+1}} & \\
-a + 1 & \\
-\;\underline{-a + 1} & \\
\end{array}$$

Значит, $(\sin 18^\circ - 1)\cdot\big(4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1\big) = 0$;

$\sin 18^\circ \neq 1$, значит $4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0$;

$$\sin 18^\circ = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{4} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} \\[2mm] \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.;$$

а) $\sin 18^\circ = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$ не подходит, так как $\sin 18^\circ > 0$ $(0^\circ < 18^\circ < 90^\circ)$.

б) Значит, $\sin 18^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Ответ: $\sin 18^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

6) $A(\alpha) = \dfrac{2\sin^2\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha}{3\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$$A(\alpha) = \frac{2\sin^2\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha}{3\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha\cdot\left(2\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha\right)}{\cos^2\alpha\cdot(3\operatorname{tg}^2\alpha + 2)} = \frac{2\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{3\operatorname{tg}^2\alpha + 2}.$$

Так как $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, то $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} =$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{1-\frac{5-2\sqrt{5}+1}{4}} = \frac{\sqrt{5}-1}{1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{5}-1} = 2.$$

Итак, $A(\alpha) = \dfrac{2\cdot 2^2 - 2}{3\cdot 2^2 + 2} = \dfrac{6}{14} = \boxed{\dfrac{3}{7}}$.

7) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$, если $\sin 4\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ при $\dfrac{\pi}{8} < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$.

Пусть $A(\alpha) = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha =$
$= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + \cos^4\alpha\right) =$
$= \sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha =$
$= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha =$
$= 1 - 3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha.$

Так как $\dfrac{\pi}{2} < 4\alpha < \pi$, то $\cos 4\alpha = -\sqrt{1-\sin^2 4\alpha}$,

т. е. $\cos 4\alpha = -\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = -\dfrac{1}{3}$.

Тогда $\sin 2\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 4\alpha}{2}}$, так как $\dfrac{\pi}{4} < 2\alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Значит, $\sin 2\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Таким образом, $A(\alpha) = 1 - \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3} = \boxed{0{,}5}$.

8) $\operatorname{ctg} 40^\circ - \dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg} 5^\circ} + \sqrt{\operatorname{tg} 5^\circ}}{\sqrt{\operatorname{ctg} 5^\circ} - \sqrt{\operatorname{tg} 5^\circ}} =$

$$= \operatorname{ctg} 40^\circ - \frac{\frac{1+\operatorname{tg} 5^\circ}{\sqrt{\operatorname{tg} 5^\circ}}}{\frac{1-\operatorname{tg} 5^\circ}{\sqrt{\operatorname{tg} 5^\circ}}} = \operatorname{ctg} 40^\circ - \frac{1+\operatorname{tg} 5^\circ}{1-\operatorname{tg} 5^\circ} =$$

$$= \operatorname{ctg} 40^\circ - \frac{\frac{\cos 5^\circ + \sin 5^\circ}{\cos 5^\circ}}{\frac{\cos 5^\circ - \sin 5^\circ}{\cos 5^\circ}} = \operatorname{ctg} 40^\circ - \frac{\cos 5^\circ + \cos 85^\circ}{\cos 5^\circ - \cos 85^\circ} =$$

$$= \operatorname{ctg} 40^\circ - \frac{2\cos 45^\circ \cdot \cos 40^\circ}{2\sin 45^\circ \cdot \sin 40^\circ} = \operatorname{ctg} 40^\circ - \frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \boxed{0}.$$

2. Решите уравнения:

1) $\sin^3\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\cdot\cos^3\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$

при $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0$.

$\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\cdot\left(\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) - \cos^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{4}$;

$\dfrac{1}{2}\sin\pi x\cdot(-\cos\pi x) = \dfrac{1}{4}$; $\quad -\dfrac{1}{2}\sin 2\pi x = \dfrac{1}{2}$; $\quad \sin 2\pi x = -1$;

$2\pi x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}$; $\quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} + k \\ -\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$; $\quad x = -\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $x = -\dfrac{1}{4}$.

2) $\cos(2\,\mathrm{arctg}\,7) - \sin(4\,\mathrm{arctg}\,3) = x^2 - 4x - 5.$

$\mathrm{arctg}\,7 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right); \quad \mathrm{arctg}\,3 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$

а) $\cos(2\,\mathrm{arctg}\,7) = 2\cos^2(\mathrm{arctg}\,7) - 1;$

$$\cos(\mathrm{arctg}\,7) = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\,7)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 7^2}} = \frac{1}{\sqrt{50}}.$$

Тогда $\cos(2\,\mathrm{arctg}\,7) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right)^2 - 1 = -\frac{24}{25}.$

б) $\sin(4\,\mathrm{arctg}\,3) = 2\sin(2\,\mathrm{arctg}\,3) \cdot \cos(2\,\mathrm{arctg}\,3)$.

$$\sin(2\,\mathrm{arctg}\,3) = \frac{2\,\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,3)}{1 + \mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\,3)} = \frac{2 \cdot 3}{1 + 3^2} = \frac{3}{5};$$

$$\cos(2\,\mathrm{arctg}\,3) = \frac{1 - \mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\,3)}{1 + \mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\,3)} = \frac{1 - 3^2}{1 + 3^2} = -\frac{4}{5},$$

тогда $\sin(4\,\mathrm{arctg}\,3) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$

Итак, $\cos(2\,\mathrm{arctg}\,7) - \sin(4\,\mathrm{arctg}\,3) = -\frac{24}{25} - \left(-\frac{24}{25}\right) = 0,$

и уравнение принимает вид $0 = x^2 - 4x - 5;$ $\left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-1; 5\}$.

Решение карточки 13

1. Решите уравнения:

1) $\sqrt{3}+2\cos\left(\dfrac{\pi x}{9}\right)=0$ при $8<x<20$.

$\cos\left(\dfrac{\pi x}{9}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{\pi x}{9}=\pm\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)+2\pi k$;

$x=\pm\dfrac{5}{6}\cdot 9+2k\cdot 9$; $x=\pm 7{,}5+18k \mid k\in\mathbb{Z}$.

По условию $8<\pm 7{,}5+18k<20$;

$\left[\begin{array}{ll} 0{,}5<18k<12{,}5 & k\in\emptyset \\ 15{,}5<18k<27{,}5 & k=1 \end{array}\right.$; $x=18-7{,}5=10{,}5$.

Ответ: $x=10{,}5$.

2) $\sin(x-30^\circ)\cdot\cos 2x=\sin(x-30^\circ)$.

$\sin(x-30^\circ)\cdot(\cos 2x-1)=0$; $\left[\begin{array}{l} \sin(x-30^\circ)=0 \\ \cos 2x=1 \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x-30^\circ=180^\circ k \\ 2x=360^\circ n \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=30^\circ+180^\circ k \\ x=180^\circ n \end{array}\right. \mid n,k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\{30^\circ+180^\circ k; 180^\circ n \mid k,n\in\mathbb{Z}\}$.

3) $\dfrac{5}{1+\operatorname{tg}^2 x}=3\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos x$.

$\dfrac{2}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=3\cdot\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\cos x$ $(\cos x\neq 0)$;

$\dfrac{2\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\sqrt{3}\cos x$; $2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x=0$;

$\cos x\cdot\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)=0$; разделим на $\cos x\neq 0$:

$\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4) $\cos 3x = \sin 2x.$

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin 2x=0;$$

$$2\sin\frac{3x+\frac{\pi}{2}-2x}{2}\cdot\cos\frac{3x+\frac{\pi}{2}+2x}{2}=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\\ \cos\left(\dfrac{5x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}=\pi k\\ \dfrac{5x}{2}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\\ x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi}{5}n\end{array}\right.\ |\, k,n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi}{5}n\,|\,k,n\in\mathbb{Z}\right\}.$

5) $\dfrac{\sin 6x}{\sin 4x}=1$ при $170^\circ < x < 200^\circ.$

$$\left\{\begin{array}{l}\sin 6x-\sin 4x=0\\ \sin 4x\neq 0\end{array}\right.;\qquad \left\{\begin{array}{l}2\sin\dfrac{6x-4x}{2}\cdot\cos\dfrac{6x+4x}{2}=0\\ 4x\neq 180^\circ p\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos 5x=0\end{array}\right.\\ x\neq 45^\circ p\end{array}\right.;\qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=180^\circ k\\ 5x=90^\circ+180^\circ n\end{array}\right.\\ x\neq 45^\circ p\end{array}\right.;$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=180^\circ k\\ x=18^\circ+36^\circ n\end{array}\right.\\ x\neq 45^\circ p\end{array}\right.;\qquad x=18^\circ+36^\circ n.$$

По условию

$170^\circ < 18^\circ+36^\circ n < 200^\circ;\qquad 152^\circ < 36^\circ n < 182^\circ;$

при $n=5\quad 152^\circ < 180^\circ < 182^\circ,$ значит,

$x=180^\circ+18^\circ=198^\circ\pm 45^\circ p.$

Ответ: $x=198^\circ.$

6) $\cos(70^\circ + x) \cdot \cos(20^\circ - x) = \dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{1}{2}\left[\cos(70^\circ + x - 20^\circ + x) + \cos(70^\circ + x + 20^\circ - x)\right] = \dfrac{1}{2}$;

$\cos(2x + 50^\circ) + \cos 90^\circ = 1$;

$\cos(2x + 50^\circ) = 1$; $\quad 2x + 50^\circ = 360^\circ k$;

$x = -25^\circ + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\{-25^\circ + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

7) $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$.

$\sin x \cdot (1 + 2\cos x) - \cos x \cdot (1 + 2\cos x) = 0$;

$(1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \pi k; \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

8) $\cos 2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 4\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2{,}5$.

$1 - 2\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 4\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2{,}5$;

$2\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 4\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 1 + 2{,}5 = 0$.

Положим $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = t$, тогда

$2t^2 - 4t + 1{,}5 = 0$; $\quad 4t^2 - 8t + 3 = 0$;

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{4} = \frac{4 \pm 2}{4} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{2}\notin[-1;1]\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.;$$

$$x+\frac{\pi}{3}=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n;$$

$$x=-\frac{\pi}{3}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{3}+(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$

или $\left\{-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\,|\,k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

9) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x.$

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1-\cos 8x}{2};$$

$$\cos 2x+\cos 4x=\cos 6x+\cos 8x;$$

$$2\cos 3x\cdot\cos x-2\cos 7x\cdot\cos x=0;$$

$$2\cos x\cdot(\cos 3x-\cos 7x)=0;\qquad 2\cos x\cdot 2\sin 5x\cdot\sin 2x=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin 5x=0\\ \sin 2x=0\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ x=\dfrac{\pi}{5}n\\ x=\dfrac{\pi}{2}t\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{5}n\\ x=\dfrac{\pi}{2}t\end{array}\right.\ |\,n,t\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{5}n;\dfrac{\pi}{2}t\,|\,n,t\in\mathbb{Z}\right\}$.

10) $\sin^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cdot\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0.$

$$\operatorname{tg}^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\operatorname{tg} x+\sqrt{3}=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=\sqrt{3}\\ \operatorname{tg} x=1\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+\pi k\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n\end{array}\right.\ |\,k,n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{3}+\pi k;\dfrac{\pi}{4}+\pi n\,|\,k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

11) $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2.$

$$\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}; \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Обозначим $\operatorname{tg} x = t$, тогда

$$\frac{2t}{1+t^2} + t = 2; \quad t^3 - 2t^2 + 3t - 2 = 0.$$

Очевидно, $t = 1$ — корень. Разделим на $t - 1$:

$$\begin{array}{r|l} t^3 - 2t^2 + 3t - 2 & t - 1 \\ \cline{2-2} -\; t^3 - t^2 \qquad\quad & t^2 - t + 2 \\ \cline{1-1} -t^2 + 3t - 2 & \\ -\; -t^2 + t \qquad & \\ \cline{1-1} 2t - 2 & \\ -\; 2t - 2 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$t^2 - t + 2 = 0; \quad D < 0$, остается один корень.

$$\operatorname{tg} x = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Докажите тождество

$$\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

$$\text{L} = \frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\alpha-\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{L} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) \\ \Pi = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) \end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi.$$

3. Вычислите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}+1$.

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}+1}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2} = \frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{2+2\sqrt{2}+1+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2} = \frac{2+2\sqrt{2}+1-1}{2+2\sqrt{2}+1+1} =$$

$$= \frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{2\left(2+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 1.$$

4. Решите неравенство $\sqrt{5-2\sin x} \geqslant 6\sin x - 1$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6\sin x - 1 \geqslant 0 \\ 5-2\sin x \geqslant (6\sin x-1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x \leqslant \dfrac{1}{6} \\ 5-2\sin x \geqslant 0 \quad \forall x \end{cases} \end{array}\right. ;$$

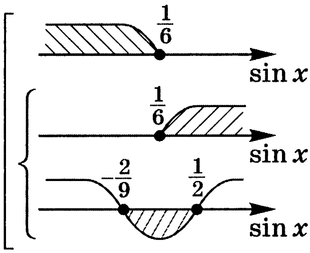
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x \geqslant \dfrac{1}{6} \\ 36\sin^2 x - 10\sin x \leqslant 4 \end{cases} ; \\ \sin x \leqslant \dfrac{1}{6} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x \geqslant \dfrac{1}{6} \\ 18\sin^2 x - 5\sin x - 2 \leqslant 0 \end{cases} . \\ \sin x \leqslant \dfrac{1}{6} \end{array}\right.$$

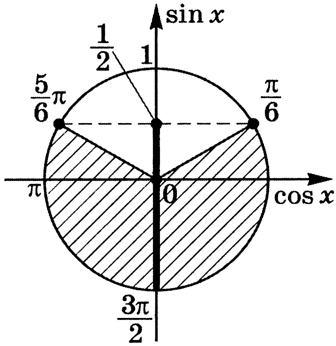
Рассмотрим неравенство $18\sin^2 x - 5\sin x - 2 \leqslant 0$.

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{2\cdot 18} = \frac{5\pm 13}{36};$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = -\dfrac{2}{9} \end{array}\right.;$$



$$\left[\begin{array}{l} \sin x \leqslant \dfrac{1}{6} \\ \begin{cases} \sin x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \sin x \geqslant \dfrac{1}{6} \end{cases} \end{array}\right. ; \qquad \sin x \leqslant \frac{1}{2}.$$



Ответ: $\left\{\left[\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k; \dfrac{13\pi}{6} + 2\pi k\right] \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

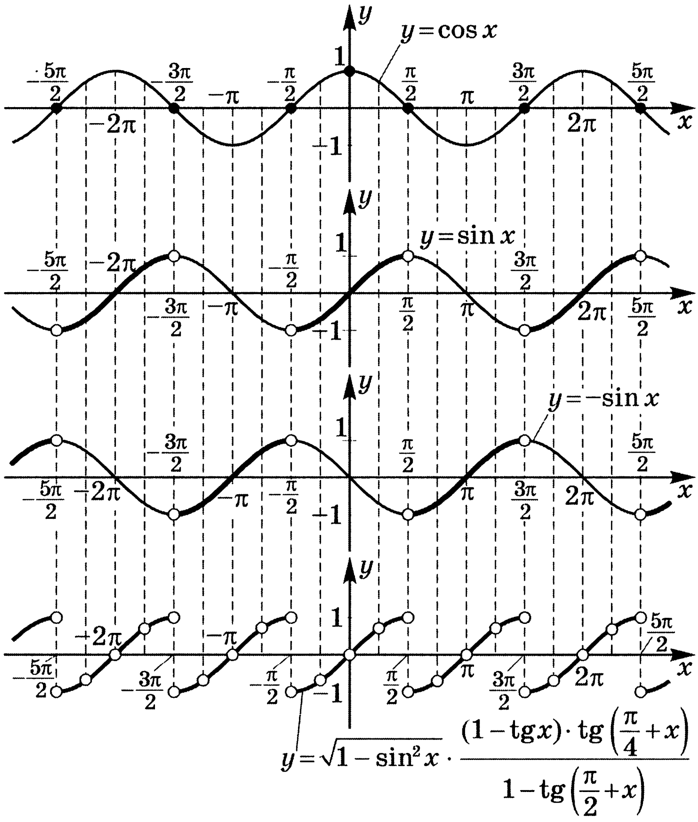
5. Постройте график:

$$y(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \frac{(1 - \operatorname{tg} x) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}.$$

$$y = |\cos x| \cdot \frac{(1 - \operatorname{tg} x) \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}}{1 + \operatorname{ctg} x} = |\cos x| \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x}} =$$

$$= |\cos x| \cdot \operatorname{tg} x = \begin{cases} \sin x, & \cos x > 0 \\ -\sin x, & \cos x < 0 \end{cases}.$$

$$D(y): \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \operatorname{ctg} x \neq -1 \end{cases} \qquad x \neq \frac{\pi}{4} k \mid k \in \mathbb{Z}.$$


$y = \cos x$
$y = \sin x$
$y = -\sin x$
$y = \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \dfrac{(1-\operatorname{tg} x)\cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}$

Решение карточки 14

1. Решите уравнения:

1) $1+2\sin\dfrac{\pi x}{3}=0$ при $2<x<4$.

$\sin\dfrac{\pi x}{3}=-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\pi x}{3}=(-1)^k\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\pi k$;

$x=(-1)^{k+1}\dfrac{1}{2}+3k$.

По условию $2<(-1)^{k+1}\dfrac{1}{2}+3k<4$.

При $k=1$ $2<3{,}5<4$, других таких целых k не существует.

Ответ: $x=3{,}5$.

2) $\cos 2x\cdot\sin 3x=\cos 2x$.

$\cos 2x\cdot(\sin 3x-1)=0$; $\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \sin 3x=1\end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ 3x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k\\ x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}n\end{array}\right. \mid k,n\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k;\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}n\mid k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

3) $\sin 2x=\operatorname{tg}60^\circ\cdot\sin x$.

$2\sin x\cdot\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$;

$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=\pi k\\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\end{array}\right. \mid k,n\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\pi k;\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\mid k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

4) $\sin 2x + \cos 3x = 0$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

$$\sin 2x + \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$2\sin\frac{2x + 3x + \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \cos\frac{3x - 2x + \frac{\pi}{2}}{2} = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\dfrac{5x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{5x}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \pi k \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi}{5}k \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \notin \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z};$$

$$0 < -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}k < \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{10} < \frac{2\pi}{5}k < \frac{3\pi}{5};$$

при $k = 1$ $\quad x = -\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{3\pi}{10}$.

Ответ: $\left\{\dfrac{3\pi}{10}\right\}$.

5) $\cos 5x + \cos x = -2\cos 3x$.

$$2\cos\frac{5x + x}{2} \cdot \cos\frac{5x - x}{2} + 2\cos 3x = 0;$$

$$2\cos 3x \cdot (\cos 2x + 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0 \\ \cos 2x = -1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}k \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}k; \dfrac{\pi}{2} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

6) $2\sin(40^\circ + x)\cdot\sin(50^\circ - x) = -1.$

$\cos(40^\circ + x - 50^\circ + x) - \cos(40^\circ + x + 50^\circ - x) = -1;$

$\cos(2x - 10^\circ) = -1; \quad 2x - 10^\circ = 180^\circ + 360^\circ k;$

$x = 95^\circ + 180^\circ k \,|\, k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\{95^\circ + 180^\circ k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$.

7) $\sin 4x = \cos^4 x - \sin^4 x.$

$\sin 4x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x);$

$2\sin 2x \cdot \cos 2x - \cos 2x = 0; \quad \left[\begin{array}{l} 2\cos 2x = 0 \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.;$

$\left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ 2x = (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k \\ x = (-1)^n\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}n \end{array}\right. \,|\, k, n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k;\, (-1)^n\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}n \,|\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

8) $8\cos^4 x = 11\cos 2x - 1.$

$8\left(\dfrac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = 11\cos 2x - 1;$

$2(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) = 11\cos 2x - 1;$

$2\cos^2 2x - 7\cos 2x + 3 = 0;$

$\cos 2x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \dfrac{7 \pm 5}{4}.$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 3 \notin [-1; 1] \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.; \quad \cos 2x = \dfrac{1}{2};$

$2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

9) $\cos\dfrac{4x}{3}+\sin^2\dfrac{3x}{2}+2\sin^2\dfrac{5x}{6}=\cos^2\dfrac{3x}{2}.$

$$\cos\frac{4x}{3}+\sin^2\frac{3x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}+1-\cos\frac{5x}{3}=0;$$

$$\cos\frac{4x}{3}-\cos 3x+1-\cos\frac{5x}{3}=0;$$

$$2\sin\frac{\frac{4x}{3}+\frac{5x}{3}}{2}\cdot\sin\frac{\frac{5x}{3}-\frac{4x}{3}}{2}+2\sin^2\frac{3x}{2}=0;$$

$$2\sin\frac{3x}{2}\cdot\left(\sin\frac{x}{6}+\sin\frac{3x}{2}\right)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{3x}{2}=0\\ 2\sin\dfrac{\frac{x}{6}+\frac{3x}{2}}{2}\cdot\cos\dfrac{\frac{3x}{2}-\frac{x}{6}}{2}=0\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{3x}{2}=0\\ \sin\dfrac{5x}{6}=0\\ \cos\dfrac{2x}{3}=0\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi}{3}k\\ x=\dfrac{6\pi}{5}n\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{3\pi}{2}t\end{array}\right.\quad |\,k,n,t\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{2\pi}{3}k;\ \dfrac{6\pi}{5}n;\ \dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{3\pi}{2}t\,|\,k,n,t\in\mathbb{Z}\right\}.$

10) $\sqrt{3}\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0.$

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg}x+\sqrt{3}=0;\qquad (\operatorname{tg}x)_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\pm 1}{\sqrt{3}};$$

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=\sqrt{3}\\ \operatorname{tg}x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+\pi k\\ x=\dfrac{\pi}{6}+\pi n\end{array}\right.\quad |\,k,n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{3}+\pi k;\ \dfrac{\pi}{6}+\pi n\,|\,k,n\in\mathbb{Z}\right\}.$

11) $$\frac{\sin^2 x - 2}{\sin^2 x - 4\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}.$$

$$\cos\frac{x}{2} \neq 0; \quad \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x \neq \pi + 2\pi k.$$

$$\frac{\sin^2 x - 2}{4\cos^2 \frac{x}{2} \cdot \left(\sin^2 \frac{x}{2} - 1\right)} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2};$$

$$\sin^2 x - 2 = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \left(-4\cos^4 \frac{x}{2}\right);$$

$$\sin^2 x - 2 = -4\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}; \quad \sin^2 x - 2 = -\sin^2 x;$$

$$\sin^2 x = 1; \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{array}\right.; \quad x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Докажите тождество $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{2}.$

$$\mathrm{L} = \frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\alpha + 2\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin\alpha}{2\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha + \sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L} = \sqrt{2} \\ \Pi = \sqrt{2} \end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

3. Вычислите

$\sin(\alpha - 2\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$; $\operatorname{tg}\beta = -0{,}75$ при $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

$\sin(\alpha - 2\beta) = \sin\alpha \cdot \cos 2\beta - \sin 2\beta \cdot \cos\alpha.$

Найдем $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha > 0$.

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad \sin\alpha = \frac{2{,}4}{\sqrt{1+(2{,}4)^2}} = \frac{2{,}4}{2{,}6} = \frac{12}{13};$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}.$$

$$\cos 2\beta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}; \quad \cos 2\beta = \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{16-9}{16+9} = \frac{7}{25};$$

$$\sin 2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}; \quad \sin 2\beta = \frac{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\frac{9}{16}} = -\frac{24}{25}.$$

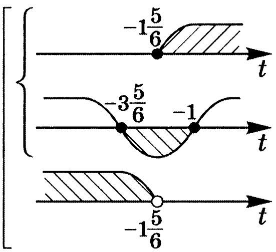
Итак, $\sin(\alpha-2\beta) = \frac{12}{13}\cdot\frac{7}{25} - \frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{84+120}{13\cdot 25} = \boxed{\frac{204}{325}}$.

4. Решите неравенство $\sqrt{7-18\operatorname{tg}x} \geqslant 6\operatorname{tg}x + 11$.

Положим $\operatorname{tg}x = t$. Тогда неравенство равносильно системе

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6t+11 \geqslant 0 \\ 7-18t \geqslant (6t+11)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 6t+11 < 0 \\ 7-18t \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \geqslant -\dfrac{11}{6} \\ 36t^2+132t+121 \leqslant 7-18t \end{cases} \\ \begin{cases} t < -\dfrac{11}{6} \\ t \leqslant \dfrac{7}{18} \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \geqslant -1\dfrac{5}{6} \\ 6\left(t+3\dfrac{1}{6}\right)(t+1) \leqslant 0 \end{cases} \\ t < -1\dfrac{5}{6} \end{array}\right.;$$



$t \leqslant -1.$

Итак, $t = \operatorname{tg}x \leqslant -1$; $\quad -\frac{\pi}{2} + \pi k < x \leqslant -\frac{\pi}{4} + \pi k$.

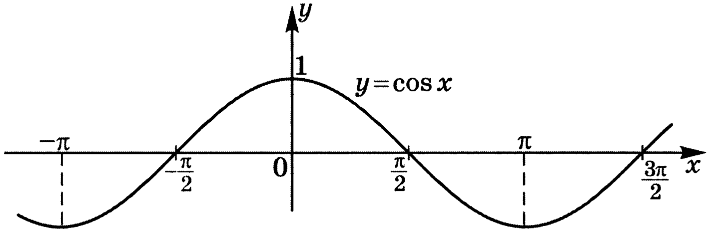
Ответ: $\left\{\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; -\frac{\pi}{4}+\pi k\right] \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

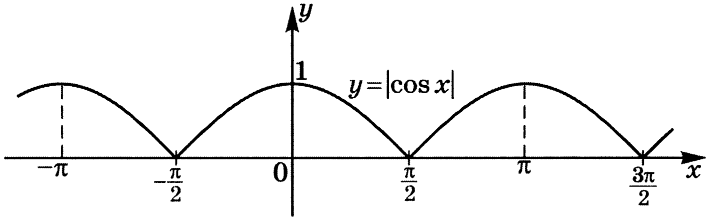
5. Постройте график $y(x) = \sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}2x\cdot(1+\operatorname{tg}2x)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}$.

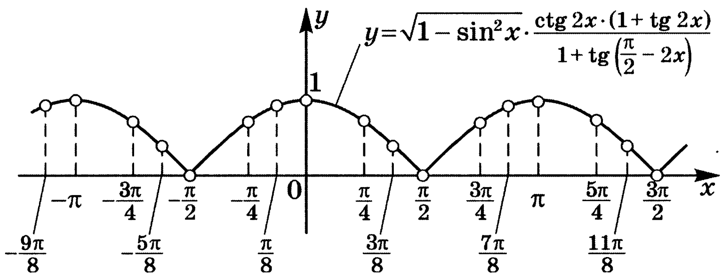
$$y(x) = |\cos x|\cdot\frac{\operatorname{ctg}2x\cdot(1+\operatorname{tg}2x)}{1+\operatorname{ctg}2x} =$$

$$= |\cos x|\cdot\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\cdot\frac{\cos 2x+\sin 2x}{\sin 2x+\cos 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = |\cos x|.$$

$$D(y):\ \begin{cases}\cos 2x\neq 0\\ \sin 2x\neq 0\\ \operatorname{ctg}2x\neq -1\end{cases};\quad \begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k\\ x\neq\dfrac{\pi}{2}n\\ x\neq-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}t\end{cases}.$$







Решение карточки 15

1. Решите уравнения:

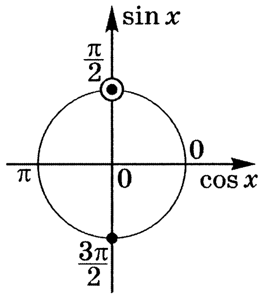
1) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$

$2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0; \quad 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 2 \notin [-1;1] \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.; \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{(-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

2) $\dfrac{\cos x}{1 - \sin x} = 0.$



$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases}; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

3) $\sin 2x = \sin 3x.$

$\sin 2x - \sin 3x = 0; \quad 2\sin\dfrac{2x - 3x}{2} \cdot \cos\dfrac{2x + 3x}{2} = 0;$

$\sin\left(-\dfrac{x}{2}\right) \cdot \cos\dfrac{5x}{2} = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(-\dfrac{x}{2}\right) = 0 \\ \cos\dfrac{5x}{2} = 0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = \pi k \\ \dfrac{5x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi k \\ x = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2}{5}\pi n \end{array}\right. \,|\, k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{2\pi k; \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2}{5}\pi n \,|\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

4) $\cos(2x - 630^\circ) = \sin(4x + 540^\circ)$ при $90^\circ < x < 180^\circ$.

а) $\cos(2x - 630^\circ) = \cos(2x - 630^\circ + 720^\circ) =$
$= \cos(2x + 90^\circ) = -\sin 2x$;

б) $\sin(4x + 540^\circ) = \sin(4x + 540^\circ - 720^\circ) =$
$= \sin(4x - 180^\circ) = -\sin 4x$.

Тогда $-\sin 2x = -\sin 4x$; $\quad \sin 4x - \sin 2x = 0$;

$$2\sin\frac{4x - 2x}{2} \cdot \cos\frac{4x + 2x}{2} = 0; \quad \sin x \cdot \cos 3x = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 180^\circ k \\ 3x = 90^\circ + 180^\circ n \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 180^\circ k \\ x = 30^\circ + 60^\circ n \end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

По условию $\left[\begin{array}{l} 90^\circ < 180^\circ k < 180^\circ \\ 90^\circ < 30^\circ + 60^\circ n < 180^\circ \end{array}\right.$.

Первое неравенство не выполняется при любых целых k.

Второе выполняется только при $n = 2$, тогда $x = 30^\circ + 2 \cdot 60^\circ = 150^\circ$.

Ответ: $x = 150^\circ$.

5) $\sin x + \sin 5x = 2\cos 2x$.

$$2\sin\frac{x + 5x}{2} \cdot \cos\frac{5x - x}{2} - 2\cos 2x = 0;$$

$$2\cos 2x \cdot (\sin 3x - 1) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin 3x = 1 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ 3x = 2\pi n + \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k \\ x = \dfrac{2\pi}{3}n + \dfrac{\pi}{6} \end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k; \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

6) $\cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x.$

$\cos 5x + \cos 7x = \sin 7x + \sin 5x;$

$$2\cos\frac{5x+7x}{2}\cdot\cos\frac{5x-7x}{2} - 2\sin\frac{7x+5x}{2}\cdot\cos\frac{7x-5x}{2} = 0;$$

$2\cos x\cdot(\cos 6x - \sin 6x) = 0.$

Учитывая, что $\cos 6x = \sin 6x \Rightarrow \operatorname{tg} 6x = 1$,

имеем совокупность: $\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \operatorname{tg} 6x = 1\end{array}\right.;$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ 6x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi}{6} n \end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi}{6} n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

7) $\sin x - \cos x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}.$

$$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}; \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + (-1)^k\dfrac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$

8) $2\sin x\cdot\sin 8x = \cos 7x.$

$\cos(x - 8x) - \cos(x + 8x) = \cos 7x;$

$$\cos 9x = 0; \quad 9x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{9} k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi}{9} k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

9) $\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sqrt{3}\sin x.$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\sin 3x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x;$$

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right);$$

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0;$$

$$2\sin\frac{3x - \frac{\pi}{6} + x - \frac{\pi}{3}}{2}\cdot\sin\frac{3x - \frac{\pi}{6} - x + \frac{\pi}{3}}{2} = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0\\ \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k\\ x = -\frac{\pi}{12} + \pi n\end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k; -\frac{\pi}{12} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

10) $\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 8x = \frac{1}{4}\sin 12x.$

$$\frac{1}{2}\cos 2x\cdot\sin 2x\cdot\cos 8x = \frac{1}{4}\sin 12x;$$

$$\sin 4x\cdot\cos 8x = \sin 12x;$$

$$\frac{1}{2}(\sin 12x - \sin 4x) = \sin 12x; \quad \sin 4x + \sin 12x = 0;$$

$$2\sin 8x\cdot\cos 4x = 0; \quad \left[\begin{array}{l}8x = \pi k\\ 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{8}k\\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n\end{array}\right.; \quad x = \frac{\pi}{8}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{8}k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

11) $\sin^3 x \cdot (1+\operatorname{ctg} x) + \cos^3 x \cdot (1+\operatorname{tg} x) = 2\sqrt{\sin x \cdot \cos x}$.

$D(У):\ x \neq \dfrac{\pi}{2}k.$

$\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^2 x \cdot \cos x + \cos^2 x \cdot \sin x = 2\sqrt{\sin x \cdot \cos x}$;

$\mathrm{L} = (\sin x + \cos x)\times$

$\times \left(\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x\right) =$

$= (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x),$

тогда $\sin x + \cos x = 2\sqrt{\sin x \cdot \cos x}$.

Положим $\sin x + \cos x = t$; $\quad t \geqslant 0$;

$1 + 2\sin x \cdot \cos x = t^2$, тогда $\sin x \cdot \cos x = \dfrac{-1+t^2}{2}$,

и уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} t \geqslant 0 \\ t^2 = 2(-1+t^2) \end{cases}; \qquad \begin{cases} t \geqslant 0 \\ t^2 = 2 \end{cases}; \qquad t = \sqrt{2}.$$

Итак, $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$; $\quad \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$;

$\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$; $\quad x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

12) $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.

$$2\sin\frac{x+2x}{2} \cdot \sin\frac{2x-x}{2} - 2\sin\frac{3x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2} = 0;$$

$$2\sin\frac{3x}{2} \cdot \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0;$$

$$2\sin\frac{3x}{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0;$$

$$2\sin\frac{3x}{2} \cdot 2\sin\frac{\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{3x}{2}}{2} \cdot \sin\frac{\frac{3x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{3x}{2}=0 \\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0 \\ \sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3}\pi k \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi t \end{array}\right. \quad | \, k,n,t\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{2}{3}\pi k; \dfrac{\pi}{4}+\pi n; -\dfrac{\pi}{2}+2\pi t \,|\, k,n,t\in\mathbb{Z}\right\}$.

2. Докажите тождество

$$1+2\cos 2\alpha+2\cos 4\alpha+2\cos 6\alpha=\frac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha}.$$

$$\mathrm{L}=(1+2\cos 2\alpha+2\cos 4\alpha+2\cos 6\alpha)\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\right)=$$

$$=\frac{\sin\alpha+2\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha+2\cos 4\alpha\cdot\sin\alpha+2\cos 6\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\alpha-\sin\alpha+\sin 3\alpha-\sin 3\alpha+\sin 5\alpha-\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha}; \quad \sin\alpha\neq 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L}=\dfrac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha} \\ \Pi=\dfrac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha} \end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L}=\Pi.$$

3. Вычислите $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-4\sin 70^\circ=$

$$=\frac{1-4\sin 70^\circ\cdot\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{1-2(\cos 60^\circ-\cos 80^\circ)}{\sin 10^\circ}=$$

$$=\frac{1-2\cdot\frac{1}{2}+2\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{2\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}=\boxed{2}.$$

4. Постройте график: $y(x) = \sin x \cdot \sqrt{\sin^2 x} - \cos x \cdot \sqrt{\cos^2 x}$.

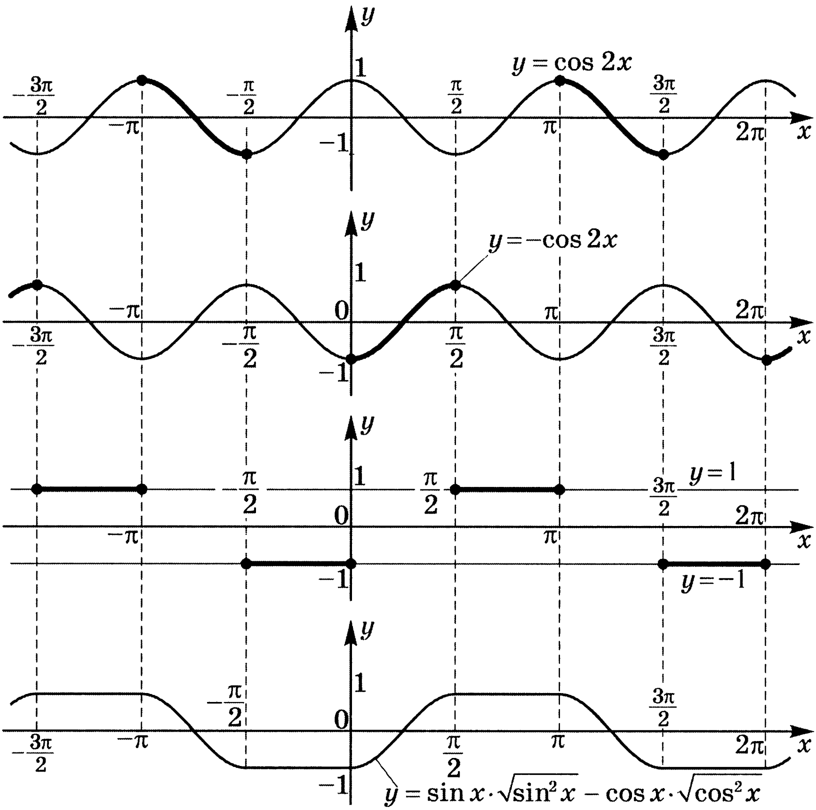
$y(x) = \sin x \cdot |\sin x| - \cos x \cdot |\cos x|$;

а) $x \in$ I четверти: $y = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$;

б) $x \in$ II четверти: $y = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

в) $x \in$ III четверти: $y = -\sin^2 x + \cos^2 x = \cos 2x$;

г) $x \in$ IV четверти: $y = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$.



Решение карточки 16

1. Решите уравнения:

1) $2\sin^2 2x + 7\sin 2x - 4 = 0.$

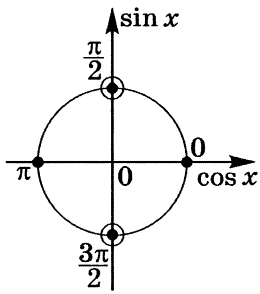
$$(\sin 2x)_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{4} = \frac{-7 \pm 9}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = -4 \notin [-1; 1] \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.; \quad \sin 2x = \frac{1}{2};$$

$$2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k \,|\, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{(-1)^k \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2} k \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

2) $\dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0.$



$$\left\{\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x \neq -1 \end{array}\right.; \quad \left\{\begin{array}{l} 2x = \pi k \\ 2x \neq \pi + 2\pi n \end{array}\right.;$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} k \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right.; \quad x = \pi t \,|\, t \in \mathbb{Z};$$

Ответ: $\{\pi t \,|\, t \in \mathbb{Z}\}.$

3) $\cos \dfrac{x}{3} = \cos 2x.$

$$\cos \frac{x}{3} - \cos 2x = 0; \quad 2\sin \frac{\frac{x}{3} + 2x}{2} \cdot \sin \frac{2x - \frac{x}{3}}{2} = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin \dfrac{7x}{6} = 0 \\ \sin \dfrac{5x}{6} = 0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{6\pi}{7} k \\ x = \dfrac{6\pi}{5} t \end{array}\right. \,|\, k, t \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{6\pi}{7} k; \dfrac{6\pi}{5} t \,|\, k, t \in \mathbb{Z}\right\}.$

4) $\sin(3x-450°)=\sin(6x-540°)$ при $0°<x<45°$.

$$2\sin\frac{6x-540°-3x+450°}{2}\cdot\cos\frac{3x-450°+6x-540°}{2}=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\dfrac{3x}{2}-45°\right)=0\\ \cos\left(\dfrac{9x}{2}-135°\right)=0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\dfrac{3x}{2}-45°=180°k\\ \dfrac{9x}{2}-135°=90°+180°n\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=30°+120°k\\ x=50°+40°n\end{array}\right. \mid k,n\in\mathbb{Z}.$$

По условию $\left[\begin{array}{l}0<30°+120°k<45°\\ 0<50°+40°n<45°\end{array}\right.$.

Неравенства выполняются при $n=-1$ или $k=0$:

$$\left[\begin{array}{l}x=30°\in(0°;45°)\\ x=10°\in(0°;45°)\end{array}\right..$$

Ответ: $\{10°;30°\}$.

5) $\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}=1$ при $170°<x<280°$.

$$\left\{\begin{array}{l}\cos 3x=\sin 2x\\ \sin 2x\neq 0\end{array}\right.;\quad \left\{\begin{array}{l}\cos 3x-\cos(2x-90°)=0\\ 2x\neq\pi k\end{array}\right.;$$

$$\left\{\begin{array}{l}2\sin\dfrac{3x+2x-90°}{2}\cdot\sin\dfrac{3x-2x+90°}{2}=0\\ x\neq 90°k\end{array}\right.;$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\sin\left(\dfrac{5x}{2}-45°\right)=0\\ \sin\left(\dfrac{x}{2}+45°\right)=0\end{array}\right.\\ x\neq 90°k\end{array}\right.;\quad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=18°+72°n\\ x=-90°+360°t\end{array}\right. \mid k,n,t\in\mathbb{Z}.\\ x\neq 90°k\end{array}\right.$$

По условию $\left[\begin{array}{l}170°<18°+72°n<280°\\ 170°<-90°+360°k<280°\end{array}\right.$.

Подходят значения $k=1$ (но тогда $x=270°\notin$ ОДЗ!) и $n=3$ — в этом случае $x=234°$.

Ответ: $x=234°$.

6) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$

$$2\sin\frac{x+3x}{2}\cdot\cos x + 2\sin 3x\cdot\cos x = 0;$$

$$2\cos x\cdot(\sin 2x + \sin 3x) = 0;$$

$$2\cos x\cdot 2\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin\dfrac{5x}{2} = 0\\ \cos\dfrac{x}{2} = 0\end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k\\ x = \dfrac{2\pi}{5}n\\ x = \pi + 2\pi t\end{array}\right. \quad |\, k, n, t \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \dfrac{2\pi}{5}n; \pi + 2\pi t \,|\, k, n, t \in \mathbb{Z}\right\}$.

7) $\sin 2x + \cos 2x = -1.$

$$\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1;$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k;$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k \,|\, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{8} + (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}k \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

8) $2\sin 2x\cdot\cos x = \sin 3x.$

$\sin 3x + \sin x = \sin 3x; \qquad \sin x = 0; \qquad x = \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\{\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$.

9) $\sin 4x + \cos 4x = \sqrt{2}\sin x.$

$$\sqrt{2}\sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin x;$$

$$\sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x = 0;$$

$$2\sin\frac{4x + \frac{\pi}{4} - x}{2} \cdot \cos\frac{4x + \frac{\pi}{4} + x}{2} = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \cos\left(\dfrac{5x}{2} + \dfrac{\pi}{8}\right) = 0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi}{3}k \\ x = -\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\pi}{5}n \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi}{3}k \\ x = \dfrac{3\pi}{20} + \dfrac{2\pi}{5}n \end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi}{3}k; \dfrac{3\pi}{20} + \dfrac{2\pi}{5}n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

10) $4\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 6x.$

$$2\cos 2x \cdot \cos 4x + 2\cos^2 2x = \cos 6x;$$

$$\cos 6x + \cos 2x + 2\cos^2 2x = \cos 6x;$$

$$2\cos 2x \cdot \left(\cos 2x + \frac{1}{2}\right) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ 2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n \end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k; \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

11) $\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) + 1 = 0.$

Положим $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$;

тогда $1 + \sin 2x = t^2$; $\quad \sin 2x = t^2 - 1.$

$t^2 - 1 + 5t + 1 = 0$; $\quad t(t+5) = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -5 \notin [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \end{array}\right.$;

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; $\quad x + \frac{\pi}{4} = \pi k$;

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

12) $\cos 2x + \cos x = \sin 3x.$

$$2\cos\frac{3x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{3x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2} = 0;$$

$$2\cos\frac{3x}{2} \cdot \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right) = 0;$$

$$2\cos\frac{3x}{2} \cdot \left(\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{3x}{2}\right) = 0;$$

$$2\cos\frac{3x}{2} \cdot 2\sin\frac{\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}}{2} \cdot \cos\frac{\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{3x}{2}}{2} = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\frac{3x}{2} = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi t \end{array}\right. \,|\, k, n, t \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k; \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi t \,|\, k, n, t \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Докажите тождество

$$1 - 2\cos 4\alpha + 2\cos 8\alpha - 2\cos 12\alpha = -\frac{\cos 14\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

$$\mathrm{L} = 1 - 2\cos 4\alpha + 2\cos 8\alpha - 2\cos 12\alpha =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha - 2\cos 4\alpha\cdot\cos 2\alpha + 2\cos 2\alpha\cdot\cos 8\alpha - 2\cos 12\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha - (\cos 6\alpha + \cos 2\alpha) + \cos 10\alpha + \cos 6\alpha - (\cos 14\alpha + \cos 10\alpha)}{\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha - \cos 6\alpha - \cos 2\alpha + \cos 10\alpha + \cos 6\alpha - \cos 14\alpha - \cos 10\alpha}{\cos 2\alpha} =$$

$$= -\frac{\cos 14\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L} = -\dfrac{\cos 14\alpha}{\cos 2\alpha} \\ \Pi = -\dfrac{\cos 14\alpha}{\cos 2\alpha} \end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

3. Вычислите $\operatorname{tg} 20^\circ + 4\sin 20^\circ =$

$$= \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + 4\sin 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ + 4\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2\sin\frac{20^\circ+40^\circ}{2}\cdot\cos\frac{40^\circ-20^\circ}{2} + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} =$$

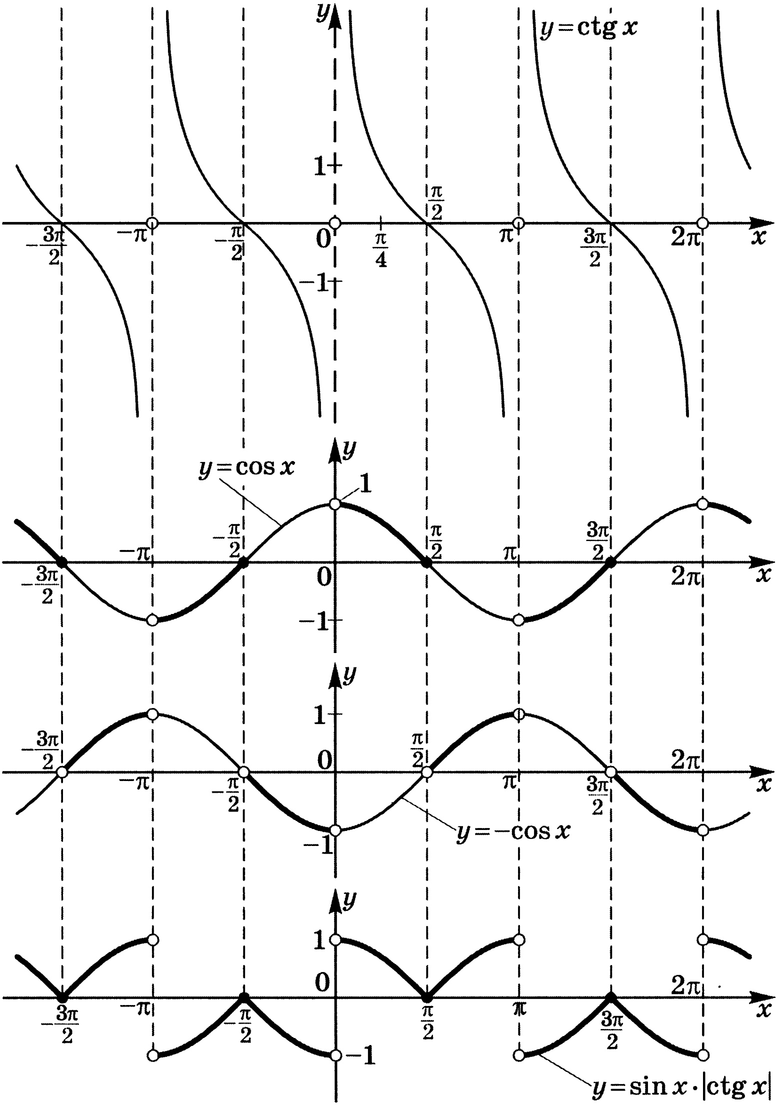
$$= \frac{2\sin 30^\circ\cdot\cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2\sin\frac{80^\circ+40^\circ}{2}\cdot\cos\frac{80^\circ-40^\circ}{2}}{\cos 20^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin 60^\circ\cdot\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

4. Постройте график $y(x) = \sin x \cdot |\operatorname{ctg} x|$.

$$y = \begin{cases} \cos x, & \operatorname{ctg} x \geqslant 0,\ \sin x \neq 0 \\ -\cos x, & \operatorname{ctg} x < 0,\ \sin x \neq 0 \end{cases}.$$



8

Зачетные карточки

Карточка 1

1. Разложите на множители:

1) $\cos\dfrac{3\alpha}{8} - \cos\dfrac{7\alpha}{24}$;

2) $\sin 2\alpha \cdot \cos 3\alpha - \sin 6\alpha \cdot \cos 3\alpha$;

3) $\sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 6\alpha$.

2. Докажите тождества:

1) $\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha - \cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha = -\cos 4\alpha \cdot \sin\alpha$;

2) $\dfrac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha - \cos^2\alpha}{2(\cos\alpha - 1)} = \cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

3. Вычислите:

1) $\sin^2 16° + \cos 46° \cdot \cos 14° + 1$;

2) $\dfrac{1 - 2\cos^2 13°}{\sin 64°}$;

3) $(\operatorname{ctg} 27° - \operatorname{ctg} 54°)\sin 54° + 1{,}5$;

4) $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{7}\right)}$;

5) $$\frac{\sin\frac{2\pi}{11}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{7}\right)}{10\sin\left(\frac{\pi}{11}+\frac{2\pi}{7}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{11}+\frac{2\pi}{7}\right)};$$

6) $$\frac{1-\sin^2 38^\circ}{2\left(\sin 14^\circ+\sin^2 38^\circ\right)};$$

7) $$\frac{\cos 31^\circ+\cos 89^\circ+1}{-\cos^2 14^\circ 30'};$$

8) $$\frac{-3+2\sin^2 78^\circ+2\sin^2 18^\circ}{5\sin^2 42^\circ};$$

9) $$\frac{\sin 44^\circ+\cos 74^\circ}{2\cos 14^\circ+2\sin 104^\circ};$$

10) $$\frac{\sin 36^\circ+\sin 40^\circ+\cos 62^\circ+\cos 42^\circ}{4\cos 6^\circ\cdot\cos 4^\circ\cdot\sin 38^\circ};$$

11) $$\frac{\cos 37^\circ-8\cos 143^\circ+2\sin 127^\circ}{\sin 42^\circ\cdot\sin 79^\circ+\sin 48^\circ\cdot\sin 11^\circ}.$$

Карточка 2

1. Разложите на множители:

1) $\cos\dfrac{5\alpha}{6}+\cos\dfrac{4\alpha}{15}$;

2) $\sin 2\alpha\cdot\cos 4\alpha+\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha+\dfrac{1}{2}\sin 8\alpha$;

3) $1-\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$.

2. Докажите тождества:

1) $\sin 4\alpha\cdot\cos 2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\sin 6\alpha$;

2) $\dfrac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

3. Вычислите:

1) $\sin 67^\circ\cdot\sin 7^\circ-\sin^2 37^\circ-2$;

2) $\dfrac{1-2\sin^2 46^\circ}{8\cos 92^\circ}$;

3) $\dfrac{\operatorname{ctg} 31^\circ-\operatorname{tg} 31^\circ}{\operatorname{tg} 31^\circ+\operatorname{ctg} 31^\circ}\cdot\dfrac{3}{\cos 62^\circ}$;

4) $\dfrac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}\right)^2}{\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{5}}$;

5) $\dfrac{\cos\frac{2\pi}{13}-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{13}\right)}{\sin\frac{\pi}{26}\cdot\sin\frac{3\pi}{26}}$;

6) $\dfrac{1+\cos 62^\circ-\cos^2 31^\circ}{\cos^2 31^\circ}-1$;

7) $\dfrac{2\cos^2 42^\circ+\cos 36^\circ}{\cos^2 168^\circ}$;

8) $\dfrac{2\cos^2 46^\circ + 2\cos^2 106^\circ - 3}{\sin^2 76^\circ}$;

9) $\dfrac{\sin 91^\circ - \sin 1^\circ}{9\sqrt{2}\cos 46^\circ + \sqrt{2}\sin 44^\circ}$;

10) $\dfrac{\sin 8^\circ - \sin 10^\circ - \sin 12^\circ + \sin 14^\circ}{4\sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \sin 11^\circ}$;

11) $\dfrac{5\sin 211^\circ + 8\cos 59^\circ - 5\sin 31^\circ}{\sin 54^\circ \cdot \sin 67^\circ - \sin 36^\circ \cdot \sin 23^\circ}$.

Карточка 3

1. Разложите на множители:

1) $\sin 2\alpha - \sin(3\alpha + \pi)$;

2) $\sin 2\alpha - 2\sin 4\alpha \cdot \cos\alpha + \sin 6\alpha$;

3) $\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha - \cos 6\alpha$.

2. Докажите тождества:

1) $(\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha + \cos 3\alpha) = 2\sin\alpha$;

2) $\dfrac{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

3. Вычислите:

1) $\cos^2 41^\circ + \cos 79^\circ \cdot \cos 19^\circ - 1$;

2) $\dfrac{\sqrt{2}(\cos 80^\circ + \sin 80^\circ)}{\sin 125^\circ}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 31^\circ - \sin^2 31^\circ}{4\operatorname{tg}^2 31^\circ \cdot \sin^2 31^\circ}$;

4) $\dfrac{\sin^4 \frac{\pi}{9} - \cos^4 \frac{\pi}{9}}{2\cos\frac{2\pi}{9}}$;

5) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{3}}{4\cos\frac{2\pi}{9} \cdot \sin\frac{\pi}{9}}$;

6) $\dfrac{\operatorname{tg} 34^\circ(1 - \operatorname{tg}^2 17^\circ)}{4\operatorname{tg} 17^\circ}$;

7) $\dfrac{\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - 2\sin 65^\circ}{\cos 25^\circ}$;

8) $\cos^2 23^\circ - \cos^2 7^\circ + \sin^2 53^\circ - 3$;

9) $\dfrac{2\sqrt{2}\cos 7^\circ + \sqrt{2}\sin 83^\circ}{\cos 52^\circ + \cos 38^\circ}$;

10) $\dfrac{\cos 4^\circ - \cos 6^\circ - \cos 8^\circ + \cos 10^\circ}{\sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \cos 7^\circ}$;

11) $\dfrac{3\cos 215^\circ - 4\cos 35^\circ - 2\sin 125^\circ}{\cos 17^\circ \cdot \cos 18^\circ - \cos 73^\circ \cdot \cos 72^\circ}$.

Карточка 4

1. Упростите $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Разложите на множители:

1) $\cos 4\alpha+2\cos\alpha\cdot\cos 6\alpha+\cos 8\alpha$;

2) $2\sin 3\alpha-\cos 2\alpha+\cos 4\alpha$.

3. Докажите тождества:

1) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$;

2) $1+\dfrac{\cos 4\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-2\alpha\right)}=\sin 4\alpha$.

4. Вычислите:

1) $\cos^2 84^\circ+\cos 51^\circ\cdot\cos 39^\circ+3$;

2) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}{\cos 150^\circ}\cdot 2\cos^2 75^\circ$;

3) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 34^\circ-\cos^2 34^\circ}{2\operatorname{ctg}^2 34^\circ\cdot\cos^2 34^\circ}$;

4) $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{11}+\sin\frac{\pi}{11}\right)^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{11}\right)}$;

5) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{24}}$;

6) $\dfrac{1+\sin 18^\circ-\cos^2 36^\circ}{2\cos^2 36^\circ}+\dfrac{1}{4}$;

7) $\dfrac{\cos 68^\circ-2\cos^2 4^\circ}{2\cos^2 26^\circ}$;

8) $\cos^2 19^\circ + \sin^2 11^\circ + \cos^2 41^\circ + 2$;

9) $\dfrac{8\sin 194^\circ + \cos 256^\circ}{\sin 14^\circ}$;

10) $\dfrac{2\sqrt{2}\sin 22^\circ + 5\sqrt{2}\cos 68^\circ}{\cos 23^\circ - \cos 67^\circ}$;

11) $\dfrac{\cos 5^\circ + \cos 85^\circ + \sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{4\sqrt{2}\cos 5^\circ \cdot \sin 55^\circ}$;

12) $\dfrac{7\cos 29^\circ - 2\cos 151^\circ + 4\sin 61^\circ}{\cos 67^\circ \cdot \cos 38^\circ + \cos 23^\circ \cdot \cos 52^\circ}$.

Карточка 5

Вычислите:

1) $\dfrac{\cos^2\alpha+2}{3\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$;

2) $\cos\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$, если $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $\cos x$, если $\cos(x-45^\circ)+\cos(x+45^\circ)=\sqrt{2}$;

4) $1+\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=-0{,}6$;

5) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$;

6) $\cos(2\alpha-\pi)$, если $\sin\alpha=\sqrt{0{,}2}$;

7) $2\sin 5\alpha\cdot\cos 7\alpha-\sin 12\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=0{,}3$;

8) $\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha=0{,}7$;

9) $\dfrac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha+4\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}$;

10) $2\sqrt{3}\,(\sin\alpha-\sin\beta)$, если $\begin{cases}\alpha+\beta=2\pi\\ \alpha-\beta=\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$;

11) $5\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}$ и $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$;

12) $\cos x$, если $\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}=0{,}5$;

13) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Карточка 6

Вычислите:

1) $\dfrac{\sin^2\alpha - 3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^4\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$;

2) $\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\operatorname{ctg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{ctg}x = 2$;

3) $\cos x$, если $\sin(120^\circ - x)+\sin(120^\circ + x) = -\sqrt{3}$;

4) $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}5$;

5) $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = -1$;

6) $\sin(\pi + 2\alpha)$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}7$;

7) $2\sin 6\alpha\cdot\sin 4\alpha + \cos 10\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}3$;

8) $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}3$;

9) $\dfrac{\sin\alpha - 4\cos\alpha}{2\sin\alpha + \cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2$;

10) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$, если $\alpha+\beta = \dfrac{3\pi}{2}$ и $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{3}$;

11) $4\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{4}$ и $\alpha+\beta = -\dfrac{\pi}{6}$;

12) $\sqrt{19}\operatorname{tg}x$, если $\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2} = \sqrt{0{,}1}$;

13) $\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Карточка 7

Вычислите:

1) $\dfrac{\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha}{5\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 3}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -3$;

2) $\operatorname{ctg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2}$;

3) $\operatorname{ctg} x$, если $\cos(x - 45^\circ) - \cos(x + 45^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\cos 2\alpha$, если $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0{,}25$;

5) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = -3$;

6) $\cos(2\alpha - \pi)$, если $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{0{,}3}$;

7) $2\cos 3\alpha\cdot\cos 5\alpha - \cos 8\alpha$, если $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}8$;

8) $\sin^2\left(\dfrac{3}{4}\pi + \dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}3$;

9) $\cos\left(\dfrac{4}{3}\pi + 2\alpha\right) =$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

10 $\dfrac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$, если $\begin{cases} \alpha - \beta = \dfrac{\pi}{2} \\ \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$;

11) $\cos(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{5}$ и $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{3}$;

12) $\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}$, если $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

13) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Карточка 8

Вычислите:

1) $\dfrac{3\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\sin^2\alpha}{9+5\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=-3$;

2) $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}x=-\dfrac{1}{2}$;

3) $\operatorname{ctg}x$, если $\cos(x-45^\circ)+\cos(x+45^\circ)=\sqrt{2}\sin x$;

4) $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{4}{3}$;

5) $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$;

6) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\alpha\right)$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}5$;

7) $2\cos 5\alpha\cdot\cos 7\alpha-\cos 12\alpha$, если $\cos\alpha=0{,}2$;

8) $\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha=0{,}1$;

9) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\dfrac{11\pi}{6}-2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=3\sqrt{3}$;

10) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}$, если $\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}$ и $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$;

11) $0{,}2\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha\cdot\cos\beta=-\dfrac{1}{4}$ и $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$;

12) $\sin x$, если $\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}=\sqrt{0{,}44}$;

13) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Карточка 9

1. Вычислите:

1) $4(\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ)$;

2) $\operatorname{ctg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 3^\circ \cdot \operatorname{ctg} 5^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{ctg} 89^\circ$;

3) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$, если $\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}5$;

4) $\dfrac{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}$, если $\alpha = 7^\circ$;

5) $\left(\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{-1} \cdot \operatorname{arctg} 1$;

6) $\cos(2 \operatorname{arctg} 2) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3)$.

2. Найдите наименьшее значение функции $f(\alpha) = |\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha|$.

3. Решите уравнения:

1) $\cos^2(\pi x) + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \sin(\pi x) = 2$, если $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$;

2) $\cos(\pi x) + \sin \dfrac{5\pi x}{2} = -2$, если $2 \leqslant x \leqslant 6$;

3) $\operatorname{tg}^2 \pi x + \operatorname{ctg}^2 \pi x = 2$, если $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$.

Карточка 10

1. Вычислите:

1) $\sin 160° \cdot \cos 110° + \sin 250° \cdot \cos 340° + \operatorname{tg} 110° \cdot \operatorname{tg} 340°$;

2) $\dfrac{1-\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \cos^{-4}\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$;

4) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$, если $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 5$;

5) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{15}{17}\right)$;

6) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{5} - 2\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

2. Найдите наибольшее значение функции
$f(\alpha) = \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$.

3. Решите уравнения:

1) $2\cos(\pi x) + 3\sin(\pi x) = 5$, если $1 \leqslant x \leqslant 2$;

2) $\sin^4(\pi x) + \cos^4(\pi x) = \sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x)$, если $0 \leqslant x \leqslant 2$;

3) $x^2 + 6x \cdot \sin\dfrac{\pi x}{2} + 9 = 0$.

Карточка 11

1. Вычислите:

1) $\cos\dfrac{7\pi}{12}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg} 7^\circ \cdot \sin 14^\circ - 1}{\cos 14^\circ}$;

3) $\cos 47^\circ - \cos 13^\circ + \cos 73^\circ$;

4) $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$;

5) $162(\sin^4 x + \cos^4 x)$, если $\sin x - \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$;

6) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$;

7) $\arccos\left(-0{,}5 \cdot \sqrt{3}\right) : \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{3}\right)$;

8) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{5} - 3\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

2. Найдите область изменения функции
$f(\beta) = 2\sin^2\beta + 3\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\beta$.

3. Решите уравнение
$\cos(\pi x) - 2\cos\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right) = 2$, если $-6 \leqslant x \leqslant -2$.

Карточка 12

1. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12}$;

2) $\cos\dfrac{6\pi}{5}\cdot\cos\dfrac{3\pi}{5}$;

3) $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - 4\sin 70^\circ$;

4) $\cos 0 + \cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{2\pi}{7} + \ldots + \cos\dfrac{6\pi}{7}$;

5) $\cos(2\operatorname{arctg} 7) - \sin(4\operatorname{arctg} 3)$;

6) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\dfrac{5}{\sqrt{26}} - \arcsin\dfrac{12}{13}\right)$.

2. Найдите наименьшее значение функции $f(\alpha) = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

3. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg}(\pi x) - \operatorname{ctg}(\pi x) = \sin^{-1}(\pi x) - \cos^{-1}(\pi x)$, если $-1 \leqslant x \leqslant 1{,}5$;

2) $\cos(\pi x)\cdot\cos(2\pi x)\cdot\sin(3\pi x) = \dfrac{1}{4}\sin(2\pi x)$, если $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$;

3) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = \cos\sqrt{1-x}$.

Карточка 13

1. Вычислите:

1) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 1 - \sqrt{2}$;

2) $4\cos 20^\circ - \sqrt{3}\operatorname{ctg} 20^\circ$.

2. Решите уравнения:

1) $1 + 2\cos\dfrac{\pi x}{15} = 0$;

2) $2\cos(x + 60^\circ)\cdot\cos 3x = \cos(x + 60^\circ)$;

3) $\dfrac{\sin x}{\cos 60^\circ} = \operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} x$;

4) $\cos 4x = \sin 2x$, если $0 < x < 80^\circ$;

5) $\dfrac{\sin 4x}{\cos 5x} = -1$, если $80^\circ < x < 180^\circ$;

6) $\sin(30^\circ - x)\cdot\cos(60^\circ + x) = 1$;

7) $(1 + \cos 2x)\cdot\sin x = \cos^2 x$;

8) $9\operatorname{ctg}^2 x + 4\sin^2 x = 6$;

9) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{5}{8}$;

10) $\sqrt{3}\sin^2 x + 5\cos^2 x - \left(5\sqrt{3} + 1\right)\sin x\cdot\cos x = 0$;

11) $1 - \cos\dfrac{x}{2} = \operatorname{tg}\dfrac{x}{4}$.

3. Решите неравенство $\sqrt{10 - 18\cos x} \geqslant 6\cos x - 2$.

4. Постройте график $y(x) = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\,\dfrac{\cos^2(-x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\sin(\pi - x)}$.

Карточка 14

1. Докажите тождества:

1) $$\frac{(1-\operatorname{tg}\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right);$$

2) $$\frac{1}{\cos x\cdot\cos 2x}+\frac{1}{\cos 2x\cdot\cos 3x}+\ldots+\frac{1}{\cos 9x\cdot\cos 10x}=$$
$$=\frac{2\sin 9x}{\sin 2x\cdot\cos 10x}.$$

2. Решите уравнения:

1) $3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0$;

2) $\dfrac{\sin(x-45^\circ)}{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}=0$;

3) $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}4x$;

4) $\cos(x+360^\circ)=\cos(2x-270^\circ)$, если $270^\circ<x<360^\circ$;

5) $\sin 3x-\sin 7x=\sqrt{3}\sin 2x$;

6) $\sin x\cdot\cos 5x=\sin 9x\cdot\cos 3x$;

7) $\sin\dfrac{x}{6}+\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{6}+1=0$;

8) $2\cos x\cdot\cos 4x=\cos 3x$;

9) $2\cos 4x=\sqrt{2}(\cos x-\sin x)$;

10) $\cos x\cdot\cos 2x=\dfrac{1}{8\sin x}$;

11) $\cos x+\sin x=\sqrt{1-2\cos^2 x}$;

12) $\cos 2x-\cos 3x=\sin 5x$.

3. Решите неравенство $\sin 5x+\sin x\leqslant 0$.

Карточка 15

1. Вычислите:

1) $\cos(2\alpha - \beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$ при $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

2) $\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{5}$.

2. Докажите тождества:

1) $\dfrac{\sin\alpha + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha}$;

2) $8\operatorname{ctg}24\alpha + 4\operatorname{tg}12\alpha + 2\operatorname{tg}6\alpha + \operatorname{tg}3\alpha = \operatorname{ctg}3\alpha$.

3. Решите уравнения:

1) $\operatorname{ctg}\frac{x}{4} = \operatorname{ctg}5x$;

2) $\sin 6x = \cos 4x$ при $0 < x < 90°$;

3) $\sin(x - 45°) = \cos(3x - 180°)$ при $0 < x < 180°$;

4) $\cos 3x - \cos 7x = \sin 5x$;

5) $\cos(20° + x) + \cos(100° - x) = \frac{1}{2}$;

6) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$;

7) $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$;

8) $\cos 3x + \cos 2x = \sin 5x$.

4. Решите неравенства:

1) $\sqrt{25 - 16\operatorname{ctg}x} \geqslant 8\operatorname{ctg}x - 5$;

2) $\cos x + \cos 5x \leqslant 0$.

5. Постройте график

$$y(x) = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sin(\pi + x)}{\operatorname{ctg}(\pi - x)}.$$

Карточка 16

1. Найдите $2\alpha+\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha=-2$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{7}$ при $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

2. Вычислите $\operatorname{ctg}70^\circ+4\cos70^\circ$.

3. Докажите:

1) $\dfrac{(1+\operatorname{tg}2\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}2\alpha}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\right)$;

2) $4\sin^3\alpha\cdot\cos3\alpha+4\cos^3\alpha\cdot\sin3\alpha=2{,}4$, если $\cos4\alpha=\frac{3}{5}$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

4. Решите уравнения:

1) $\cos(170^\circ+x)-\cos(50^\circ+x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, если $-180^\circ<x<90^\circ$;

2) $\sin x\cdot\sin3x+\sin4x\cdot\sin8x=0$;

3) $\sqrt{3}\sin2x+\cos2x=\sqrt{3}$;

4) $\sin7x+\cos^2 2x=\sin^2 2x+\sin x$;

5) $3+2\sin2x=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$;

6) $\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos4x\cdot\cos8x=\dfrac{1}{16}$;

7) $\sin^6 x+\cos^6 x=\dfrac{15}{16}+\cos2x$ при $0{,}5\pi\leqslant x\leqslant1{,}5\pi$;

8) $\arcsin(\cos(2\operatorname{arcctg}x))=0$.

5. Решите неравенства:

1) $\arcsin x<\arccos x$;

2) $\arcsin\dfrac{2x^2-9x+8}{2}<\dfrac{\pi}{6}$.

6. Постройте график $y(x)=\dfrac{\cos x+\cos3x}{\sqrt{1+\cos2x}}$.

Решение карточки 1

1. Разложите на множители:

1) $\cos\dfrac{3\alpha}{8}-\cos\dfrac{7\alpha}{24}=-2\sin\dfrac{\alpha}{24}\cdot\sin\dfrac{\alpha}{3}.$ **7.2**

2) $\sin 2\alpha\cdot\cos 3\alpha-\sin 6\alpha\cdot\cos 3\alpha=$

$=-\cos 3\alpha\cdot(\sin 6\alpha-\sin 2\alpha)=$ **7.4**

$=-2\cos 3\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos 4\alpha.$

3) $\sin 2\alpha-\sin 4\alpha+\sin 6\alpha=$ **7.3**

$$=2\sin 4\alpha\cdot\cos 2\alpha-\sin 4\alpha=2\sin 4\alpha\cdot\left(\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=2\sin 4\alpha\cdot\left(\cos 2\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\right)=$$ **7.2**

$$=-4\sin 4\alpha\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

2. Докажите тождества:

1) $\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha-\cos 2\alpha\cdot\sin 3\alpha=-\cos 4\alpha\cdot\sin\alpha.$

$\mathrm{L}=\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha-\cos 2\alpha\cdot\sin 3\alpha=$

$=0{,}5(\sin 3\alpha+\sin\alpha)-0{,}5(\sin 5\alpha+\sin\alpha)=$ **7.9**

$=0{,}5\sin 3\alpha-0{,}5\sin 5\alpha+0{,}5\sin\alpha-0{,}5\sin\alpha=$

$=0{,}5(\sin 3\alpha-\sin 5\alpha)=-\cos 4\alpha\cdot\sin\alpha.$ **7.4**

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=-\cos 4\alpha\cdot\sin\alpha\\ \Pi=-\cos 4\alpha\cdot\sin\alpha\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi.$$

2) $\dfrac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha-\cos^2\alpha}{2(\cos\alpha-1)}=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}.$

$$\mathrm{L}=\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha-\cos^2\alpha}{2(\cos\alpha-1)}=$$

$$=\frac{\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)-\cos^2\alpha}{2(\cos\alpha-1)}=$$

5.8 $$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{2(\cos\alpha-1)}=-\frac{\sin^2\alpha}{-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\\ \Pi=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi.$$

3. Вычислите:

7.7 1) $\sin^2 16^\circ+\cos 46^\circ\cdot\cos 14^\circ+1=$

5.8 $=\sin^2 16^\circ+0{,}5(\cos 32^\circ+\cos 60^\circ)+1=$

$=0{,}5(1-\cos 32^\circ)+0{,}5\cos 32^\circ+\dfrac{1}{4}+1=$

$=0{,}5+1{,}25-0{,}5\cos 32^\circ+0{,}5\cos 32^\circ=\boxed{1{,}75}.$

5.2 2) $\dfrac{1-2\cos^2 13^\circ}{\sin 64^\circ}=$

3.6 $=-\dfrac{\cos 26^\circ}{\sin(90^\circ-26^\circ)}=-\dfrac{\cos 26^\circ}{\cos 26^\circ}=\boxed{-1}.$

5.10 3) $(\operatorname{ctg}27^\circ-\operatorname{ctg}54^\circ)\sin 54^\circ+1{,}5=$

$=\left(\dfrac{1+\cos 54^\circ}{\sin 54^\circ}-\dfrac{\cos 54^\circ}{\sin 54^\circ}\right)\sin 54^\circ+1{,}5=$

$=\left(\dfrac{1+\cos 54^\circ-\cos 54^\circ}{\sin 54^\circ}\right)\sin 54^\circ+1{,}5=$

$=\dfrac{1}{\sin 54^\circ}\cdot\sin 54^\circ+1{,}5=1+1{,}5=\boxed{2{,}5}.$

7.11 4) $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{7}\right)}=\dfrac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{7}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{7}\right)}=\boxed{2}.$

5) $$\frac{\sin\frac{2\pi}{11}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{7}\right)}{10\sin\left(\frac{\pi}{11}+\frac{2\pi}{7}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{11}+\frac{2\pi}{7}\right)}=$$ 3.5 3.6

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{11}+\sin\frac{4\pi}{7}}{10\sin\left(\frac{\pi}{11}+\frac{2\pi}{7}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{11}-\frac{2\pi}{7}\right)}=$$ 7.9

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{11}+\sin\frac{4\pi}{7}}{5\left(\sin\frac{2\pi}{11}+\sin\frac{4\pi}{7}\right)}=\boxed{\frac{1}{5}}.$$

6) $$\frac{1-\sin^2 38^\circ}{2\left(\sin 14^\circ+\sin^2 38^\circ\right)}=$$ 5.8

$$=\frac{\cos^2 38^\circ}{2\left(\sin(90^\circ-76^\circ)+0{,}5(1-\cos 76^\circ)\right)}=$$ 3.6

$$=\frac{\cos^2 38^\circ}{2(\cos 76^\circ+0{,}5-0{,}5\cos 76^\circ)}=$$

$$=\frac{\cos^2 38^\circ}{2(0{,}5+0{,}5\cos 76^\circ)}=\frac{\cos^2 38^\circ}{2\cos^2 38^\circ}=\boxed{0{,}5}.$$ 5.7

7) $$\frac{\cos 31^\circ+\cos 89^\circ+1}{-\cos^2 14^\circ 30'}=$$ 7.1 5.7

$$=\frac{2\cos 60^\circ\cdot\cos 29^\circ+1}{-0{,}5(1+\cos 29^\circ)}=\frac{\cos 29^\circ+1}{-0{,}5(1+\cos 29^\circ)}=\boxed{-2}.$$

8) $$\frac{-3+2\sin^2 78^\circ+2\sin^2 18^\circ}{5\sin^2 42^\circ}=$$ 5.8

$$=\frac{-3+1-\cos 156^\circ+1-\cos 36^\circ}{5\cdot 0{,}5(1-\cos 84^\circ)}=$$

$$=\frac{-1-(\cos 156^\circ+\cos 36^\circ)}{2{,}5(1-\cos 84^\circ)}=$$ 7.1

$$=-\frac{1+2\cos 60^\circ\cdot\cos 96^\circ}{2{,}5\left(1-\cos(90^\circ-6^\circ)\right)}=-\frac{1+\cos(90^\circ+6^\circ)}{2{,}5(1-\sin 6^\circ)}=$$ 3.5 3.6

$$=-\frac{1-\sin 6^\circ}{2{,}5(1-\sin 6^\circ)}=\boxed{-0{,}4}.$$

9) $$\frac{\sin 44^\circ + \cos 74^\circ}{2\cos 14^\circ + 2\sin 104^\circ} =$$

3.6
3.3

$$= \frac{\sin(90^\circ - 46^\circ) + \cos 74^\circ}{2\cos 14^\circ + 2\sin(90^\circ + 14^\circ)} =$$

7.1

$$= \frac{\cos 46^\circ + \cos 74^\circ}{2\cos 14^\circ + 2\cos 14^\circ} = \frac{2\cos 60^\circ \cdot \cos 14^\circ}{4\cos 14^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 14^\circ}{4\cos 14^\circ} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

10) $$\frac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \cos 62^\circ + \cos 42^\circ}{4\cos 6^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 38^\circ} =$$

3.5

$$= \frac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \cos(90^\circ - 28^\circ) + \cos(90^\circ - 48^\circ)}{4\cos 6^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 38^\circ} =$$

7.3

$$= \frac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \sin 28^\circ + \sin 48^\circ}{4\cos 6^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 38^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin 38^\circ \cdot \cos 2^\circ + 2\sin 38^\circ \cdot \cos 10^\circ}{4\cos 6^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 38^\circ} =$$

7.1

$$= \frac{2\sin 38^\circ \cdot (\cos 2^\circ + \cos 10^\circ)}{4\cos 6^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 38^\circ} = \frac{2\cos 6^\circ \cdot \cos 4^\circ}{2\cos 6^\circ \cdot \cos 4^\circ} = \boxed{1}.$$

7.8

11) $$\frac{\cos 37^\circ - 8\cos 143^\circ + 2\sin 127^\circ}{\sin 42^\circ \cdot \sin 79^\circ + \sin 48^\circ \cdot \sin 11^\circ} =$$

3.17
3.3

$$= \frac{\cos 37^\circ - 8\cos(180^\circ - 37^\circ) + 2\sin(90^\circ + 37^\circ)}{0{,}5(\cos 37^\circ - \cos 121^\circ) + 0{,}5(\cos 37^\circ - \cos 59^\circ)} =$$

$$= \frac{\cos 37^\circ + 8\cos 37^\circ + 2\cos 37^\circ}{0{,}5\cos 37^\circ - 0{,}5\cos 121^\circ + 0{,}5\cos 37^\circ - 0{,}5\cos 59^\circ} =$$

3.17

$$= \frac{11\cos 37^\circ}{0{,}5\,(2\cos 37^\circ - \cos(180^\circ - 59^\circ) - \cos 59^\circ)} =$$

$$= \frac{11\cos 37^\circ}{0{,}5(2\cos 37^\circ + \cos 59^\circ - \cos 59^\circ)} = \frac{11\cos 37^\circ}{\cos 37^\circ} = \boxed{11}.$$

Решение карточки 2

1. Разложите на множители:

1) $\cos\frac{5\alpha}{6}+\cos\frac{4\alpha}{15}=2\cos\frac{11\alpha}{20}\cdot\cos\frac{17\alpha}{60}$. 7.1

2) $\sin 2\alpha\cdot\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\sin 8\alpha=$ 7.8

$=\frac{1}{2}(\sin 6\alpha-\sin 2\alpha)+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\sin 8\alpha=$

$=\frac{1}{2}\sin 6\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\sin 8\alpha=$

$=\frac{1}{2}(\sin 6\alpha+\sin 8\alpha)=\sin 7\alpha\cdot\cos\alpha.$ 7.3

3) $1-\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=$ 5.1 5.2

$=1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1=$

$=2\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=$

$=2\cos\alpha\cdot(\cos\alpha-\sin\alpha)=$ 7.11

$=2\cos\alpha\cdot\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha).$

2. Докажите тождества:

1) $\sin 4\alpha\cdot\cos 2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 6\alpha.$

$\mathrm{L}=\sin 4\alpha\cdot\cos 2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha=$ 7.9 5.1

$=\frac{1}{2}(\sin 6\alpha+\sin 2\alpha)-\frac{1}{2}\sin 2\alpha=$

$=\frac{1}{2}\sin 6\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\frac{1}{2}\sin 6\alpha.$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=\frac{1}{2}\sin 6\alpha\\ \Pi=\frac{1}{2}\sin 6\alpha\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi.$$

2) $\dfrac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

5.1
5.2

$$\text{L}=\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}{1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}-1+2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\\ \Pi=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\end{array}\right|\Rightarrow \text{L}=\Pi.$$

3. Вычислите:

7.8

1) $\sin 67^\circ\cdot\sin 7^\circ-\sin^2 37^\circ-2=$

$$=0{,}5(\cos 60^\circ-\cos 74^\circ)-\sin^2 37^\circ-2=$$
$$=0{,}25-0{,}5\cos 74^\circ-0{,}5(1-\cos 74^\circ)-2=$$
$$=0{,}25-0{,}5\cos 74^\circ-0{,}5+0{,}5\cos 74^\circ-2=$$
$$=-0{,}25-2=\boxed{-2{,}25}.$$

5.2

2) $\dfrac{1-2\sin^2 46^\circ}{8\cos 92^\circ}=\dfrac{\cos 92^\circ}{8\cos 92^\circ}=\boxed{\dfrac{1}{8}}$.

3) $\dfrac{\operatorname{ctg}31^\circ-\operatorname{tg}31^\circ}{\operatorname{tg}31^\circ+\operatorname{ctg}31^\circ}\cdot\dfrac{3}{\cos 62^\circ}=$

$$=\frac{\frac{\cos 31^\circ}{\sin 31^\circ}-\frac{\sin 31^\circ}{\cos 31^\circ}}{\frac{\sin 31^\circ}{\cos 31^\circ}+\frac{\cos 31^\circ}{\sin 31^\circ}}\cdot\frac{3}{\cos 62^\circ}=\frac{\frac{\cos^2 31^\circ-\sin^2 31^\circ}{\sin 31^\circ\cdot\cos 31^\circ}}{\frac{\sin^2 31^\circ+\cos^2 31^\circ}{\sin 31^\circ\cdot\cos 31^\circ}}\cdot\frac{3}{\cos 62^\circ}=$$

5.2

$$=\frac{\cos^2 31^\circ-\sin^2 31^\circ}{\sin^2 31^\circ+\cos^2 31^\circ}\cdot\frac{3}{\cos 62^\circ}=\cos 62^\circ\cdot\frac{3}{\cos 62^\circ}=\boxed{3}.$$

$$4)\ \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}\right)^2}{\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{5}}=\frac{\left(\frac{\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}}-\frac{\cos\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}\right)^2}{\left(\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\sin^2\frac{\pi}{10}-\cos^2\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{\pi}{10}}\right)^2}{\left(\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\right)^2}=\left(-\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{0{,}5\sin\frac{\pi}{5}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}\right)^2=\boxed{4}.$$ 5.1 5.2

$$5)\ \frac{\cos\frac{2\pi}{13}-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{13}\right)}{\sin\frac{\pi}{26}\cdot\sin\frac{3\pi}{26}}=$$ 3.6

$$=\frac{\cos\frac{2\pi}{13}-\cos\frac{\pi}{13}}{\sin\frac{\pi}{26}\cdot\sin\frac{3\pi}{26}}=-\frac{2\sin\frac{3\pi}{26}\cdot\sin\frac{\pi}{26}}{\sin\frac{\pi}{26}\cdot\sin\frac{3\pi}{26}}=\boxed{-2}.$$ 7.2

$$6)\ \frac{1+\cos 62^\circ-\cos^2 31^\circ}{\cos^2 31^\circ}-1=$$ 5.2

$$=\frac{1+2\cos^2 31^\circ-1-\cos^2 31^\circ}{\cos^2 31^\circ}-1=\frac{\cos^2 31^\circ}{\cos^2 31^\circ}-1=\boxed{0}.$$

$$7)\ \frac{2\cos^2 42^\circ+\cos 36^\circ}{\cos^2 168^\circ}=$$ 5.7

$$=\frac{1+\cos 84^\circ+\cos 36^\circ}{\cos^2 168^\circ}=\frac{1+2\cos 60^\circ\cdot\cos 24^\circ}{\cos^2(180^\circ-12^\circ)}=$$ 7.1 3.17

$$=\frac{1+\cos 24^\circ}{\cos^2 12^\circ}=\frac{1+\cos 24^\circ}{0{,}5(1+\cos 24^\circ)}=\boxed{2}.$$ 5.7

$$8)\ \frac{2\cos^2 46^\circ+2\cos^2 106^\circ-3}{\sin^2 76^\circ}=$$ 5.7

$$=\frac{1+\cos 92^\circ+1+\cos 212^\circ-3}{\sin^2 76^\circ}=$$ 5.8 7.1

$$=\frac{-1+2\cos 152^\circ\cdot\cos 60^\circ}{0{,}5(1-\cos 152^\circ)}=2\frac{\cos 152^\circ-1}{1-\cos 152^\circ}=\boxed{-2}.$$

7.4 9) $$\frac{\sin 91^\circ - \sin 1^\circ}{9\sqrt{2}\cos 46^\circ + \sqrt{2}\sin 44^\circ} =$$

3.6 $$= \frac{2\sin 45^\circ \cdot \cos 46^\circ}{9\sqrt{2}\cos 46^\circ + \sqrt{2}\sin(90^\circ - 46^\circ)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cos 46^\circ}{9\sqrt{2}\cos 46^\circ + \sqrt{2}\cos 46^\circ} = \frac{\cos 46^\circ}{10\cos 46^\circ} = \boxed{\frac{1}{10}}.$$

7.3 10) $$\frac{\sin 8^\circ - \sin 10^\circ - \sin 12^\circ + \sin 14^\circ}{4\sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \sin 11^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin 11^\circ \cdot \cos 3^\circ - 2\sin 11^\circ \cdot \cos 1^\circ}{4\sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \sin 11^\circ} =$$

7.2 $$= \frac{2\sin 11^\circ(\cos 3^\circ - \cos 1^\circ)}{4\sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \sin 11^\circ} =$$

$$= -\frac{2\sin 2^\circ \cdot \sin 1^\circ}{2\sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ} = -\frac{2\sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ}{\sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ} = \boxed{-2}.$$

11) $$\frac{5\sin 211^\circ + 8\cos 59^\circ - 5\sin 31^\circ}{\sin 54^\circ \cdot \sin 67^\circ - \sin 36^\circ \cdot \sin 23^\circ} =$$

3.30
3.6 $$= \frac{5\sin(270^\circ - 59^\circ) + 8\cos 59^\circ - 5\sin(90^\circ - 59^\circ)}{\sin(90^\circ - 36^\circ) \cdot \sin(90^\circ - 23^\circ) - \sin 36^\circ \cdot \sin 23^\circ} =$$

4.3 $$= \frac{-5\cos 59^\circ + 8\cos 59^\circ - 5\cos 59^\circ}{\cos 36^\circ \cdot \cos 23^\circ - \sin 36^\circ \cdot \sin 23^\circ} = -\frac{2\cos 59^\circ}{\cos 59^\circ} = \boxed{-2}.$$

Решение карточки 3

1. Разложите на множители:

1) $\sin 2\alpha - \sin(3\alpha + \pi) =$ 3.15

$$= \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 2\sin\frac{5\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$ 7.3

2) $\sin 2\alpha - 2\sin 4\alpha\cdot\cos\alpha + \sin 6\alpha =$ 7.3

$$= 2\sin 4\alpha\cdot\cos 2\alpha - 2\sin 4\alpha\cdot\cos\alpha =$$

$$= 2\sin 4\alpha(\cos 2\alpha - \cos\alpha) = -4\sin 4\alpha\cdot\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$ 7.2

3) $\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha - \cos 6\alpha = 2\sin 4\alpha\cdot\sin 2\alpha + 2\sin 2\alpha =$ 7.2

$$= 2\sin 2\alpha(1 + \sin 4\alpha) = 2\sin 2\alpha\cdot\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin 4\alpha\right) =$$ 7.3

$$= 4\sin 2\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right).$$

2. Докажите тождества:

1) $(\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha + \cos 3\alpha) = 2\sin\alpha.$

$\mathrm{L} = (\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha + \cos 3\alpha) =$ 7.6 7.1

$$= \frac{\sin(2\alpha - \alpha)}{\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha}\cdot 2\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha = 2\sin\alpha.$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{L} &= 2\sin\alpha\\ \Pi &= 2\sin\alpha\end{aligned}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

2) $\dfrac{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$

$$\mathrm{L} = \frac{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha} =$$ 5.7 7.1

$$= \frac{2\cos^2\alpha + 2\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{2\cos\alpha\cdot(\cos\alpha + \cos 2\alpha)}{2\sin\alpha\cdot(\cos\alpha + \cos 2\alpha)} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{L} &= \operatorname{ctg}\alpha\\ \Pi &= \operatorname{ctg}\alpha\end{aligned}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

3. Вычислите:

7.7 1) $\cos^2 41^\circ + \cos 79^\circ \cdot \cos 19^\circ - 1 =$

5.7 $= \cos^2 41^\circ + 0{,}5(\cos 60^\circ + \cos 98^\circ) - 1 =$

$= 0{,}5(1 + \cos 82^\circ) + 0{,}25 + 0{,}5\cos 98^\circ - 1 =$

3.1 3.5 $= 0{,}5\cos(90^\circ - 8^\circ) + 0{,}5\cos(90^\circ + 8^\circ) - 0{,}25 =$

$= 0{,}5(\sin 8^\circ - \sin 8^\circ) - 0{,}25 = \boxed{-0{,}25}$.

2) $\dfrac{\sqrt{2}(\cos 80^\circ + \sin 80^\circ)}{\sin 125^\circ} =$

3.6 $= \sqrt{2} \cdot \dfrac{\cos 80^\circ + \sin(90^\circ - 10^\circ)}{\sin 125^\circ} =$

7.1 $= \sqrt{2} \cdot \dfrac{\cos 80^\circ + \cos 10^\circ}{\sin 125^\circ} =$

3.3 $= 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{\cos 45^\circ \cdot \cos 35^\circ}{\sin(90^\circ + 35^\circ)} = \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}\cos 35^\circ}{\cos 35^\circ} = \boxed{2}$.

3) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 31^\circ - \sin^2 31^\circ}{4\operatorname{tg}^2 31^\circ \cdot \sin^2 31^\circ} =$

$$= \frac{\frac{\sin^2 31^\circ}{\cos^2 31^\circ} - \sin^2 31^\circ}{4 \cdot \frac{\sin^4 31^\circ}{\cos^2 31^\circ}} = \frac{\sin^2 31^\circ - \sin^2 31^\circ \cdot \cos^2 31^\circ}{4\sin^4 31^\circ} =$$

$$= \frac{\sin^2 31^\circ \cdot \left(1 - \cos^2 31^\circ\right)}{4\sin^4 31^\circ} = \frac{\sin^2 31^\circ}{4\sin^2 31^\circ} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

4) $\dfrac{\sin^4 \frac{\pi}{9} - \cos^4 \frac{\pi}{9}}{2\cos \frac{2\pi}{9}} =$

$$= \frac{\left(\sin^2 \frac{\pi}{9} + \cos^2 \frac{\pi}{9}\right)\left(\sin^2 \frac{\pi}{9} - \cos^2 \frac{\pi}{9}\right)}{2\cos \frac{2\pi}{9}} =$$

5.2 $$= \frac{\sin^2 \frac{\pi}{9} - \cos^2 \frac{\pi}{9}}{2\cos \frac{2\pi}{9}} = -\frac{\cos \frac{2\pi}{9}}{2\cos \frac{2\pi}{9}} = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

5) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{3}}{4\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\sin\frac{\pi}{9}}=-2\cdot\dfrac{\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\sin\frac{\pi}{9}}{4\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\sin\frac{\pi}{9}}=\boxed{-\dfrac{1}{2}}.$ 7.4

6) $\dfrac{\operatorname{tg}34^\circ(1-\operatorname{tg}^2 17^\circ)}{4\operatorname{tg}17^\circ}=\dfrac{2\operatorname{tg}17^\circ\left(1-\operatorname{tg}^2 17^\circ\right)}{(1-\operatorname{tg}^2 17^\circ)\,4\operatorname{tg}17^\circ}=\boxed{\dfrac{1}{2}}.$ 5.5

7) $\dfrac{\cos 85^\circ+\cos 35^\circ-2\sin 65^\circ}{\cos 25^\circ}=$ 7.1

$=\dfrac{2\cos 60^\circ\cdot\cos 25^\circ-2\sin(90^\circ-25^\circ)}{\cos 25^\circ}=$ 3.6

$=\dfrac{2\cos 25^\circ\cdot(\cos 60^\circ-1)}{\cos 25^\circ}=\boxed{-1}.$

8) $\cos^2 23^\circ-\cos^2 7^\circ+\sin^2 53^\circ-3=$ 5.7 5.8

$=0{,}5(1+\cos 46^\circ)-0{,}5(1+\cos 14^\circ)+0{,}5(1-\cos 106^\circ)-3=$

$=0{,}5(\cos 46^\circ-\cos 14^\circ)-0{,}5\cos(90^\circ+16^\circ)+0{,}5-3=$ 7.2 3.1

$=-\sin 30^\circ\cdot\sin 16^\circ+0{,}5\sin 16^\circ-2{,}5=$

$=-0{,}5\sin 16^\circ+0{,}5\sin 16^\circ-2{,}5=\boxed{-2{,}5}.$

9) $\dfrac{2\sqrt{2}\cos 7^\circ+\sqrt{2}\sin 83^\circ}{\cos 52^\circ+\cos 38^\circ}=$ 7.1

$=\dfrac{2\sqrt{2}\cos 7^\circ+\sqrt{2}\sin(90^\circ-7^\circ)}{2\cos 45^\circ\cdot\cos 7^\circ}=\dfrac{2\cos 7^\circ+\cos 7^\circ}{\cos 7^\circ}=\boxed{3}.$ 3.6

10) $\dfrac{\cos 4^\circ-\cos 6^\circ-\cos 8^\circ+\cos 10^\circ}{\sin^2 1^\circ\cdot\cos 1^\circ\cdot\cos 7^\circ}=$ 7.1

$=\dfrac{2\cos 7^\circ\cdot\cos 3^\circ-2\cos 7^\circ\cdot\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ\cdot\cos 1^\circ\cdot\cos 7^\circ}=$

$=\dfrac{2\cos 7^\circ(\cos 3^\circ-\cos 1^\circ)}{\sin^2 1^\circ\cdot\cos 1^\circ\cdot\cos 7^\circ}=$ 7.2

$=\dfrac{2\cdot(-2)\sin 2^\circ\cdot\sin 1^\circ}{\sin^2 1^\circ\cdot\cos 1^\circ}=$

$=-\dfrac{4\cdot 2\sin 1^\circ\cdot\cos 1^\circ\cdot\sin 1^\circ}{\sin^2 1^\circ\cdot\cos 1^\circ}=\boxed{-8}.$ 5.1

7.7 11) $$\frac{3\cos 215^\circ - 4\cos 35^\circ - 2\sin 125^\circ}{\cos 17^\circ \cdot \cos 18^\circ - \cos 73^\circ \cdot \cos 72^\circ} =$$

3.13 3.3 $$= \frac{3\cos(180^\circ + 35^\circ) - 4\cos 35^\circ - 2\sin(90^\circ + 35^\circ)}{0{,}5(\cos 35^\circ + \cos 1^\circ) - 0{,}5(\cos 145^\circ + \cos 1^\circ)} =$$

$$= \frac{-3\cos 35^\circ - 4\cos 35^\circ - 2\cos 35^\circ}{0{,}5\cos 35^\circ + 0{,}5\cos 1^\circ - 0{,}5\cos 145^\circ - 0{,}5\cos 1^\circ} =$$

3.17 $$= \frac{-9\cos 35^\circ}{0{,}5\cos 35^\circ - 0{,}5\cos(180^\circ - 35^\circ)} =$$

$$= \frac{-9\cos 35^\circ}{0{,}5(\cos 35^\circ + \cos 35^\circ)} = \boxed{-9}.$$

Примечание. Можно проще, если учесть, что

$$\left|\begin{array}{l}\cos 73^\circ = \sin 17^\circ \\ \cos 72^\circ = \sin 18^\circ\end{array}\right., \text{ тогда}$$

3.5 $$\cos 17^\circ \cdot \cos 18^\circ - \cos 73^\circ \cdot \cos 72^\circ =$$

$$= \cos 17^\circ \cdot \cos 18^\circ - \sin 17^\circ \cdot \sin 18^\circ =$$

$$= \cos(17^\circ + 18^\circ) = \cos 35^\circ.$$

Решение карточки 4

1. Упростите $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$ 5.9

$$=\frac{1-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{1-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}+\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=$$ 3.5 3.6 3.1 3.3

$$=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}+\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{1+\sin 2\alpha+1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2}{\cos 2\alpha}.$$

2. Разложите на множители:

1) $\cos 4\alpha+2\cos\alpha\cdot\cos 6\alpha+\cos 8\alpha=$ 7.1

$$=2\cos\alpha\cdot\cos 6\alpha+2\cos 6\alpha\cdot\cos 2\alpha=$$

$$=2\cos 6\alpha\cdot(\cos\alpha+\cos 2\alpha)=4\cos 6\alpha\cdot\cos\frac{3\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

2) $2\sin 3\alpha-\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=$ 7.2

$$=2\sin 3\alpha-2\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha=2\sin 3\alpha(1-\sin\alpha)=$$

$$=2\sin 3\alpha\cdot\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\alpha\right)=$$ 7.4

$$=4\sin 3\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

3. Докажите тождества:

1) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}.$

$$\mathrm{L}=\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$$ 5.1

5.7
5.8

$$= \frac{2\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{L} = \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} \\ \Pi = \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi.$$

2) $1 + \dfrac{\cos 4\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right)} = \sin 4\alpha.$

5.9
3.30
3.29

$$\text{L} = 1 + \frac{\cos 4\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right)} = 1 + \frac{\cos 4\alpha}{\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-4\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-4\alpha\right)}} =$$

$$= 1 + \frac{\cos 4\alpha}{\frac{-\cos 4\alpha}{1-\sin 4\alpha}} = 1 - \frac{\cos 4\alpha(1-\sin 4\alpha)}{\cos 4\alpha} =$$

$$= 1 - 1 + \sin 4\alpha = \sin 4\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{L} = \sin 4\alpha \\ \Pi = \sin 4\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi.$$

4. Вычислите:

5.7
7.7

1) $\cos^2 84^\circ + \cos 51^\circ \cdot \cos 39^\circ + 3 =$

$$= 0{,}5(1 + \cos 168^\circ) + 0{,}5(\cos 90^\circ + \cos 12^\circ) + 3 =$$

3.17

$$= 0{,}5 + 0{,}5\cos(180^\circ - 12^\circ) + 0{,}5\cos 12^\circ + 3 =$$

$$= 3{,}5 - 0{,}5\cos 12^\circ + 0{,}5\cos 12^\circ = \boxed{3{,}5}.$$

2) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}{\cos 150^\circ} \cdot 2\cos^2 75^\circ =$

$$= \frac{\left(1 - \frac{\sin^2 75^\circ}{\cos^2 75^\circ}\right) \cdot 2\cos^2 75^\circ}{\cos 150^\circ} =$$

5.2

$$= \frac{2\cos^2 75^\circ - 2\sin^2 75^\circ}{\cos 150^\circ} = \frac{2\cos 150^\circ}{\cos 150^\circ} = \boxed{2}.$$

3) $$\frac{\operatorname{ctg}^2 34^\circ - \cos^2 34^\circ}{2\operatorname{ctg}^2 34^\circ \cdot \cos^2 34^\circ} = \frac{\frac{\cos^2 34^\circ - \cos^2 34^\circ \cdot \sin^2 34^\circ}{\sin^2 34^\circ}}{2\frac{\cos^4 34^\circ}{\sin^2 34^\circ}} =$$

$$= \frac{\cos^2 34^\circ(1-\sin^2 34^\circ)}{\sin^2 34^\circ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 34^\circ}{\cos^4 34^\circ} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\sin^2 34^\circ}{\cos^2 34^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2 34^\circ}{\cos^2 34^\circ} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

4) $$\frac{\left(\cos\frac{\pi}{11} + \sin\frac{\pi}{11}\right)^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{11}\right)} = \frac{\cos^2\frac{\pi}{11} + \sin^2\frac{\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11} \cdot \cos\frac{\pi}{11}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{11}\right)} =$$ 5.7 5.1

$$= \frac{1+\sin\frac{2\pi}{11}}{0{,}5\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{11}\right)\right)} = 2\frac{1+\sin\frac{2\pi}{11}}{1+\sin\frac{2\pi}{11}} = \boxed{2}.$$ 3.5

5) $$\frac{\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{24}} = \frac{2\cos\frac{3\pi}{24} \cdot \cos\frac{\pi}{24}}{\cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{24}} = \boxed{2}.$$ 7.1

6) $$\frac{1+\sin 18^\circ - \cos^2 36^\circ}{2\cos^2 36^\circ} + \frac{1}{4} =$$ 5.7

$$= \frac{1+\sin(90^\circ - 72^\circ) - 0{,}5(1+\cos 72^\circ)}{1+\cos 72^\circ} + \frac{1}{4} =$$ 3.6

$$= \frac{1+\cos 72^\circ - 0{,}5 - 0{,}5\cos 72^\circ}{1+\cos 72^\circ} + \frac{1}{4} =$$

$$= 0{,}5 \cdot \frac{1+\cos 72^\circ}{1+\cos 72^\circ} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

7) $$\frac{\cos 68^\circ - 2\cos^2 4^\circ}{2\cos^2 26^\circ} =$$ 5.7

$$= \frac{\cos 68^\circ - 1 - \cos 8^\circ}{2\cos^2 26^\circ} = \frac{-2\sin 38^\circ \cdot \sin 30^\circ - 1}{1+\cos 52^\circ} =$$ 7.2

$$= -\frac{\sin(90^\circ - 52^\circ) + 1}{1+\cos 52^\circ} = -\frac{\cos 52^\circ + 1}{1+\cos 52^\circ} = \boxed{-1}.$$ 3.6

5.7

8) $\cos^2 19^\circ + \sin^2 11^\circ + \cos^2 41^\circ + 2 =$

5.8 7.2

$= 0{,}5(1 + \cos 38^\circ + 1 - \cos 22^\circ + 1 + \cos 82^\circ) + 2 =$

3.5

$= 0{,}5\,(3 - 2\sin 30^\circ \cdot \sin 8^\circ + \cos(90^\circ - 8^\circ)) + 2 =$

$= 3{,}5 + 0{,}5(\sin 8^\circ - \sin 8^\circ) = \boxed{3{,}5}$.

3.15 3.29

9) $$\frac{8\sin 194^\circ + \cos 256^\circ}{\sin 14^\circ} = \frac{8\sin(180^\circ + 14^\circ) + \cos(270^\circ - 14^\circ)}{\sin 14^\circ} =$$

$$= \frac{-8\sin 14^\circ - \sin 14^\circ}{\sin 14^\circ} = \boxed{-9}.$$

7.2

10) $$\frac{2\sqrt{2}\sin 22^\circ + 5\sqrt{2}\cos 68^\circ}{\cos 23^\circ - \cos 67^\circ} =$$

3.5

$$= \frac{\sqrt{2}\,(2\sin 22^\circ + 5\cos(90^\circ - 22^\circ))}{2\sin 45^\circ \cdot \sin 22^\circ} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(2\sin 22^\circ + 5\sin 22^\circ)}{\sqrt{2}\sin 22^\circ} = \frac{7\sin 22^\circ}{\sin 22^\circ} = \boxed{7}.$$

7.1 7.3 7.9

11) $$\frac{\cos 5^\circ + \cos 85^\circ + \sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{4\sqrt{2}\cos 5^\circ \cdot \sin 55^\circ} =$$

$$= \frac{2\cos 45^\circ \cdot \cos 40^\circ + 2\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ}{4\sqrt{2}\,(0{,}5(\sin 60^\circ + \sin 50^\circ))} =$$

3.5

$$= \frac{\sqrt{2}\cos 40^\circ + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{2}\left(\sin 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\cos(90^\circ - 50^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\left(\sin 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sin 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\left(\sin 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

7.7

12) $$\frac{7\cos 29^\circ - 2\cos 151^\circ + 4\sin 61^\circ}{\cos 67^\circ \cdot \cos 38^\circ + \cos 23^\circ \cdot \cos 52^\circ} =$$

3.17 3.6

$$= \frac{7\cos 29^\circ - 2\cos(180^\circ - 29^\circ) + 4\sin(90^\circ - 29^\circ)}{0{,}5(\cos 29^\circ + \cos 105^\circ) + 0{,}5(\cos 29^\circ + \cos 75^\circ)} =$$

7.1

$$= \frac{7\cos 29^\circ + 2\cos 29^\circ + 4\cos 29^\circ}{0{,}5(\cos 29^\circ + \cos 105^\circ + \cos 29^\circ + \cos 75^\circ)} =$$

$$= \frac{13\cos 29^\circ}{0{,}5(2\cos 29^\circ + 2\cos 90^\circ \cdot \cos 15^\circ)} = \frac{13\cos 29^\circ}{\cos 29^\circ} = \boxed{13}.$$

Решение карточки 5

Вычислите:

1) $\dfrac{\cos^2\alpha + 2}{3\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

$$\frac{\cos^2\alpha + 2}{3\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha\left(1 + \frac{2}{\cos^2\alpha}\right)}{\cos^2\alpha(3\operatorname{tg}\alpha + 1)} =$$ 1.5

$$= \frac{1 + 2(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}{3\operatorname{tg}\alpha + 1} = \frac{3 + 2\operatorname{tg}^2\alpha}{3\operatorname{tg}\alpha + 1} = \frac{3 + 18}{9 + 1} = \boxed{2{,}1}.$$

2) $\cos\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$, если $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) =$$ 7.2

$$= 2\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\sin x = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{1}.$$

3) $\cos x$, если $\cos(x - 45^\circ) + \cos(x + 45^\circ) = \sqrt{2}$.

$\cos(x - 45^\circ) + \cos(x + 45^\circ) = \sqrt{2}$;

$2\cos x\cdot\cos 45^\circ = \sqrt{2}$;

$\sqrt{2}\cos x = \sqrt{2}$; $\quad \cos x = 1$.

4) $1 + \cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$.

$$1 + \cos 2\alpha = 1 + 1 - 2\sin^2\alpha = 2 - 2\cdot 0{,}36 = \boxed{1{,}28}.$$

5) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{3}$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = 3; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot 3}{1 - 9} = \boxed{-0{,}75}.$$

6) $\cos(2\alpha - \pi)$, если $\sin\alpha = \sqrt{0{,}2}$.

$$\cos(2\alpha - \pi) = \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha =$$

$$= -(1 - 2\sin^2\alpha) = -(1 - 2\cdot 0{,}2) = \boxed{-0{,}6}.$$

7) $2\sin 5\alpha \cdot \cos 7\alpha - \sin 12\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}3$.

$\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}3;$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0{,}09;$

$1 + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0{,}09; \quad \sin 2\alpha = -0{,}91;$

7.9 $2\sin 5\alpha\cdot\cos 7\alpha - \sin 12\alpha = \sin 12\alpha - \sin 2\alpha - \sin 12\alpha =$

$= -\sin 2\alpha = \boxed{0{,}91}.$

8) $\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}7$.

5.8 3.29 $\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right) =$

$= \dfrac{1}{2}(1 + \sin\alpha) = 0{,}5\cdot 1{,}7 = \boxed{0{,}85}.$

9) $\dfrac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\sin\alpha + 4\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$.

5.5 $\dfrac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\sin\alpha + 4\cos\alpha} = \dfrac{(\sin\alpha + 2\cos\alpha) : \cos\alpha}{(\sin\alpha + 4\cos\alpha) : \cos\alpha} =$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha + 2}{\operatorname{tg}\alpha + 4} = \frac{\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + 2}{\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + 4} = \frac{\frac{2\cdot 0{,}5}{1-0{,}25} + 2}{\frac{2\cdot 0{,}5}{1-0{,}25} + 4} =$$

$$= \frac{\frac{4}{3} + 2}{\frac{4}{3} + 4} = \frac{4+6}{4+12} = \frac{5}{8} = \boxed{0{,}625}.$$

10) $2\sqrt{3}\,(\sin\alpha - \sin\beta)$, если $\begin{cases} \alpha + \beta = 2\pi \\ \alpha - \beta = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}.$

7.4 $2\sqrt{3}\,(\sin\alpha - \sin\beta) = 2\sqrt{3}\cdot 2\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) =$

$= 4\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos\pi = 4\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-1) = \boxed{-6}.$

11) $5\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}$ и $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$.

4.4

$$5\cos(\alpha-\beta)=5(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)=$$
$$=5\left(\frac{1}{2}+\sin\alpha\cdot\sin\beta-\cos\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta\right)=$$
$$=5\left(\frac{1}{2}-(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta)+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=5\,(1-\cos(\alpha+\beta))=5\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)=5\left(1-\frac{1}{2}\right)=\boxed{2{,}5}.$$

12) $\cos x$, если $\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}=0{,}5$.

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0{,}5;$$
$$\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0{,}25;$$
$$1+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0{,}25;\quad 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=-0{,}75;\quad \sin x=-0{,}75;$$
$$\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x};\qquad \cos x=\pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\boxed{\pm\frac{\sqrt{7}}{4}}.$$

13) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{\frac{3}{2}};\qquad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{3}{2};$$
$$1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=1{,}5;\qquad \sin\alpha\cdot\cos\alpha=0{,}25;$$
$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=$$
$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)=$$
$$=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=$$
$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=$$
$$=1-3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1-3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=1-\frac{3}{16}=\boxed{\frac{13}{16}}.$$

Решение карточки 6

Вычислите:

1) $\dfrac{\sin^2\alpha - 3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^4\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

$$\frac{\sin^2\alpha - 3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^4\alpha} = \frac{\left(\sin^2\alpha - 3\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right) : \cos^2\alpha}{\cos^4\alpha : \cos^2\alpha} =$$

1.5 $$= \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha} = \left(\operatorname{tg}^2\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right) =$$

$$= (4-6)(1+4) = \boxed{-10}.$$

2) $\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{ctg}x = 2$.

7.5 7.8 $$\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x+\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}\right)\right]} =$$

$$= \frac{2\sin 2x}{\cos\frac{\pi}{2} - \cos 2x} = -2\operatorname{tg}2x = -2\cdot\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x} =$$

$$= -2\cdot\frac{2\cdot 0{,}5}{1-0{,}25} = \boxed{-2\frac{2}{3}}.$$

3) $\cos x$, если $\sin(120^\circ - x) + \sin(120^\circ + x) = -\sqrt{3}$.

7.3 $$\sin(120^\circ - x) + \sin(120^\circ + x) = -\sqrt{3};$$

$$2\sin 120^\circ\cdot\cos x = -\sqrt{3};\qquad \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{3};\qquad \cos x = \boxed{-1}.$$

4) $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}5$.

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot(-0{,}5)}{1+0{,}25} = -\frac{4}{5} = \boxed{-0{,}8}.$$

5) $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = -1$.

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = -1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -1; \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-1}{1+1} = \boxed{0}.$$ **5.4**

6) $\sin(\pi + 2\alpha)$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}7$.

$\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}7; \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0{,}49;$

$1 + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0{,}49; \quad 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -0{,}51;$

$\sin(\pi+2\alpha) = -\sin 2\alpha = -2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \boxed{0{,}51}.$ **5.1**

7) $2\sin 6\alpha\cdot\sin 4\alpha + \cos 10\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}3$.

$2\sin 6\alpha\cdot\sin 4\alpha + \cos 10\alpha = (\cos 2\alpha - \cos 10\alpha) + \cos 10\alpha =$ **7.8**

$= \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \boxed{-0{,}82}.$

8) $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}3$.

$$\cos^2\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)\right) =$$ **5.2**

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) =$$ **3.1**

$$= \frac{1}{2}(1 - \sin\alpha) = 0{,}5(1 + 0{,}3) = \boxed{0{,}65}.$$

9) $\dfrac{\sin\alpha - 4\cos\alpha}{2\sin\alpha + \cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2$;

$$\frac{\sin\alpha - 4\cos\alpha}{2\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{(\sin\alpha - 4\cos\alpha) : \cos\alpha}{(2\sin\alpha + \cos\alpha) : \cos\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha - 4}{2\operatorname{tg}\alpha + 1} = \frac{\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} - 4}{\frac{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + 1} = \frac{\frac{4}{1-4} - 4}{\frac{8}{1-4} + 1} = \frac{16}{5} = \boxed{3{,}2}.$$ **5.5**

10) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}$, если $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{2}$ и $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{3}$.

7.3 7.2 $$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=-\frac{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}}=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\boxed{-\sqrt{3}}.$$

11) $4\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{4}$ и $\alpha+\beta=-\dfrac{\pi}{6}$.

7.9 $$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]=\frac{1}{4};$$

$$\sin(\alpha-\beta)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2};$$

$\sin(\alpha-\beta)=1$, значит $4\sin(\alpha-\beta)=\boxed{4}$.

12) $\sqrt{19}\operatorname{tg}x$, если $\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}=\sqrt{0{,}1}$.

$$\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0{,}1;$$

5.1 $$1-2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0{,}1;$$

$$-\sin x=-0{,}9;\qquad \sin x=0{,}9;$$

$$\sqrt{19}\operatorname{tg}x=\sqrt{19}\frac{\sin x}{\cos x}=\pm\sqrt{19}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=$$

$$=\pm\sqrt{19}\frac{0{,}9}{\sqrt{1-0{,}81}}=\pm\sqrt{19}\frac{0{,}9}{\sqrt{0{,}19}}=\pm\sqrt{19}\cdot 0{,}9\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{19}{100}}}=$$

$$=\pm\sqrt{19}\cdot 0{,}9\cdot\sqrt{\frac{100}{19}}=\pm 10\cdot 0{,}9=\boxed{\pm 9}.$$

13) $\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$; $\quad 1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0{,}8$;

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-0{,}2$; $\quad \sin 2\alpha=-0{,}2$; **5.1**

$$\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^4\alpha-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)^2+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=$$ **5.2** **5.1**

$$=\frac{(\cos 2\alpha)^2+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{1-\sin^2 2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{1-(-0{,}2)^2+(-0{,}1)^2}{(-0{,}1)^2}=\frac{1-0{,}04+0{,}01}{0{,}01}=\frac{1-0{,}03}{0{,}01}=$$

$$=\frac{0{,}97}{0{,}01}=\boxed{97}.$$

Решение карточки 7

Вычислите:

1) $\dfrac{\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha}{5\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 3}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -3$.

1.5 $$\frac{\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha}{5\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 3} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1-2\operatorname{tg}^2\alpha}{5\operatorname{tg}\alpha + \frac{3}{\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{1-2\operatorname{tg}^2\alpha}{5\operatorname{tg}\alpha + 3 + 3\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1-4}{-5\cdot 2+3+3\cdot 4} = \boxed{-\frac{3}{5}}.$$

2) $\operatorname{ctg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) - \operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}x = \dfrac{1}{2}$.

4.5
4.6 $$\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} - \frac{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\pi 4}{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{1+\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x - 1} - \frac{1-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+1} =$$

$$= \frac{(\operatorname{tg}x+1)^2 - (\operatorname{tg}x-1)^2}{\operatorname{tg}^2x - 1} = \frac{4\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2x-1} =$$

$$= \frac{4\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-1} = \frac{2}{-\frac{3}{4}} = -\frac{8}{3} = \boxed{-2\frac{2}{3}}.$$

3) $\operatorname{ctg}x$, если $\cos(x-45^\circ) - \cos(x+45^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x$.

7.2 $$\cos(x-45^\circ) - \cos(x+45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x;$$

$$2\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x;\quad 2\sin x = \cos x;\quad \operatorname{ctg}x = \boxed{2}.$$

4) $\cos 2\alpha$, *если* $\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0{,}25$.

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=0{,}25;$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}=0{,}25\sqrt{2};\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{8};$$

$$1-\sin\alpha=\frac{1}{8};\quad \sin\alpha=\frac{7}{8};$$

$$\cos 2\alpha=1-1\sin^2\alpha=1-2\cdot\frac{49}{64}=\boxed{-\frac{17}{32}}.$$

5) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-3$.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cdot(-3)}{1-9}=\frac{-6}{-8}=\boxed{\frac{3}{4}}.$$

6) $\cos(2\alpha-\pi)$, если $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{0{,}3}$.

а) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha=-\sqrt{0{,}3};\quad \sin\alpha=-\sqrt{0{,}3};$

б) $\cos(2\alpha-\pi)=-\cos 2\alpha=-(1-2\sin^2\alpha)=2\cdot\left(\sqrt{0{,}3}\right)^2-1=$
$=0{,}6-1=\boxed{-0{,}4}.$

7) $2\cos 3\alpha\cdot\cos 5\alpha-\cos 8\alpha$, если $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=0{,}8$.

а) $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=0{,}8;\quad \sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\alpha=0{,}64;$
$\sin\alpha=-0{,}36=-\frac{9}{25}.$

б) $2\cos 3\alpha\cdot\cos 5\alpha-\cos 8\alpha=2\cos 3\alpha\cdot\cos 5\alpha-\cos(3\alpha+5\alpha)=$
$=2\cos 3\alpha\cdot\cos 5\alpha-\cos 2\alpha\cdot\cos 5\alpha+\sin 3\alpha\cdot\sin 5\alpha=$
$=\cos 3\alpha\cdot\cos 5\alpha+\sin 2\alpha\cdot\cos 5\alpha=\cos(5\alpha-3\alpha)=\cos 2\alpha=$
$=1-2\sin^2\alpha=1-2\cdot\left(\frac{9}{25}\right)^2=1-\frac{162}{625}=\frac{635-162}{625}=\boxed{\frac{463}{625}}.$

8) $\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}3$.

$$\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)\right) = \frac{1}{2}(1 - \sin\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + 0{,}3) = \frac{13}{20} = \boxed{0{,}65}.$$

9) $\cos\left(\frac{4}{3}\pi + 2\alpha\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\cos\left(\frac{4}{3}\pi + 2\alpha\right) = \cos\frac{4}{3}\pi \cdot \cos 2\alpha - \sin\frac{4}{3}\pi \cdot \sin 2\alpha =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha - 2\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{2\left(1 + \operatorname{tg}^2\alpha\right)} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}{2\left(1 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2\right)} =$$

$$= \frac{1 - \frac{4}{3} - 4}{2\left(1 + \frac{4}{3}\right)} = \boxed{-\frac{13}{14}}.$$

10) $\dfrac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$, если $\begin{cases} \alpha - \beta = \dfrac{\pi}{2} \\ \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$.

$$\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} =$$

$$= -\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

11) $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{5}$ и $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{3}$.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=$$ **4.3**

$$=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\frac{1}{5}+\sin\alpha\cdot\sin\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=$$

$$=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=$$ **4.4**

$$=\cos(\alpha-\beta)-\frac{2}{5}=\cos\frac{\pi}{3}-\frac{2}{5}=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\boxed{0{,}1}.$$

12) $\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}$, если $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k\mid k\in\mathbb{Z};$$

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=-\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\pm\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{4}+\pi k\right).$$ **7.11**

а) $-\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{\pi}{4}+\pi k\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+\pi k\right)=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $-\sqrt{2}\cos\left(-\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{\pi}{4}+\pi k\right)=-\sqrt{2}\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}+\pi k\right)=$

$$=\pm\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

13) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{3}{4};$$

$$1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{3}{4};\quad 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{1}{4};\quad \sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{1}{8};$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)}{-\frac{1}{8}}=\boxed{-\frac{9\sqrt{3}}{2}}.$$

Решение карточки 8

Вычислите:

1) $\dfrac{3\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\sin^2\alpha}{9+5\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=-3$.

1.5 $$\frac{3\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\sin^2\alpha}{9+5\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\left(\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{\frac{9}{\cos^2\alpha}+5\operatorname{tg}\alpha}\right)\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{9\operatorname{tg}^2\alpha+9+5\operatorname{tg}\alpha}=\frac{-9-9}{81+9-15}=\boxed{-0{,}24}.$$

2) $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}x=-\dfrac{1}{2}$.

4.5
4.6 $$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}+\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{-0{,}5+1}{1+0{,}5}+\frac{-0{,}5-1}{1-0{,}5}=\frac{0{,}5}{1{,}5}-\frac{1{,}5}{0{,}5}=\frac{1}{3}-3=\boxed{-2\frac{2}{3}}.$$

3) $\operatorname{ctg}x$, если $\cos(x-45^\circ)+\cos(x+45^\circ)=\sqrt{2}\sin x$.

7.1 $\cos(x-45^\circ)+\cos(x+45^\circ)=\sqrt{2}\sin x$;

$2\cos x\cdot\cos 45^\circ=\sqrt{2}\sin x$;

$\sin x=\cos x$; $\quad \operatorname{ctg}x=\boxed{1}$.

4) $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{4}{3}$.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{3}{4};\quad \sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{16}}=\boxed{\frac{24}{25}}.$$

5) $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=3;\quad \sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cdot3}{1+3^2}=\frac{6}{10}=\boxed{0{,}6}.$$

6) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\alpha\right)$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}5$.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0{,}25;\quad 1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0{,}25;$

$-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-0{,}75;\quad \sin 2\alpha=0{,}75;$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)=\sin 2\alpha=\boxed{0{,}75}.$$

7) $2\cos 5\alpha\cdot\cos 7\alpha-\cos 12\alpha$, если $\cos\alpha=0{,}2$.

$2\cos 5\alpha\cdot\cos 7\alpha-\cos 12\alpha=\cos 2\alpha+\cos 12\alpha-\cos 12\alpha=$ 7.7

$=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot 0{,}04-1=\boxed{-0{,}92}.$

8) $\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha=0{,}1$.

$\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left[1-\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)\right]=$ 5.8 3.5

$=\dfrac{1}{2}(1-\sin\alpha)=0{,}5(1-0{,}1)=\boxed{0{,}45}.$

9) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{11\pi}{6}-2\alpha\right)$, если $\mathrm{tg}\,\alpha=3\sqrt{3}$.

$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{11\pi}{6}-2\alpha\right)=\dfrac{\sqrt{3}\left(\mathrm{tg}\,\frac{11\pi}{6}-\mathrm{tg}\,2\alpha\right)}{1+\mathrm{tg}\,\frac{11\pi}{6}\cdot\mathrm{tg}\,2\alpha};$ 4.6

$\mathrm{tg}\,2\alpha=\dfrac{2\cdot 3\sqrt{3}}{1-27}=\dfrac{6\sqrt{3}}{-26}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{13};$ 5.5

$\mathrm{tg}\,\dfrac{11\pi}{6}=\mathrm{tg}\left(2\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3};$

$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{11\pi}{6}-2\alpha\right)=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{3\sqrt{3}}{13}\right)}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{13}}=$

$=\dfrac{3\cdot(-13+9)}{3\cdot 13+9}=-\dfrac{12}{48}=\boxed{-0{,}25}.$

10) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}$, если $\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}$ и $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

7.1
7.2

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\boxed{-\frac{1}{2}}.$$

11) $0{,}2\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha\cdot\cos\beta=-\dfrac{1}{4}$ и $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$.

7.7

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]=-\frac{1}{4};$$

$$\cos\frac{\pi}{3}+\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2};\quad \cos(\alpha-\beta)=-1;$$

$$0{,}2\cos(\alpha-\beta)=0{,}2\cdot(-1)=\boxed{-0{,}2}.$$

12) $\sin x$, если $\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}=\sqrt{0{,}44}$.

5.1

$$\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0{,}44;$$

$$1-\sin x=0{,}44;\quad \sin x=\boxed{0{,}56}.$$

13) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5.1

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{3}{4};$$

$$1-\sin 2\alpha=\frac{3}{4};\quad \sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{8};$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(1+\sin\alpha\cdot\cos\alpha)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(1+0{,}125)}{0{,}125}=\frac{9\sqrt{3}}{2}=\boxed{4{,}5\sqrt{3}}.$$

Решение карточки 9

1. Вычислите:

1) $4(\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ) =$ 7.2

$= 4\left[2\sin\frac{24^\circ+84^\circ}{2}\cdot\sin\frac{84^\circ-24^\circ}{2} + \left(-2\sin\frac{48^\circ+12^\circ}{2}\cdot\sin\frac{48^\circ-12^\circ}{2}\right)\right] =$

$= 4\cdot 2(\sin 54^\circ\cdot\sin 30^\circ - \sin 30^\circ\cdot\sin 18^\circ) =$

$= 4(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ) = 4\cdot 2\sin\frac{54^\circ-18^\circ}{2}\cdot\cos\frac{54^\circ+18^\circ}{2} =$ 7.4

$= 8\sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ = 8\sin(90^\circ - 72^\circ)\cdot\cos 36^\circ =$ 3.6

$$= 8\cos 36^\circ\cdot\cos 72^\circ = \frac{8\sin 36^\circ\cdot\cos 36^\circ\cdot\cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} =$$

$$= \frac{2\cdot 2\sin 72^\circ\cdot\cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{2\sin 144^\circ}{\sin 36^\circ} =$$ 5.1

$$= \frac{2\sin(180^\circ - 36^\circ)}{\sin 36^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} = \boxed{2}.$$ 3.18

2) $\operatorname{ctg} 1^\circ\cdot\operatorname{ctg} 3^\circ\cdot\operatorname{ctg} 5^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{ctg} 89^\circ =$

$= \operatorname{ctg} 1^\circ\cdot\operatorname{ctg} 3^\circ\cdot\operatorname{ctg} 5^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{ctg} 43^\circ\cdot\operatorname{ctg} 45^\circ\times$

$\times\operatorname{ctg}(90^\circ - 43^\circ)\cdot\operatorname{ctg}(90^\circ - 41^\circ)\cdot\ldots\cdot\operatorname{ctg}(90^\circ - 1^\circ) =$

$= \operatorname{ctg} 1^\circ\cdot\operatorname{ctg} 3^\circ\cdot\operatorname{ctg} 5^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{ctg} 43^\circ\cdot 1\times$

$\times\operatorname{tg} 43^\circ\cdot\operatorname{tg} 41^\circ\cdot\operatorname{tg} 39^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg} 5^\circ\cdot\operatorname{tg} 3^\circ\cdot\operatorname{tg} 1^\circ =$

$= (\operatorname{ctg} 1^\circ\cdot\operatorname{tg} 1^\circ)\cdot(\operatorname{ctg} 3^\circ\cdot\operatorname{tg} 3^\circ)\cdot(\operatorname{ctg} 5^\circ\cdot\operatorname{tg} 5^\circ)\cdot\ldots\cdot(\operatorname{ctg} 43^\circ\cdot\operatorname{tg} 43^\circ) =$

$= 1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1 = \boxed{1}.$

3) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0{,}5$.

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot 0{,}5}{1+(0{,}5)^2} = \frac{4}{5};$$ 5.3

$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) =$

$$= \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 2\sin^2\alpha - 1 = 2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 =$$

$$= \frac{2\cdot 16}{25} - 1 = \boxed{\frac{7}{25}}.$$

4) $\dfrac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$, если $\alpha = 7°$.

$$\frac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha} = \frac{1-(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)}{1-(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)} =$$

$$= \frac{1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)}{1-\left[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\right]} =$$

$$= \frac{1-\left[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\right]}{1-(1-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)} =$$

$$= \frac{1-1+3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{1-1+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha} = \boxed{\frac{3}{2}},$$

т. е. значение выражения не зависит от α на области существования.

5) $\left(\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{-1} \cdot \operatorname{arctg} 1 =$

$$= \left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} \cdot \frac{\pi}{4} = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)^{-1} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{6}{5\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{3}{10}}.$$

6) $\cos(2\operatorname{arctg} 2) - \sin(4\operatorname{arctg} 3)$.

Обозначим $\alpha = \operatorname{arctg} 2, \quad \beta = \operatorname{arctg} 3$,

тогда $\operatorname{tg}\alpha = 2, \quad \operatorname{tg}\beta = 3$.

5.4 $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}; \quad \cos 2\alpha = \dfrac{1-2^2}{1+2^2} = \dfrac{-3}{5} = -0{,}6;$

5.4 $\cos 2\beta = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}; \quad \cos 2\beta = \dfrac{1-3^2}{1+3^2} = -\dfrac{8}{10} = -\dfrac{4}{5};$

5.3 $\sin 2\beta = \dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}; \quad \sin 2\beta = \dfrac{2\cdot 3}{1+3^2} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5};$

5.1 $\sin 4\beta = 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta; \quad \sin 4\beta = 2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{24}{25}.$

Тогда $\cos(2\operatorname{arctg} 2) - \sin(4\operatorname{arctg} 3) = \cos 2\alpha - \sin 4\beta =$

$$= -\frac{3}{5} + \frac{24}{25} = \frac{9}{25} = \boxed{0{,}36}.$$

2. Найдите наименьшее значение функции
$f(\alpha) = |\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha|$.

$$f(\alpha) = \left|\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right| = \left|\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\right| = \left|\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\right| =$$ 5.1

$$= \left|\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\right| = \left|\frac{2}{\sin 2\alpha}\right|.$$

Так как наибольшее значение $\sin 2\alpha = 1$, то наименьшее значение $f(\alpha) = 2$.

3. Решите уравнения:

1) $\cos^2(\pi x) + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\sin(\pi x) = 2$, если $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

$$1 - \sin^2(\pi x) + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin(\pi x) = 2;$$

обозначим $\sin(\pi x) = t$, тогда $\quad 2t^2 - 3\sqrt{2}t + 2 = 0$;

$$t_{1,2} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{18-16}}{4} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{4} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{2} \notin E(\sin x) \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. .$$

Итак, $\sin(\pi x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 2.2

$$\pi x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k; \quad \pi x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^k\frac{1}{4} + k; \quad \begin{cases} (-1)^k\dfrac{1}{4} + k \leqslant \dfrac{1}{2} \\ (-1)^k\dfrac{1}{4} + k \geqslant -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

При $k = 0$ $\begin{cases} \dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} \geqslant -\dfrac{1}{2} \end{cases}$, при других k решения нет.

Ответ: $x = \dfrac{1}{4}$.

2) $\cos(\pi x) + \sin\dfrac{5\pi x}{2} = -2$, если $2 \leqslant x \leqslant 6$.

2.1 2.2 $$\begin{cases} \cos(\pi x) = -1 \\ \sin\dfrac{5\pi x}{2} = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \pi x = \pi + 2\pi k \\ \dfrac{5\pi x}{2} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z};$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ x = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5}n \end{cases}; \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5}n \leqslant 6 \\ -\dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5}n \geqslant 2 \\ 1 + 2k \leqslant 6 \\ 1 + 2k \geqslant 2 \\ 1 + 2k = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5}n \end{cases};$$

$$\begin{cases} k \leqslant 2{,}5 \\ k \geqslant 0{,}5 \\ n \leqslant \dfrac{31}{4} \\ n \geqslant \dfrac{11}{4} \\ 2n = 3 + 5k \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} n = 7 \\ n = 6 \\ n = 5 \\ n = 4 \\ n = 3 \end{array}\right. \\ 2n = 3 + 5k \end{cases}.$$

Проверяя пары, получаем $\begin{cases} k = 1 \\ n = 4 \end{cases}$; $\quad x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

3) $\operatorname{tg}^2 \pi x + \operatorname{ctg}^2 \pi x = 2$, если $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$.

$$\operatorname{tg}^2 \pi x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \pi x} = 2; \quad \operatorname{tg}^4 \pi x - 2\operatorname{tg}^2 \pi x + 1 = 0;$$

$$\left(\operatorname{tg}^2 \pi x - 1\right)^2 = 0; \quad \operatorname{tg}^2 \pi x = 1;$$

2.3 $$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \pi x = 1 \\ \operatorname{tg} \pi x = -1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \pi x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k \\ \pi x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4} + k \\ x = -\dfrac{1}{4} + n \end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z};$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{4}+k<\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{1}{4}+k>-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\[6mm] \left\{\begin{array}{l}-\dfrac{1}{4}+n<\dfrac{1}{2}\\[2mm] -\dfrac{1}{4}+n>-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}k<\dfrac{1}{4}\\[2mm] k>-\dfrac{3}{4}\end{array}\right. \quad k=0\\[6mm] \left\{\begin{array}{l}n<\dfrac{3}{4}\\[2mm] n>-\dfrac{1}{4}\end{array}\right. \quad n=0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\[2mm] x=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right\}$.

Решение карточки 10

1. Вычислите:

1) $\sin 160^\circ \cdot \cos 110^\circ + \sin 250^\circ \cdot \cos 340^\circ + \operatorname{tg} 110^\circ \cdot \operatorname{tg} 340^\circ =$

3.18 3.1 3.30 3.9

$$= \sin(180^\circ - 20^\circ) \cdot \cos(90^\circ + 20^\circ) + \sin(270^\circ - 20^\circ) \cdot \cos(360^\circ - 20^\circ) + \operatorname{tg}(90^\circ + 20^\circ) \cdot \operatorname{tg}(360^\circ - 20^\circ) =$$

4.4

$$= \sin 20^\circ \cdot (-\sin 20^\circ) - \cos 20^\circ \cdot \cos 20^\circ + \operatorname{ctg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ =$$

$$= -\cos(20^\circ - 20^\circ) + 1 = -\cos 0^\circ + 1 = -1 + 1 = \boxed{0}.$$

2) $\dfrac{1 - \cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \cos^{-4}\alpha =$

$$= \frac{1 - (\cos^4\alpha + \sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha)}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \cos^4\alpha} =$$

$$= \frac{1 - \left[\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)^2 - 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha\right]}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{1 - 1 + 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha} = \boxed{2}.$$

3) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$;

4.6 $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha};$$

5.5 $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 4} = -\frac{4}{3};$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{1 + \frac{4}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{3}{1}\right) = \boxed{-7}.$$

4) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$, если $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 5$.

$(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 = \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x =$
$= \operatorname{tg}^2 x + 2 + \operatorname{ctg}^2 x;$

$(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 = 5^2 = 25; \quad \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2 = 25;$

$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \boxed{23}.$

5) $A = \sin\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{15}{17}\right).$

Обозначим $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} = \alpha$, $\arcsin\dfrac{15}{17} = \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathrm{I})$;

тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\sin\beta = \dfrac{15}{17}$; $A = \sin 2\alpha + \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$;

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{5}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}};$$ 1.5 1.1

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5};$$ 5.1

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}; \quad \cos\beta = \sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \frac{8}{17};$$ 5.9 1.4

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\frac{15}{17}}{1+\frac{8}{17}} = \frac{15}{17}\cdot\frac{17}{25} = \frac{3}{1}\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{5};$$

$$A = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \boxed{\frac{7}{5}}.$$

6) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{5} - 2\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right).$

Обозначим $\arccos\dfrac{3}{5} = \alpha$ $(\alpha \in \mathrm{I})$,

$\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \beta$ $(\beta \in \mathrm{II})$.

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\operatorname{ctg}\beta = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = -2.$

а) Найдем $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

5.9 $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{1+\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{5}}=\frac{1}{2};$$

5.5 б) $$\operatorname{tg}2\beta=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}.$$

Поэтому

4.6 $$\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}2\beta}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}2\beta}=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{4}{3}}=\frac{\frac{5}{3}}{-\frac{5}{6}}=\boxed{-2}.$$

2. Найдите наибольшее значение функции $f(\alpha)=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

5.1 5.2 $$f(\alpha)=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha=\frac{1}{8}(1-\cos4\alpha);$$

$$-1\leqslant\cos4\alpha\leqslant1;\quad 1\geqslant-\cos4\alpha\geqslant-1;$$

$$2\geqslant-\cos4\alpha+1\geqslant0;\quad \frac{1}{4}\geqslant\frac{1}{8}(1-\cos4\alpha)\geqslant0.$$

Наибольшее значение функции $f(\alpha)$ — $\boxed{\dfrac{1}{4}}$.

3. Решите уравнения:

1) $2\cos(\pi x)+3\sin(\pi x)=5$, если $1\leqslant x\leqslant2$.

2.1 2.2 $$\begin{cases}\cos(\pi x)=1\\ \sin(\pi x)=1\end{cases};\quad \begin{cases}\pi x=2\pi k\\ \pi x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\end{cases};\quad \begin{cases}x=2k\\ x=\dfrac{1}{2}+2n\end{cases}\quad \emptyset.$$

Ответ: $x\in\emptyset$.

2) $\sin^4(\pi x)+\cos^4(\pi x)=\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x)$, если $0\leqslant x\leqslant2$.

$$\sin^4(\pi x)+\cos^4(\pi x)+$$
$$+2\sin^2(\pi x)\cdot\cos^2(\pi x)-2\sin^2(\pi x)\cdot\cos^2(\pi x)=$$
$$=\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x);$$

5.1 $$\left(\sin^2(\pi x)+\cos^2(\pi x)\right)^2-2\sin^2(\pi x)\cdot\cos^2(\pi x)=$$

5.1 $$=\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x);$$

$2-\sin^2(2\pi x)-\sin(2\pi x)=0;$

$\sin^2(2\pi x)+\sin(2\pi x)-2=0;$

$$\big(\sin(2\pi x)\big)_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 2\cdot 1}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2\pi x=-2\notin[-1;1]\\ \sin 2\pi x=1\end{array}\right.;\quad \sin(2\pi x)=1;$$ 2.2

$$2\pi x=\frac{\pi}{2}+2\pi k;\quad x=\frac{1}{4}+k.$$

Придавая k различные целые значения, отберем только те, при которых $x\in[0;2]$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{4};1\frac{1}{4}\right\}$.

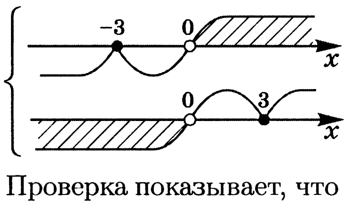
3) $x^2+6x\cdot\sin\dfrac{\pi x}{2}+9=0.$

а) При $x=0$ $\quad 9=0$ — ложь.

б) Рассмотрим случай $x\neq 0$. Тогда

$$\sin\frac{\pi x}{2}=-\frac{x^2+9}{6x};\quad -1\leqslant\sin\frac{\pi x}{2}\leqslant 1;$$

$$-1\leqslant-\frac{x^2+9}{6x}\leqslant 1;\quad \begin{cases}\dfrac{x^2+9+6x}{6x}\geqslant 0\\[2mm] \dfrac{x^2-6x+9}{6x}\leqslant 0\end{cases};$$



$x\in\{-3;3\}$.

Проверка показывает, что $x=-3$ и $x=3$ — корни.

Ответ: $\{-3;3\}$.

Решение карточки 11

1. Вычислите:

1) $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \cos\dfrac{6\pi+\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{12}$;

5.8 $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$; $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$;

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2};$$

поэтому $\cos\dfrac{7\pi}{12} = -\sin\dfrac{\pi}{12} = \boxed{-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$.

5.1 5.2 2) $\dfrac{\operatorname{tg}7^\circ\cdot\sin 14^\circ - 1}{\cos 14^\circ} = \dfrac{\frac{\sin 7^\circ}{\cos 7^\circ}\cdot 2\sin 7^\circ\cdot\cos 7^\circ - 1}{\cos^2 7^\circ - \sin^2 7^\circ} =$

$$= \frac{2\sin^2 7^\circ - \sin^2 7^\circ - \cos^2 7^\circ}{\cos^2 7^\circ - \sin^2 7^\circ} = \frac{\sin^2 7^\circ - \cos^2 7^\circ}{\cos^2 7^\circ - \sin 7^\circ} = \boxed{-1}.$$

3) $\cos 47^\circ - \cos 13^\circ + \cos 73^\circ =$

4.4 $= \cos(60^\circ - 13^\circ) - \cos 13^\circ + \cos(60^\circ + 13^\circ) =$

$= \cos 60^\circ\cdot\cos 13^\circ + \sin 60^\circ\cdot\sin 13^\circ - \cos 13^\circ +$

$+ \cos 60^\circ\cdot\cos 13^\circ - \sin 60^\circ\cdot\sin 13^\circ =$

$$= \frac{1}{2}\cos 13^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 13^\circ - \cos 13^\circ + \frac{1}{2}\cos 13^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 13^\circ = \boxed{0}.$$

4) $\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ =$

3.6 7.7 $= \sin 40^\circ\cdot(\sin 20^\circ\cdot\sin 80^\circ) = \cos 50^\circ\cdot(\cos 10^\circ\cdot\cos 70^\circ) =$

7.7 $= \cos 50^\circ\cdot\dfrac{1}{2}(\cos 80^\circ + \cos 60^\circ) = \dfrac{1}{2}\cos 50^\circ\cdot\cos 80^\circ + \dfrac{1}{4}\cos 50^\circ =$

3.17 $= \dfrac{1}{4}(\cos 130^\circ + \cos 30^\circ) + \dfrac{1}{4}\cos 50^\circ =$

$$= \frac{1}{4}(-\cos 50^\circ + \cos 50^\circ) + \frac{1}{4}\cos 30^\circ = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{8}}.$$

5) $A = 162(\sin^4 x + \cos^4 x)$, если $\sin x - \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

$$(\sin x - \cos x)^2 = \frac{2}{9} = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cdot \cos x =$$ **5.1**

$$= -\sin 2x + 1;$$

$$\frac{2}{9} = 1 - \sin 2x; \quad \sin 2x = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9};$$

$$A = 162(\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x) =$$

$$= 162\big((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x\big) =$$ **5.1**

$$= 162\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) = 162\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^2\right) =$$

$$= 162\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{49}{81}\right) = 162\left(1 - \frac{49}{162}\right) =$$

$$= 162\left(\frac{162-49}{162}\right) = 162 - 49 = \boxed{113}.$$

6) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha =$

$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha) +$$
$$+ 3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha =$$

$$= 1\cdot(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha) + 3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha =$$

$$= \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + \sin^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = \boxed{1}.$$

7) $\arccos\left(-0{,}5\cdot\sqrt{3}\right) : \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\right) =$ **8.1**

$$= \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) : \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\cdot\frac{6}{\pi} = \boxed{5}.$$

8) $A = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{5} - 3\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

Обозначим $\alpha = \arccos\dfrac{3}{5}$, $\operatorname{arctg} 2 = \beta$, тогда

$\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = 2$.

4.5 $$A = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5} - 3\operatorname{arctg}(-2)\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + 3\beta\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} 3\beta}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}3\beta};$$

5.9 $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}} = \sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{8}} = \frac{1}{2}$$

(так как $\alpha \in I$ четверти).

4.5 $$\operatorname{tg}3\beta = \operatorname{tg}(\beta + 2\beta) = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}2\beta}{1 - \operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}2\beta};$$

5.5 $$\operatorname{tg}2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{2\cdot 2}{1-4} = -\frac{4}{3}, \text{ поэтому}$$

$$\operatorname{tg}3\beta = \frac{2-\frac{4}{3}}{1+2\cdot\frac{4}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{11}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{11} = \frac{2}{11}.$$

Значит

$$A = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + 3\beta\right) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{11}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{11}} = \frac{\frac{11}{22}+\frac{4}{22}}{1-\frac{1}{11}} = \frac{15}{22}\cdot\frac{11}{10} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

2. Найдите область изменения функции

$f(\beta) = 2\sin^2\beta + 3\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\beta.$

5.2 $f(\beta) = 2\sin^2\beta + 3 = 1 - \cos 2\beta + 3 = 4 - \cos 2\beta;$

$D(f)$: $\begin{cases}\cos\beta \neq 0\\ \sin\beta\neq 0\end{cases}$, т. е. $\beta \neq \frac{\pi}{2}k \mid k\in\mathbb{Z}$.

$-1 \leqslant \cos 2\beta \leqslant 1;\quad 1 \geqslant -\cos2\beta \geqslant -1;\quad 5\geqslant 4-\cos 2\beta \geqslant 3;$

Но $\cos 2\beta = 1$ при $\beta = \pi k \notin D(f)$,

$\cos 2\beta = -1$ при $\beta = \frac{\pi}{2} + \pi k \notin D(f)$.

Значит, $5 > 4 - \cos 2\beta > 3$, т. е. наибольшего и наименьшего значения у функции нет.

Ответ: $E(f) = (3; 5)$.

3. Решите уравнение

$$\cos(\pi x) - 2\cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) = 2, \text{ если } -6 \leqslant x \leqslant -2.$$

$$\cos(\pi x) - 4\cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right) + 2 = 2; \quad \cos(\pi x) - 4\cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right) = 0.$$ 5.2

Так как $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, то 6.2

$$4\cos^3\left(\frac{\pi x}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) - 4\cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right) = 0.$$

а) $\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) = 0; \quad \frac{\pi x}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \quad x = 1{,}5 + 3k.$ 2.1

По условию $-6 \leqslant x \leqslant -2$, тогда

$$\begin{cases} 1{,}5 + 3k \leqslant -2 \\ 1{,}5 + 3k \geqslant -6 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3k \leqslant -3{,}5 \\ 3k \geqslant -7{,}5 \end{cases}; \quad -2{,}5 \leqslant k \leqslant -\frac{7}{6}.$$

Подходит $k = -2$, тогда $x = -4{,}5$.

б) $4\cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right) - 4\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) - 3 = 0;$

$$\left(\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right)_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{4} = \frac{2 \pm 4}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) = 1{,}5 \notin [-1; 1] \\ \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) = -\frac{1}{2} \end{array}\right.; \quad \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) = -\frac{1}{2};$$ 2.1

$$\frac{\pi x}{3} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \quad x = \pm 2 + 6n \mid n \in \mathbb{Z}.$$

По условию $-6 \leqslant x \leqslant -2$, т. е.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 + 6n \leqslant -2 \\ 2 + 6n \geqslant -6 \end{cases} \\ \begin{cases} -2 + 6n \leqslant -2 \\ -2 + 6n \geqslant -6 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n \leqslant -\frac{2}{3} \\ n \geqslant -\frac{4}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} n \leqslant 0 \\ n \geqslant -\frac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right..$$

Если $n = -1$, то $x = -4$; если $n = 0$, то $x = -2$.

Ответ: $\{-4{,}5; -4; -2\}$.

Решение карточки 12

1. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right) = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{12}$.

5.9 Учтем, что $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, тогда $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}} =$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} = \boxed{2+\sqrt{3}}.$$

2) $\cos\dfrac{6\pi}{5}\cdot\cos\dfrac{3\pi}{5} =$

5.1 $$= \cos\frac{6\pi}{5}\cdot\cos\frac{3\pi}{5}\cdot\frac{2\sin\frac{3\pi}{5}}{2\sin\frac{3\pi}{5}} = \frac{\cos\frac{6\pi}{5}\cdot\sin\frac{6\pi}{5}}{2\sin\frac{3\pi}{5}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{12\pi}{5}}{4\sin\frac{3\pi}{5}} = \frac{\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{5}\right)}{4\sin\frac{3\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{3\pi}{5}} =$$

3.18 $$= \frac{\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{5}\right)}{4\sin\frac{3\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{5}}{4\sin\frac{3\pi}{5}} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

3) $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - 4\sin 70^\circ =$

$$= \frac{1-4\sin 70^\circ\cdot\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{1-2\cdot 2\sin\frac{140^\circ}{2}\cdot\sin\frac{20^\circ}{2}}{\sin 10^\circ} =$$

7.2 $$= \frac{1+2\left(-2\sin\frac{60^\circ+80^\circ}{2}\cdot\sin\frac{80^\circ-60^\circ}{2}\right)}{\sin 10^\circ} =$$

3.5 $$= \frac{1+2(\cos 80^\circ-\cos 60^\circ)}{\sin 10^\circ} = \frac{1+2\left(\cos 80^\circ-\frac{1}{2}\right)}{\sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{1+2\left(\sin 10^\circ-\frac{1}{2}\right)}{\sin 10^\circ} = \frac{1+2\sin 10^\circ-1}{\sin 10^\circ} = \frac{2\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \boxed{2}.$$

4) $A = \cos 0 + \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \ldots + \cos\frac{6\pi}{7}$.

Рассмотрим отдельно три суммы: 2-го и 7-го, 3-го и 6-го, 4-го и 5-го слагаемых:

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{6\pi}{7}-\frac{\pi}{7}}{2} =$$ 7.1

$$= 2\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{5\pi}{14} = 0.$$

Аналогично $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = 0$ и $\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} = 0$.

Следовательно, $A = 1 + 0 + 0 + 0 = \boxed{1}$.

5) $\cos(2\,\mathrm{arctg}\,7) - \sin(4\,\mathrm{arctg}\,3)$;

Обозначим $\mathrm{arctg}\,7 = \alpha$, $\mathrm{arctg}\,3 = \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathrm{I})$.

Тогда $\mathrm{tg}\,\alpha = 7$, $\mathrm{tg}\,\beta = 3$.

а) Вычислим $\cos 2\alpha$.

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha} = \frac{1}{1+49} = \frac{1}{50}.$$ 1.5

Значит, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{1}{50} - 1 = -\frac{24}{25}$. 5.2

б) Вычислим $\sin 4\beta$.

$$\sin 4\beta = \sin(2\beta+2\beta) = \sin 2\beta\cdot\cos 2\beta + \cos 2\beta\cdot\sin 2\beta =$$ 4.1
$$= 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta;$$

$$\cos^2\beta = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\beta} = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10};$$ 1.5

$$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{1}{5} - 1 = -\frac{4}{5} \quad (2\beta \in \mathrm{II});$$ 5.2

$$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}.$$ 5.1

Значит, $\sin 4\beta = 2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{3}{5} = -\frac{24}{25}$.

Таким образом, $\cos 2\alpha - \sin 4\beta = -\frac{24}{25} - \left(-\frac{24}{25}\right) = \boxed{0}$.

6) $A = \operatorname{tg}\left(2\arccos\dfrac{5}{\sqrt{26}} - \arcsin\dfrac{12}{13}\right)$.

Обозначим $\arccos\dfrac{5}{\sqrt{26}} = \alpha$, $\arcsin\dfrac{12}{13} = \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathrm{I})$.

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$, $\sin\beta = \dfrac{12}{13}$.

4.6 $A = \operatorname{tg}(2\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}2\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$.

а) Вычислим $\operatorname{tg}2\alpha$.

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\dfrac{25}{26} - 1 =$

5.2 $= \dfrac{25}{13} - 1 = \dfrac{12}{13}$ $(2\alpha \in \mathrm{I})$.

1.8 $\operatorname{tg}2\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 2\alpha} - 1} = \sqrt{\dfrac{13^2 - 12^2}{12^2}} = \dfrac{5}{12}$.

б) Вычислим $\operatorname{tg}\beta$.

1.4 $\sin\beta = \dfrac{12}{13}$; $\cos\beta = \sqrt{1 - \dfrac{144}{169}} = \dfrac{5}{13}$;

$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{12}{13}\cdot\dfrac{13}{5} = \dfrac{12}{5}$.

Таким образом, $A = \dfrac{\frac{5}{12} - \frac{12}{5}}{1 + \frac{5}{12}\cdot\frac{12}{5}} = \dfrac{25 - 144}{12\cdot 5\cdot 2} = \boxed{-\dfrac{119}{120}}$.

2. Найдите наименьшее значение функции $f(\alpha) = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

$f(\alpha) = \left(\sin^2\alpha\right)^3 + \left(\cos^2\alpha\right)^3 =$

$= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + \cos^4\alpha\right) =$

$= 1\cdot\left[\left(\left(\sin^2\alpha\right)^2 + 2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + \left(\cos^2\alpha\right)^2\right) - 3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\right] =$

5.1 $= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha =$

5.8 $= 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha = 1 - \dfrac{3}{8}(1 - \cos 4\alpha) = \dfrac{3}{8}\cos 4\alpha + \dfrac{5}{8}$.

$-1 \leqslant \cos 4\alpha \leqslant 1$; $-\dfrac{3}{8} \leqslant \dfrac{3}{8}\cos 4\alpha \leqslant \dfrac{3}{8}$; $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{3}{8}\cos 4\alpha + \dfrac{5}{8} \leqslant 1$.

Значит, наименьшее значение функции $f(\alpha)$ — $\boxed{\dfrac{1}{4}}$.

3. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg}(\pi x) - \operatorname{ctg}(\pi x) = \sin^{-1}(\pi x) - \cos^{-1}(\pi x)$,

если $-1 \leqslant x \leqslant 1{,}5$.

$$\frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} - \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{\cos(\pi x)};$$

$$\frac{\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x)}{\sin(\pi x)\cos(\pi x)} = \frac{\cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x)};$$

$$\begin{cases} (\sin(\pi x) - \cos(\pi x))(\sin(\pi x) + \cos(\pi x)) = -(\sin(\pi x) - \cos(\pi x)) \\ \sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x) \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \sin(\pi x) \neq 0 \\ \cos(\pi x) \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sin(\pi x) = \cos(\pi x) \\ \sin(\pi x) + \cos(\pi x) = -1 \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} \pi x \neq \pi k \\ \pi x \neq \pi n + \dfrac{\pi}{2} \mid k, n \in \mathbb{Z} \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(\pi x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(\pi x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \end{cases}; \text{ 7.10 2.2}$$

$$\begin{cases} \pi x \neq \pi k \\ \pi x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n \\ \left[\begin{array}{l} \pi x = \dfrac{\pi}{4} + \pi t \\ \pi x = \pi + 2\pi k \\ \pi x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} x \neq k \\ x \neq \dfrac{1}{2} + n \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4} + t \\ x = 1 + 2p \qquad \mid t, p, m \in \mathbb{Z}; \\ x = -\dfrac{1}{2} + 2m \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ll} t = -1 & x = -\dfrac{3}{4} \\ t = 0 & x = \dfrac{1}{4} \\ t = 1 & x = \dfrac{5}{4} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{5}{4}\right\}$.

2) $\cos(\pi x)\cdot\cos(2\pi x)\cdot\sin(3\pi x) = \dfrac{1}{4}\sin(2\pi x)$, если $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$.

5.1 $4\cos(\pi x)\cdot\cos(2\pi x)\cdot\sin(3\pi x) - 2\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x) = 0;$

7.9 $2\cos(\pi x)\cdot\big(2\cos(2\pi x)\cdot\sin(3\pi x) - \sin(\pi x)\big) = 0;$

$2\cos(\pi x)\cdot\big(\sin(5\pi x) + \sin(\pi x) - \sin(\pi x)\big) = 0;$

$2\cos(\pi x)\cdot\sin(5\pi x) = 0;$

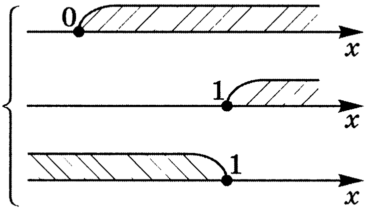
2.1 2.2 $\left[\begin{array}{l}\cos(\pi x) = 0\\ \sin(5\pi x) = 0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\pi x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k\\ 5\pi x = \pi n\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{1}{2} + k\\ x = \dfrac{n}{5}\end{array}\right.\quad | \, k, n \in \mathbb{Z};$

$\left[\begin{array}{l}0 \leqslant \dfrac{1}{2} + k \leqslant 0{,}5\\ 0 \leqslant \dfrac{n}{5} \leqslant 0{,}5\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}k = 0\\ n = 1\\ n = 2\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x = 0{,}5\\ x = 0{,}2\\ x = 0{,}4\end{array}\right..$

Ответ: $\{0{,}2; 0{,}4; 0{,}5\}$.

3) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = \cos\sqrt{1-x}$.

$D(\text{У}):\quad \begin{cases} x \geqslant 0\\ x - 1 \geqslant 0\\ 1 - x \geqslant 0\end{cases}$



$D(\text{У})$ удовлетворяет только $x = 1$. Проверим:

$\sqrt{1} + \sqrt{1-1} = \cos\sqrt{1-1};\quad \cos 0 = 1$ — истина.

Ответ: $x = 1$.

Решение карточки 13

1. Вычислите:

1) $\sin 2\alpha,\quad \cos 2\alpha,\quad \operatorname{tg} 2\alpha,$ если $\operatorname{ctg}\alpha = 1-\sqrt{2}.$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{1-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}-1;$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$ 5.3 5.4 5.5

а) $$\sin 2\alpha = \frac{2\left(-\left(\sqrt{2}+1\right)\right)}{1+\left(-\left(\sqrt{2}+1\right)\right)^2} = \frac{-2\left(\sqrt{2}+1\right)}{1+2+2\sqrt{2}+1} =$$
$$= \frac{-2\left(\sqrt{2}+1\right)}{2\left(2+\sqrt{2}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

б) $$\cos 2\alpha = \frac{1-\left(-\left(\sqrt{2}+1\right)\right)^2}{1+\left(-\left(\sqrt{2}+1\right)\right)^2} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{1+\left(\sqrt{2}+1\right)^2} =$$
$$= \frac{1-2-2\sqrt{2}-1}{1+2+2\sqrt{2}+1} = \frac{-2\left(\sqrt{2}+1\right)}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

в) $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

2) $4\cos 20^\circ - \sqrt{3}\operatorname{ctg} 20^\circ =$

$$= 4\cos 20^\circ - \frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{4\cos 20^\circ\cdot\sin 20^\circ - \sqrt{3}\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin 40^\circ - \sqrt{3}\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2}{\sin 20^\circ}\left(\sin 40^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ\right) =$$

$$= \frac{2}{\sin 20^\circ}\left(\sin 40^\circ - \cos 30^\circ\cdot\cos 20^\circ\right) =$$ 7.7

$$= \frac{2}{\sin 20^\circ}\left(\sin 40^\circ - \frac{1}{2}\left(\cos 50^\circ + \cos 10^\circ\right)\right) =$$ 3.5 3.6

$$= \frac{2}{\sin 20^\circ}\left(\sin 40^\circ - \frac{1}{2}\sin 40^\circ - \frac{1}{2}\sin 80^\circ\right) =$$ 7.4

$$= \frac{2}{\sin 20^\circ} \cdot \frac{1}{2} (\sin 40^\circ - \sin 80^\circ) =$$

$$= \frac{1}{\sin 20^\circ} \cdot 2 \cdot \sin \frac{40^\circ - 80^\circ}{2} \cdot \cos \frac{40^\circ + 80^\circ}{2} =$$

$$= \frac{2}{\sin 20^\circ} \cdot \sin(-20^\circ) \cdot \cos 60^\circ = -2 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{-1}.$$

2. Решите уравнения:

1) $1 + 2\cos\frac{\pi x}{15} = 0.$

2.1 $\cos\frac{\pi x}{15} = -\frac{1}{2}; \quad \frac{\pi x}{15} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \quad x = \pm 10 + 30k.$

Ответ: $\{\pm 10 + 30k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2) $2\cos(x + 60^\circ) \cdot \cos 3x = \cos(x + 60^\circ).$

2.1 $2\cos(x + 60^\circ) \left[\cos 3x - \frac{1}{2}\right] = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} x + 60^\circ = 90^\circ + 180^\circ k \\ 3x = \pm 60^\circ + 360^\circ n \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 30^\circ + 180^\circ k \\ x = \pm 20^\circ + 120^\circ n \end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\{30^\circ + 180^\circ k; \pm 20^\circ + 120^\circ n \mid k, n \in \mathbb{Z}\}$.

3) $\frac{\sin x}{\cos 60^\circ} = \operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} x.$

$\cos x \neq 0; \quad \sin x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \operatorname{tg} x;$

2.1
2.2 $\sin\left(1 - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos x}\right) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.;$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k \\ x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\pi k; \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

4) $\cos 4x = \sin 2x$, если $0 < x < 80°$.

$1 - 2\sin^2 2x = \sin 2x; \quad 2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0;$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = -1 \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 2x = -90° + 360°k \\ 2x = (-1)^n 30° + 180°n \end{array}\right.;$ **2.2**

$\left[\begin{array}{l} x = -45° + 180°k \\ x = (-1)^n 15° + 90°n \end{array}\right.;$

$\left[\begin{array}{ll} 0° < -45° + 180°k < 80° & k \in \emptyset \\ 0° < (-1)^n 15° + 90°n < 80° & n = 0,\ n = 1 \end{array}\right..$

Ответ: $\{15°, 75°\}$.

5) $\dfrac{\sin 4x}{\cos 5x} = -1$, если $80° < x < 180°$.

$\cos 5x \neq 0; \quad x \neq 18° + 36°t \mid t \in \mathbb{Z};$ **2.1**

$\sin 4x + \cos 5x = 0; \quad \sin 4x + \sin(5x + 90°) = 0;$ **3.3** **7.3**

$2 \cdot \sin \dfrac{4x + 5x + 90°}{2} \cdot \cos \dfrac{4x - 5x - 90°}{2} = 0;$

$\left[\begin{array}{l} \sin(4{,}5x + 45°) = 0 \\ \cos(0{,}5x + 45°) = 0 \end{array}\right.;$ **2.1** **2.2**

$\left[\begin{array}{l} 4{,}5x + 45° = 180°k \\ 0{,}5x + 45° = 90° + 180°n \end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z}; \quad \left[\begin{array}{l} x = -10° + 40°k \\ x = 90° + 360°n \end{array}\right.;$

$\left[\begin{array}{l} 80° < -10° + 40°k < 180° \\ 80° < 90° + 360°n < 180° \end{array}\right.;$

$\left[\begin{array}{ll} k = 3 & x = 110° \\ k = 4 & x = 150° \\ n = 0 & x = 90° \notin \text{ОДЗ} - t = 2 \end{array}\right..$

Ответ: $\{110°; 150°\}$.

6) $\sin(30° - x) \cdot \cos(60° + x) = 1$.

$\sin(30° - x) = \cos[90° - (30° - x)] = \cos(60° + x);$ **3.5**

$\cos^2(60° + x) = 1;$ **1.1**

$\sin^2(60° + x) = 0; \quad 60° + x = 180°k; \quad x = -60° + 180°k.$ **2.2**

Ответ: $\{-60° + 180°k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

7) $(1 + \cos 2x) \cdot \sin x = \cos^2 x.$

$$2\cos^2 x \cdot \sin x - \cos^2 x = 0; \quad 2\cos^2 x \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0;$$

2.1 2.2

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n \end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k; (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

8) $9\operatorname{ctg}^2 x + 4\sin^2 x = 6.$ $\boxed{\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1}$ 1.10

$$9\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) + 4\sin^2 x = 6.$$

Обозначим $\sin^2 x = t, \quad t \in [0; 1];$ тогда

$$\frac{9}{t} + 4t - 15 = 0; \quad 4t^2 - 15t + 9 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 144}}{8} = \frac{15 \pm 9}{8} = \left[\begin{array}{l} 3 \notin [0; 1] \\ \dfrac{3}{4} \end{array}\right.;$$

2.2 $$\sin^2 x = \frac{3}{4}; \quad \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

9) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{5}{8}.$

5.1 $$\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{5}{8};$$

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{5}{8}; \quad \sin^2 2x = \frac{3}{4};$$

2.2 $$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 2x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}k \\ x = (-1)^{n+1} \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}n \end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Можно обобщить: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}t \mid t \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}t \mid t \in \mathbb{Z}\right\}$.

10) $\sqrt{3}\sin^2 x + 5\cos^2 x - \left(5\sqrt{3}+1\right)\sin x \cdot \cos x = 0$.

Разделим обе части на $\cos^2 x$:

$\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - \left(5\sqrt{3}+1\right)\operatorname{tg} x + 5 = 0$;

$$(\operatorname{tg} x)_{1,2} = \frac{5\sqrt{3}+1 \pm \sqrt{\left(5\sqrt{3}+1\right)^2 - 4\cdot 5\sqrt{3}}}{2\cdot\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}+1 \pm \left(5\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{3}} = \left[\begin{array}{l} 5 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 5 \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} 5 + \pi k \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \pi n \end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$ **2.3**

Ответ: $\left\{\operatorname{arctg} 5 + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

11) $1 - \cos\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{4}$. $\boxed{1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ **5.8**

$$2\sin^2\frac{x}{4} - \frac{\sin\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{4}} = 0; \quad \frac{\sin\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{4}}\left(2\sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4} - 1\right) = 0;$$ **5.1**

$$\operatorname{tg}\frac{x}{4}\left(\sin\frac{x}{2} - 1\right) = 0; \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\dfrac{x}{4} = 0 \\ \sin\dfrac{x}{2} = 1 \end{array}\right. ; \\ \cos\dfrac{x}{4} \neq 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{4} = \pi k \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \end{array}\right. ; \\ \dfrac{x}{4} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi t \end{array}\right.$$ **2.1** **2.2** **2.3**

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 4\pi k \\ x = \pi + 4\pi n \end{array}\right. ; \\ x \neq 2\pi + 4\pi t \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 4\pi k \\ x = \pi + 4\pi n \end{array}\right. \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\{4\pi k; \pi + 4\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\}$.

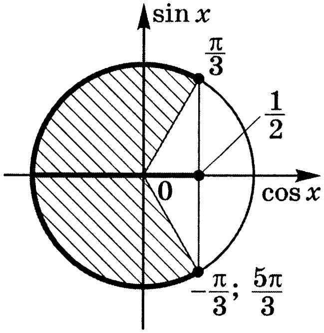
3. Решите неравенство $\sqrt{10-18\cos x} \geqslant 6\cos x - 2$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 6\cos x - 2 \geqslant 0 \\ 10 - 18\cos x \geqslant (6\cos x - 2)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 6\cos x - 2 < 0 \\ 10 - 18\cos x \geqslant 0 \end{cases}\end{array}\right. ;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} \cos x \geqslant \dfrac{1}{3} \\ 36\cos^2 x - 6\cos x - 6 \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < \dfrac{1}{3} \\ \cos x \leqslant \dfrac{5}{9} \end{cases}\end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} 6\cos^2 x - \cos x - 1 \leqslant 0 \\ \cos x \geqslant \dfrac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < \dfrac{1}{3} \\ \cos x \leqslant \dfrac{5}{9} \end{cases}\end{array}\right. ;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} \left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right)\left(\cos x + \dfrac{1}{3}\right) \leqslant 0 \\ \cos x \geqslant \dfrac{1}{3} \end{cases} \\ \cos x < \dfrac{1}{3}\end{array}\right. ;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} \cos x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \cos x \geqslant -\dfrac{1}{3} \\ \cos x \geqslant \dfrac{1}{3} \end{cases} \\ \cos x < \dfrac{1}{3}\end{array}\right. ; \quad \cos x \leqslant \frac{1}{2}.$$



$$2\pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi k \geqslant x \geqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi k;$$

$$\frac{5\pi}{3} + 2\pi k \geqslant x \geqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

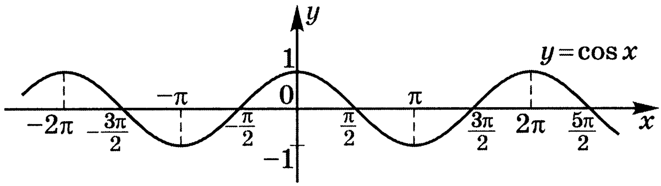
Ответ: $\left\{\left[\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k; 1\dfrac{2}{3}\pi + 2\pi k\right] \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

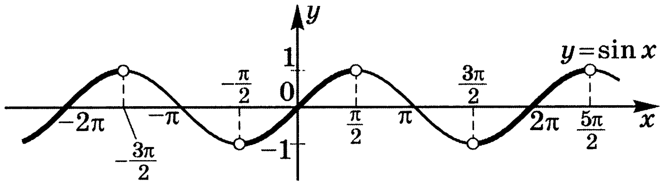
4. Постройте график $y(x) = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\,\dfrac{\cos^2(-x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\sin(\pi-x)}$.

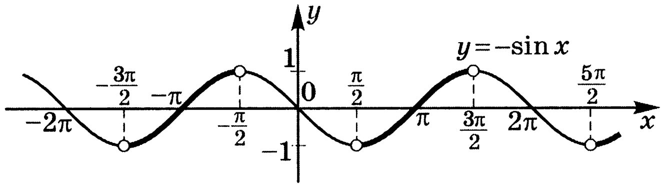
$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\cdot\frac{\cos^2 x\cdot\sin x}{\operatorname{ctg} x\cdot\sin x} = \frac{\cos^2 x}{|\cos x|}\cdot\operatorname{tg} x =$$

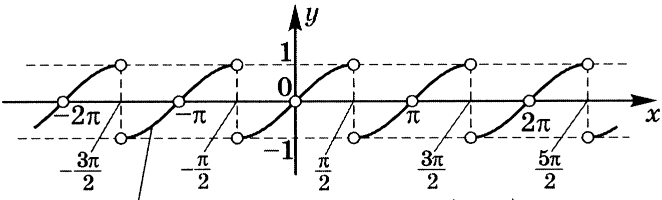
$$= \begin{cases} \sin x, & \cos x > 0\ (\sin x \neq 0) \\ -\sin x, & \cos x < 0\ (\sin x \neq 0) \end{cases}.$$

По условию $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$; $\quad x \neq \dfrac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}$.









$$y = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{\cos^2(-x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\sin(\pi-x)}$$

Решение карточки 14

1. Докажите тождества:

1) $$\frac{(1-\operatorname{tg}\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

$$\mathrm{L}=\frac{(1-\operatorname{tg}\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\operatorname{tg}\alpha}= \qquad \boxed{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1}$$

4.6 $$=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

3.5 $$=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right);$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\\ \Pi=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\end{array}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi.$$

2) $$\frac{1}{\cos x\cdot\cos 2x}+\frac{1}{\cos 2x\cdot\cos 3x}+\ldots+\frac{1}{\cos 9x\cdot\cos 10x}=$$
$$=\frac{2\sin 9x}{\sin 2x\cdot\cos 10x}.$$

7.6 Так как $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)}$, то

$$\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x\cdot\cos 2x};$$

$$\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x=\frac{\sin x}{\cos 2x\cdot\cos 3x};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{tg}10x-\operatorname{tg}9x=\frac{\sin x}{\cos 9x\cdot\cos 10x};$$

$$\operatorname{tg} 10x - \operatorname{tg} x =$$
$$= \sin x \left(\frac{1}{\cos x \cdot \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cdot \cos 3x} + \ldots + \frac{1}{\cos 9x \cdot \cos 10x} \right),$$

но $\operatorname{tg} 10x - \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin 9x}{\cos x \cdot \cos 10x}$, тогда **7.6**

$$\frac{1}{\cos x \cdot \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cdot \cos 3x} + \ldots + \frac{1}{\cos 9x \cdot \cos 10x} =$$
$$= \frac{\sin 9x}{\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 10x} = \frac{2 \sin 9x}{\sin 2x \cdot \cos 10x};$$ **5.1**

$$\left. \begin{array}{l} \text{L} = \dfrac{2 \sin 9x}{\sin 2x \cdot \cos 10x} \\ \Pi = \dfrac{2 \sin 9x}{\sin 2x \cdot \cos 10x} \end{array} \right| \Rightarrow \text{L} = \Pi.$$

2. Решите уравнения:

1) $3 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 3 = 0.$

$3(1 - \cos^2 2x) + 7 \cos 2x - 3 = 0; \quad 3 \cos^2 2x - 7 \cos 2x = 0;$ **1.1**

$$3 \cos 2x \left(\cos 2x - \frac{7}{3} \right) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = 2\frac{1}{3} \notin [-1; 1] \end{array} \right.;$$ **2.1**

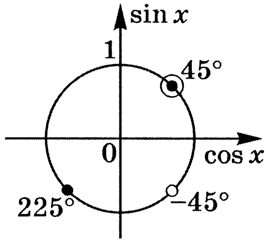
$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2) $\dfrac{\sin(x - 45^\circ)}{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0;$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(x - 45^\circ) = 0 \\ \cos x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.; \quad \left\{ \begin{array}{l} x - 45^\circ = 180^\circ k \\ x \neq \pm 45^\circ + 360^\circ n \end{array} \right. \mid k, n \in \mathbb{Z};$$ **2.1** **2.2**

$$\begin{cases} x = 45° + 180°k \\ x \neq \pm 45° + 360°n \end{cases};$$



$x = 225° + 360°n \mid n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\{225° + 360°n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

3) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 4x$.

7.6 $$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta};$$

2.2 $$\frac{\sin(4x - x)}{\cos x \cdot \cos 4x} = 0; \quad \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \cos 4x \neq 0 \end{cases}; \quad x = \frac{\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4) $\cos(x + 360°) = \cos(2x - 270°)$, если $270° < x < 360°$.

5.1 $\cos x = -\sin 2x; \quad 2\sin x \cdot \cos x + \cos x = 0;$

$$2\cos x\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0;$$

2.1 2.2 $$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 90° + 180°k \\ x = (-1)^n \cdot (-30°) + 180°n \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{ll} 270° < 90° + 180°k < 360° & k \in \emptyset \\ 270° < (-1)^n \cdot (-30°) + 180°n < 360° & n = 2 \end{array}\right.; \quad x = 330°.$$

Ответ: $x = 330°$.

5) $\sin 3x - \sin 7x = \sqrt{3}\sin 2x$.

7.4 $$2\sin\frac{3x - 7x}{2} \cdot \cos\frac{3x + 7x}{2} - \sqrt{3}\sin 2x = 0;$$

2.1 2.2 $$-2\sin 2x\left(\cos 5x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 5x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}k \\ 5x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}k \\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{5}n \end{array}\right. \mid k,n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}k; \pm\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{5}n \mid k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

6) $\sin x\cdot\cos 5x=\sin 9x\cdot\cos 3x$. **7.9**

$$\frac{1}{2}\left[\sin(x+5x)+\sin(x-5x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin(9x+3x)+\sin(9x-3x)\right];$$

$\sin 6x-\sin 4x=\sin 12x+\sin 6x;\quad \sin 12x+\sin 4x=0;$ **7.3**

$2\sin 8x\cdot\cos 4x=0;$ **2.1** **2.2**

$$\left[\begin{array}{l} 8x=\pi k \\ 4x=\frac{\pi}{2}+\pi n \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{8}k \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}n \end{array}\right.;\quad x=\frac{\pi}{8}k \mid k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{8}k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

7) $\sin\frac{x}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{6}+1=0$.

$$2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{6}\right)=-1;$$

$$2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{x}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{x}{6}\right)=-1;$$ **4.4**

$\cos\left(\frac{x}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2};\quad \frac{x}{6}-\frac{\pi}{6}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k;$ **2.1**

$$\frac{x}{6}=\frac{\pi}{6}\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\quad x=\pi\pm 4\pi+12\pi k \mid k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\{\pi\pm 4\pi+12\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

7.7 8) $2\cos x \cdot \cos 4x = \cos 3x.$

2.1 $\cos(x+4x) + \cos(x-4x) = \cos 3x; \quad \cos 5x = 0;$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k \,|\, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

7.11

3.1 9) $2\cos 4x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x).$

$$2\cos 4x = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right);$$

7.2 $\cos 4x - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0;$

$$-2\sin\frac{4x + x + \frac{\pi}{4}}{2}\cdot\sin\frac{4x - x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0;$$

2.2 $\left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \frac{5x}{2} = -\frac{\pi}{8} + \pi k \\ \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi n \end{array}\right.;$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n \end{array}\right. \,|\, k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}k; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n \,|\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

5.1 10) $\cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{8\sin x}. \qquad D(\text{У}): \ \sin x \neq 0;$

5.1 $\frac{1}{2}\sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{8}; \quad \frac{1}{4}\sin 4x = \frac{1}{8}; \quad \sin 4x = \frac{1}{2};$

2.2 $4x = \frac{\pi}{6}\cdot(-1)^k + \pi k; \quad x = (-1)^k\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4}k \in D(\text{У}).$

Ответ: $\left\{(-1)^k\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4}k \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

11) $\cos x + \sin x = \sqrt{1 - 2\cos^2 x}$.

$\cos x + \sin x = \sqrt{-\cos^2 x + \sin^2 x}$;

$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0 \\ a = b^2 \end{cases}$, поэтому

$$\begin{cases} \cos x + \sin x \geqslant 0 \\ (\cos x + \sin x)^2 - (\cos x + \sin x)(-\cos x + \sin x) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos x + \sin x \geqslant 0 \\ (\cos x + \sin x)\left[\cos x + \sin x + \cos x - \sin x\right] = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos x + \sin x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ 2\cos x = 0 \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos x + \sin x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Проверим решения уравнений на соответствие неравенству.

а) Рассмотрим $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, **2.3**
корень уравнения $\operatorname{tg} x = -1$.
$\sin\left(-\dfrac{\pi}{4} + \pi n\right) + \cos\left(-\dfrac{\pi}{4} + \pi n\right) =$ **7.10**
$= \sqrt{2}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4} + \pi n + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin \pi n \geqslant 0$,
т. е. $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$ — корень.

б) Рассмотрим $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, корень уравнения $\cos x = 0$. **2.1**
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k\right) =$ **3.1** **3.3**
$= -\sin \pi k + \cos \pi k = \cos \pi k \geqslant 0$ при $k = 2m$.

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m \mid n, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

7.2 5.1 12) $\cos 2x - \cos 3x = \sin 5x$.

$$-2\sin\frac{5x}{2}\cdot\sin\left(-\frac{x}{2}\right) - 2\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{5x}{2} = 0;$$

$$-2\sin\frac{5x}{2}\left(-\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{5x}{2}\right) = 0;$$

7.2
$$\left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{5x}{2} = 0 \\ -\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2}\right) + \cos\dfrac{5x}{2} = 0 \end{array}\right.;$$

2.2
$$\left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{5x}{2} = 0 \\ 2\sin\dfrac{\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + \frac{5x}{2}}{2}\cdot\sin\dfrac{\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} - \frac{5x}{2}}{2} = 0 \end{array}\right.;$$

2.2
$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{5x}{2} = \pi k \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = 0 \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3x}{2}\right) = 0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{5}k \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \pi n \\ \dfrac{3x}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \pi t \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{5}k \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n \quad | \, k, n, t \in \mathbb{Z}. \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}t \end{array}\right.$$

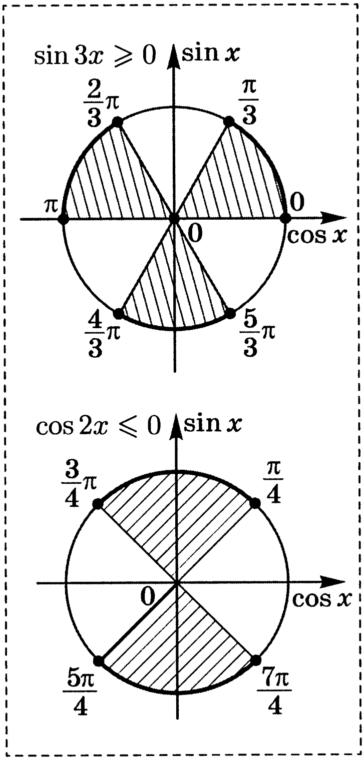
Ответ: $\left\{\dfrac{2\pi}{5}k; -\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}t \,|\, k, n, t \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. Решите неравенство $\sin 5x + \sin x \leqslant 0$.

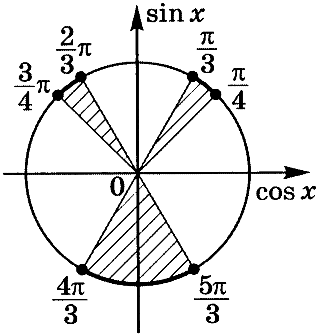
$$2\sin 3x\cdot\cos 2x \leqslant 0; \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 3x \geqslant 0 \\ \cos 2x \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 3x \leqslant 0 \\ \cos 2x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

а) $\begin{cases} \sin 3x \geqslant 0 \\ \cos 2x \leqslant 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \pi + 2\pi k \geqslant 3x \geqslant 2\pi k \\ \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n \geqslant 2x \geqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}$;

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}k \geqslant x \geqslant \dfrac{2\pi}{3}k \\ \dfrac{3\pi}{4} + \pi n \geqslant x \geqslant \dfrac{\pi}{4} + \pi n \end{cases};$$

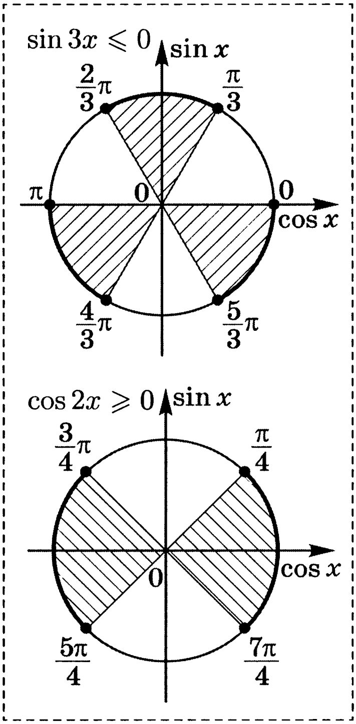


$\begin{cases} \sin 3x \geqslant 0 \\ \cos 2x \leqslant 0 \end{cases}$

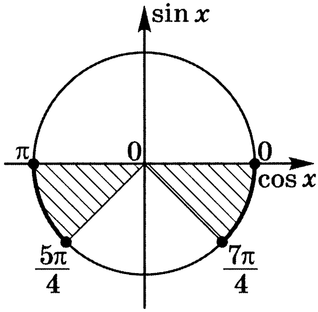


б) $\begin{cases} \sin 3x \leqslant 0 \\ \cos 2x \geqslant 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2\pi + 2\pi k \geqslant 3x \geqslant \pi + 2\pi k \\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \geqslant 2x \geqslant -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}$;

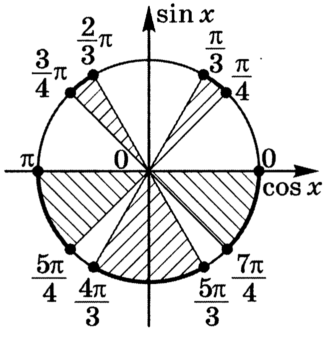
$$\begin{cases} \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}k \geqslant x \geqslant \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}k \\ \dfrac{\pi}{4} + \pi n \geqslant x \geqslant -\dfrac{\pi}{4} + \pi n \end{cases};$$



$$\begin{cases} \sin 3x \leqslant 0 \\ \cos 2x \geqslant 0 \end{cases}$$



Объединяем две серии решений, получая серию из пяти отрезков:



Ответ: $\left\{ \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]; \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right];\right.$

$\left[\pi + 2\pi t; \frac{5\pi}{4} + 2\pi t\right]; \left[\frac{4\pi}{3} + 2\pi m; \frac{5\pi}{3} + 2\pi m\right];$

$\left.\left[\frac{7\pi}{4} + 2\pi l; 2\pi + 2\pi l\right] \mid k, n, t, m, l \in \mathbb{Z} \right\}.$

Решение карточки 15

1. Вычислите:

1) $\cos(2\alpha - \beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{5}{12}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{4}{3}$ при $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

$\cos(2\alpha - \beta) = \cos 2\alpha \cdot \cos\beta + \sin 2\alpha \cdot \sin\beta$; 4.4

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \left(-\frac{5}{12}\right)^2}{1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{12^2 - 5^2}{12^2 + 5^2} = \frac{119}{169};$$ 5.4

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)}{1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{-2 \cdot 5 \cdot 12}{12^2 + 5^2} = -\frac{120}{169};$$ 5.3

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} = \frac{3}{5}, \text{ так как } \cos\beta > 0 \ \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right);$$ 1.5

$$\sin\beta = \operatorname{tg}\beta \cdot \cos\beta; \quad \sin\beta = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}.$$

Итак,

$$\cos(2\alpha - \beta) = \frac{119}{169} \cdot \frac{3}{5} + \left(-\frac{120}{169}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{357 - 480}{169 \cdot 5} = \boxed{-\frac{123}{845}}.$$

2) $\cos\dfrac{2\pi}{5} - \cos\dfrac{\pi}{5}$. 5.2 6.1

Так как $\sin\dfrac{\pi}{5} = \sin 36^\circ = \cos 54^\circ$, то 3.6

$2\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ$. 5.1 6.2

Так как $\cos 18^\circ \neq 0$, то $2\sin 18^\circ = 4\cos^2 18^\circ - 3$, т. е.

$2\sin 18^\circ = 4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3$; $\quad 4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0$;

$$\sin 18^\circ = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Так как $\sin 18^\circ > 0$, то подходит корень

$$\sin 18^\circ = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

а) $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$;

5.2 б) $\cos\frac{\pi}{5} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{10} = 1 - 2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 =$

$= \frac{16 - 2\cdot\left(5 - 2\sqrt{5}+1\right)}{16} = \frac{16 - 12 + 4\sqrt{5}}{16} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$;

5.2 в) $\cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1 = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 - 1 =$

$= \frac{5 + 2\sqrt{5} + 1 - 8}{8} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$;

г) $\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \boxed{-\frac{1}{2}}$.

2. Докажите тождества:

1) $$\frac{\sin\alpha + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

$$\text{L} = \frac{\sin\alpha + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

4.2
4.4
$$= \frac{\sin\alpha + 2\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\alpha - 2\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\alpha}{2\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\alpha + 2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{L} = \dfrac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha} \\ \Pi = \dfrac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha} \end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi.$$

2) *$8\operatorname{ctg} 24\alpha + 4\operatorname{tg} 12\alpha + 2\operatorname{tg} 6\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{ctg} 3\alpha$.*

Преобразуем левую часть равенства, разбивая ее на слагаемые.

а) $2\operatorname{ctg} 24\alpha + \operatorname{tg} 12\alpha = \dfrac{2\cos 24\alpha}{\sin 24\alpha} + \dfrac{\sin 12\alpha}{\cos 12\alpha} =$

$= \dfrac{2\cos 24\alpha \cdot \cos 12\alpha + \sin 12\alpha \cdot \sin 24\alpha}{\sin 24\alpha \cdot \cos 12\alpha} =$

(так как $\cos 24\alpha \cdot \cos 12\alpha + \sin 12\alpha \cdot \sin 24\alpha = \cos 12\alpha$) 4.4

$= \dfrac{\cos 24\alpha \cdot \cos 12\alpha + \cos 12\alpha}{\sin 24\alpha \cdot \cos 12\alpha} = \dfrac{\cos 24\alpha + 1}{\sin 24\alpha} = \operatorname{ctg} 12\alpha.$ 5.10

Следовательно,

$8\operatorname{ctg} 24\alpha + 4\operatorname{tg} 12\alpha = 4(2\operatorname{ctg} 24\alpha + \operatorname{tg} 12\alpha) = 4\operatorname{ctg} 12\alpha.$

б) Аналогично

$2\operatorname{ctg} 12\alpha + \operatorname{tg} 6\alpha = \dfrac{2\cos 12\alpha}{\sin 12\alpha} + \dfrac{\sin 6\alpha}{\cos 6\alpha} =$

$= \dfrac{2\cos 12\alpha \cdot \cos 6\alpha + \sin 6\alpha \cdot \sin 12\alpha}{\sin 12\alpha \cdot \cos 6\alpha} =$ 4.4

$= \dfrac{\cos 12\alpha \cdot \cos 6\alpha + \cos 6\alpha}{\sin 12\alpha \cdot \cos 6\alpha} = \dfrac{\cos 12\alpha + 1}{\sin 12\alpha} = \operatorname{ctg} 6\alpha.$ 5.10

Следовательно, $4\operatorname{ctg} 12\alpha + 2\operatorname{tg} 6\alpha = 2\operatorname{ctg} 6\alpha$.

в) Точно так же $2\operatorname{ctg} 6\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{2\cos 6\alpha}{\sin 6\alpha} + \dfrac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} =$

$= \dfrac{2\cos 6\alpha \cdot \cos 3\alpha + \sin 3\alpha \cdot \sin 6\alpha}{\sin 6\alpha \cdot \cos 3\alpha} =$ 4.4

$= \dfrac{\cos 6\alpha + 1}{\sin 6\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha.$ 5.10

Итак, $\left.\begin{array}{l} \text{Л} = \operatorname{ctg} 3\alpha \\ \text{П} = \operatorname{ctg} 3\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \text{Л} = \text{П}.$

3. Решите уравнения:

1) $\operatorname{ctg} \dfrac{x}{4} = \operatorname{ctg} 5x.$

Так как $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$, то $\dfrac{\sin\left(5x - \frac{x}{4}\right)}{\sin 5x \cdot \sin \frac{x}{4}} = 0;$ 7.6

2.2
$$\begin{cases} \sin 4\dfrac{3}{4}x = 0 \\ \sin 5x \neq 0 \\ \sin\dfrac{x}{4} \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{19x}{4} = \pi k \\ 5x \neq \pi n \\ \dfrac{x}{4} \neq \pi t \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \dfrac{4\pi}{19}k \\ x \neq \dfrac{\pi}{5}n \\ x \neq 4\pi t \end{cases} \;\Big|\, k, n, t \in \mathbb{Z};$$

тогда $x = \dfrac{4\pi}{19}k$, где k не кратно 19 ($k \not\vdots\, 19$).

Ответ: $\left\{\dfrac{4\pi}{19}k \,\middle|\, k \not\vdots\, 19 \text{ и } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3.6 2) $\sin 6x = \cos 4x$ при $0 < x < 90°$.

7.4 $\sin 6x - \sin(90° - 4x) = 0;$

$$2\sin\frac{6x - 90° + 4x}{2} \cdot \cos\frac{6x + 90° - 4x}{2} = 0;$$

2.1
2.2
$$\left[\begin{array}{l} \sin(5x - 45°) = 0 \\ \cos(x + 45°) = 0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 9° + 36°k \\ x = 45° + 180°n \end{array}\right..$$

Произведем отбор корней, чтобы $0 < x < 90°$. Придавая k и n соответствующие целые значения, получим: $x_1 = 9°$, $x_2 = 45°$, $x_3 = 81°$.

Ответ: $\{9°; 45°; 81°\}$.

3.6 3) $\sin(x - 45°) = \cos(3x - 180°)$ при $0 < x < 180°$.

$\sin(x - 45°) = \sin(90° - 3x + 180°);$

7.4 $\sin(x - 45°) - \sin(270° - 3x) = 0;$

$$2\sin\frac{x - 45° - 270° + 3x}{2} \cdot \cos\frac{x - 45° + 270° - 3x}{2} = 0;$$

2.1
2.2
$$\left[\begin{array}{l} \sin(2x - 157°30') = 0 \\ \cos(x - 112°30') = 0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 2x - 157°30' = 180°k \\ x - 112°30' = 90° + 180°n \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 78°45' + 90°k \\ x = 202°30' + 180°n \end{array}\right. \;|\, k, n \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая условие $0 < x < 180°$:

$x_1 = 78°45'$, $x_2 = 168°45'$, $x_3 = 22°30'$.

Ответ: $\{22°30'; 78°45'; 168°45'\}$.

4) $\cos 3x - \cos 7x = \sin 5x$. **7.2**

$$2\sin\frac{3x+7x}{2}\cdot\sin\frac{7x-3x}{2} = \sin 5x;$$

$$2\sin 5x\cdot\sin 2x - \sin 5x = 0;$$

$$\left[\begin{aligned}&\sin 5x = 0\\ &\sin 2x = \frac{1}{2}\end{aligned}\right.;\quad \left[\begin{aligned}&5x = \pi k\\ &2x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n\end{aligned}\right..$$ **2.2**

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{5}k; (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

5) $\cos(20^\circ + x) + \cos(100^\circ - x) = \frac{1}{2}$. **7.1**

$$2\cos\frac{20^\circ + x + 100^\circ - x}{2}\cdot\cos\frac{20^\circ + x - 100^\circ + x}{2} = \frac{1}{2};$$

$$2\cos 60^\circ\cdot\cos(x - 40^\circ) = \frac{1}{2};\quad \cos(x - 40^\circ) = \frac{1}{2};$$ **2.1**

$$x - 40^\circ = \pm 60^\circ + 360^\circ k.$$

Ответ: $\{40^\circ \pm 60^\circ + 360^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

6) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$. **5.7**

$$\frac{1 + \cos 2x + 1 + \cos 4x}{2} = \frac{1 + \cos 6x + 1 + \cos 8x}{2};$$

$$\cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x;$$ **7.1**

$$2\cos x\cdot\cos 3x - 2\cos 7x\cdot\cos x = 0;$$

$$2\cos x(\cos 3x - \cos 7x) = 0;\quad 4\cos x\cdot\sin 5x\cdot\sin 2x = 0;$$ **7.2**

$$\left[\begin{aligned}&\cos x = 0\\ &\sin 2x = 0\\ &\sin 5x = 0\end{aligned}\right.;\quad \left[\begin{aligned}&x = \frac{\pi}{2} + \pi n\\ &2x = \pi t\\ &5x = \pi k\end{aligned}\right.;\quad \left[\begin{aligned}&x = \frac{\pi}{2}n\\ &x = \frac{\pi}{5}k\end{aligned}\right..$$ **2.1** **2.2**

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{5}k; \frac{\pi}{2}n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

5.1 7) $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \dfrac{1}{4}\sin 4x.$

7.8 $\sin 2x \cdot \sin x \cdot \sin 3x - \dfrac{1}{2}\sin 2x \cdot \cos 2x = 0;$

$$\sin 2x\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) = 0;$$

2.1 2.2 $\sin 2x \cdot \cos 4x = 0;$

$$\left[\begin{aligned} &\sin 2x = 0\\ &\cos 4x = 0\end{aligned}\right.;\qquad \left[\begin{aligned} &2x = \pi k\\ &4x = \frac{\pi}{2} + \pi n\end{aligned}\right.;\qquad \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{2}k\\ &x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n\end{aligned}\right..$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2}k; \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{4}n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

7.1 5.1 8) $\cos 3x + \cos 2x = \sin 5x.$

$2\cos 2{,}5x \cdot \cos 0{,}5x = 2\sin 2{,}5x \cdot \cos 2{,}5x;$

$2\cos 2{,}5x \cdot (\cos 0{,}5x - \sin 2{,}5x) = 0;$

2.1 а) $\cos 2{,}5x = 0;\quad 2{,}5x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k;\quad x = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2\pi}{5}k.$

3.5 б) $\cos 0{,}5x - \sin 2{,}5x = 0;$

7.2 $\cos 0{,}5x - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2{,}5x\right) = 0;$

$$2\sin\frac{0{,}5x + \frac{\pi}{2} - 2{,}5x}{2} \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2} - 2{,}5x - 0{,}5x}{2} = 0;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - 1{,}5x\right) = 0;$$

2.2

$$\left[\begin{aligned} &\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0\\ &\sin\left(1{,}5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0\end{aligned}\right.;\qquad \left[\begin{aligned} &x - \frac{\pi}{4} = \pi t\\ &1{,}5x - \frac{\pi}{4} = \pi n\end{aligned}\right.;$$

$$\left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{4} + \pi t\\ &1{,}5x = \frac{\pi}{4} + \pi n\end{aligned}\right.;\qquad \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{4} + \pi t\\ &x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n\end{aligned}\right..$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \pi t; \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}n; \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2\pi}{5}k \mid k, n, t \in \mathbb{Z}\right\}.$

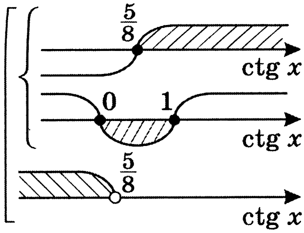
4. Решите неравенства:

1) $\sqrt{25 - 16\operatorname{ctg} x} \geqslant 8\operatorname{ctg} x - 5.$

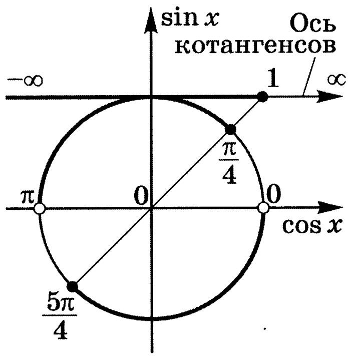
$$\sqrt{a} \geqslant b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \geqslant 0 \\ a \geqslant b^2 \end{cases} \\ \begin{cases} b < 0 \\ a \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 8\operatorname{ctg} x - 5 \geqslant 0 \\ 25 - 16\operatorname{ctg} x \geqslant 64\operatorname{ctg}^2 x - 80\operatorname{ctg} x + 25 \end{cases} \\ \begin{cases} 8\operatorname{ctg} x - 5 < 0 \\ 25 - 16\operatorname{ctg} x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \operatorname{ctg} x \geqslant \dfrac{5}{8} \\ \operatorname{ctg} x(\operatorname{ctg} x - 1) \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{ctg} x < \dfrac{5}{8} \\ \operatorname{ctg} x \leqslant \dfrac{25}{16} \end{cases} \end{array}\right.;$$



$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{5}{8} \leqslant \operatorname{ctg} x \leqslant 1 \\ \operatorname{ctg} x < \dfrac{5}{8} \end{array}\right.; \quad \operatorname{ctg} x \leqslant 1;$$

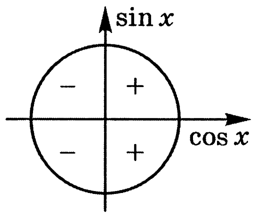


$$\pi + \pi k > x \geqslant \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

Ответ: $\left\{\left[\dfrac{\pi}{4} + \pi k; \pi + \pi k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

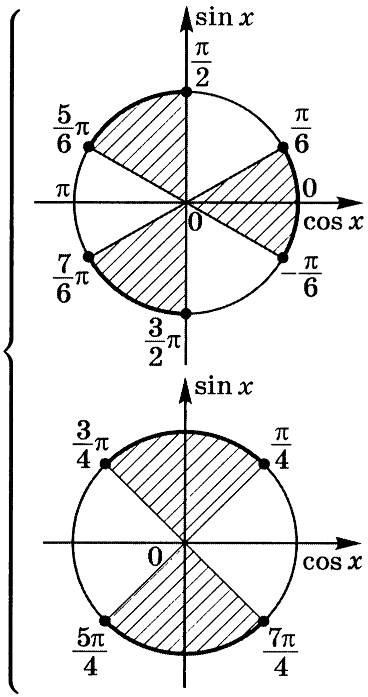
7.1 2) $\cos x + \cos 5x \leqslant 0.$

$2\cos 3x \cdot \cos 2x \leqslant 0;$



2.1 а) $\begin{cases} \cos 3x \geqslant 0 \\ \cos 2x \leqslant 0 \end{cases};$ $\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \geqslant 3x \geqslant -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi t \geqslant 2x \geqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi t \end{cases};$

$\begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}k \geqslant x \geqslant -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}k \\ \dfrac{3\pi}{4} + \pi t \geqslant x \geqslant \dfrac{\pi}{4} + \pi t \end{cases};$



$k = 0;\ \dfrac{\pi}{6} \geqslant x \geqslant -\dfrac{\pi}{6}$

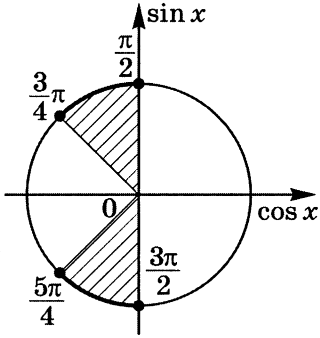
$k = 1;\ \dfrac{5\pi}{6} \geqslant x \geqslant \dfrac{\pi}{2}$

$k = 2;\ \dfrac{3\pi}{2} \geqslant x \geqslant \dfrac{7\pi}{6}$

$t = 0;\ \dfrac{3\pi}{4} \geqslant x \geqslant \dfrac{\pi}{4}$

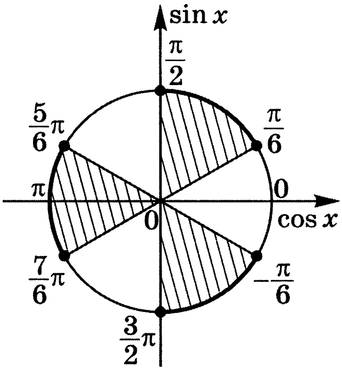
$t = 1;\ \dfrac{7\pi}{4} \geqslant x \geqslant \dfrac{5\pi}{4}$

Для $\begin{cases} \cos 3x \geqslant 0 \\ \cos 2x \leqslant 0 \end{cases}$
получаем серию
$\left[\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k\right] \cup$
$\cup \left[\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$,
где $k, n \in \mathbb{Z}$.



б) $\begin{cases} \cos 3x \leqslant 0 \\ \cos 2x \geqslant 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n \geqslant 3x \geqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi p \geqslant 2x \geqslant -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi p \end{cases}$; 2.1

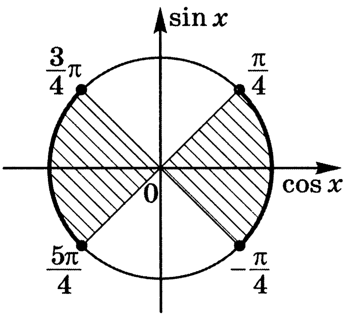
$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\pi}{3}n \geqslant x \geqslant \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}n \\ \dfrac{\pi}{4} + \pi p \geqslant x \geqslant -\dfrac{\pi}{4} + \pi p \end{cases}$;



$n = 0;\ \dfrac{\pi}{2} \geqslant x \geqslant \dfrac{\pi}{6}$

$n = 1;\ \dfrac{7\pi}{6} \geqslant x \geqslant \dfrac{5\pi}{6}$

$n = 2;\ \dfrac{11\pi}{6} \geqslant x \geqslant \dfrac{3\pi}{2}$



$p = 1;\ \dfrac{\pi}{4} \geqslant x \geqslant -\dfrac{\pi}{4}$

$p = 2;\ \dfrac{5\pi}{4} \geqslant x \geqslant \dfrac{3\pi}{4}$

Для $\begin{cases} \cos 3x \leqslant 0 \\ \cos 2x \geqslant 0 \end{cases}$

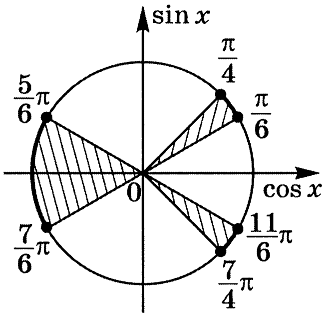
получаем серию

$\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi t; \frac{7\pi}{6}+2\pi t\right] \cup$

$\cup \left[\frac{\pi}{6}+2\pi l; \frac{\pi}{4}+2\pi l\right] \cup$

$\cup \left[\frac{7\pi}{4}+2\pi p; \frac{11\pi}{6}+2\pi p\right],$

где $t, l, p \in \mathbb{Z}$



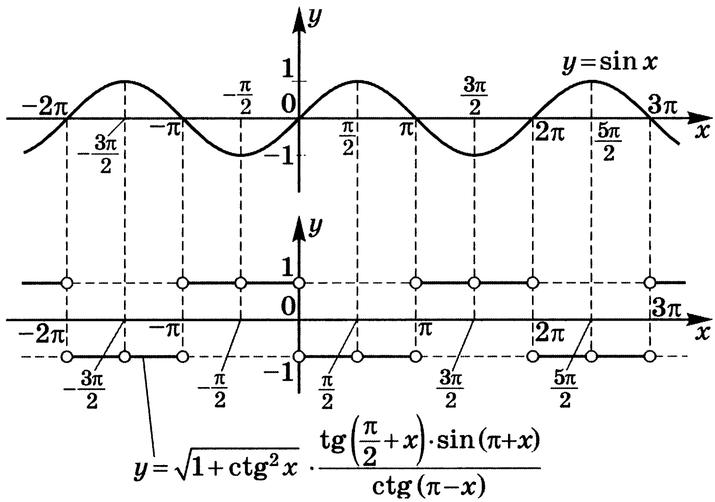
$$\text{Ответ: } \left\{ \left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right]; \left[\frac{5\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]; \right.$$
$$\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi t; \frac{7\pi}{6}+2\pi t\right]; \left[\frac{\pi}{6}+2\pi l; \frac{\pi}{4}+2\pi l\right];$$
$$\left. \left[\frac{7\pi}{4}+2\pi p; \frac{11\pi}{6}+2\pi p\right] \mid k, n, t, l, p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

5. Постройте график

$$y(x) = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot \sin(\pi+x)}{\operatorname{ctg}(\pi-x)}.$$

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \frac{-\operatorname{ctg} x \cdot (-\sin x)}{-\operatorname{ctg} x}; \quad \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{1}{|\sin x|} \cdot (-\sin x); \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1 \\ x \neq \frac{\pi}{2}k \\ \sin x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1 \\ x \neq \frac{\pi}{2}k \\ \sin x < 0 \end{cases} \end{array} \right. .$$


y
y = sin x
1
0
−1
−2π
−3π/2
−π
−π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
x
y
1
0
−1
−2π
−π
π
2π
3π
x
−3π/2
−π/2
π/2
3π/2
5π/2
$y=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\sin(\pi+x)}{\operatorname{ctg}(\pi-x)}$

Решение карточки 16

1. Найдите: $2\alpha+\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha=-2$, $\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{1}{7}$ при $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$.

4.3 $\cos(2\alpha+\beta)=\cos 2\alpha\cdot\cos\beta-\sin 2\alpha\cdot\sin\beta;$

5.4 $\cos 2\alpha=\dfrac{1-(-2)^2}{1+(-2)^2}=-\dfrac{3}{5};$

5.3 $\sin 2\alpha=\dfrac{2\cdot(-2)}{1+(-2)^2}=-\dfrac{4}{5};$

1.3 $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{7}\right)^2}}=\dfrac{7}{10}\cdot\sqrt{2}\ \ (\sin\beta>0);$

$$\cos\beta=\sin\beta\cdot\operatorname{ctg}\beta;\quad \cos\beta=\frac{7}{10}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{7}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Значит,

$$\cos(2\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{10}-\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{7}{10}\cdot\sqrt{2}=$$

2.1 $=\dfrac{28-3}{50}\cdot\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

$$2\alpha+\beta=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}.$$

Учитывая, что $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, имеем

$$\pi<2\alpha+\beta<2{,}5\pi;\quad \pi<\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k<2{,}5\pi;$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1{,}75\pi\in(\pi;2{,}5\pi)\\ x=2{,}25\pi\in(\pi;2{,}5\pi)\end{array}\right..$$

Ответ: $2\alpha+\beta\in\{1{,}75\pi;2{,}25\pi\}$.

2. Вычислите $\operatorname{ctg} 70^\circ + 4\cos 70^\circ =$

$$= \frac{\cos 70^\circ}{\sin 70^\circ} + 4\cos 70^\circ = \frac{\cos 70^\circ + 4\cos 70^\circ \cdot \sin 70^\circ}{\sin 70^\circ} =$$ 5.1

$$= \frac{\cos 70^\circ + 2\sin 140^\circ}{\sin 70^\circ} = \frac{\cos 70^\circ + 2\cos 50^\circ}{\sin 70^\circ} =$$ 3.3 3.6

$$= \frac{\cos 70^\circ + \cos 50^\circ + \cos 50^\circ}{\cos 20^\circ} =$$ 7.1

$$= \frac{2\cos 60^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 50^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \cos 50^\circ}{\cos 20^\circ} =$$ 7.1

$$= \frac{2\cos 30^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \boxed{\sqrt{3}}.$$ 7.1

3. Докажите:

1) $$\frac{(1 + \operatorname{tg} 2\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right).$$

$$\mathrm{L} = \frac{(1 + \operatorname{tg} 2\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)}{1 - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}} =$$

$$= \frac{(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha} =$$ 7.10 7.11

$$= \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right).$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \\ \Pi = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

2) $4\sin^3\alpha\cdot\cos 3\alpha + 4\cos^3\alpha\cdot\sin 3\alpha = 2{,}4$,

если $\cos 4\alpha = \dfrac{3}{5}$ при $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$.

$\mathrm{L} = 4\sin^3\alpha\cdot\cos 3\alpha + 4\cos^3\alpha\cdot\sin 3\alpha =$

4.1 $= 4\sin^3\alpha\cdot\cos(2\alpha+\alpha) + 4\cos^3\alpha\cdot\sin(2\alpha+\alpha) =$

4.3 $= 4\sin^3\alpha\cdot(\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha - \sin 2\alpha\cdot\sin\alpha)+$

$+ 4\cos^3\alpha\cdot(\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha + \cos 2\alpha\cdot\sin\alpha) =$

$= 4\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha - 4\sin^4\alpha\cdot\sin 2\alpha+$

$+ 4\cos^4\alpha\cdot\sin 2\alpha + 4\cos^3\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha =$

$= 2\sin^2\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha + 4\sin 2\alpha\cdot(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha)+$

$+ 2\cos^2\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha =$

$= \sin^2\alpha\cdot\sin 4\alpha + 4\sin 2\alpha\cdot(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)+$

$+ \cos^2\alpha\cdot\sin 4\alpha =$

$= \sin 4\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + 4\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha =$

$= \sin 4\alpha + 2\sin 4\alpha = 3\sin 4\alpha$.

Так как $\cos 4\alpha = \dfrac{3}{5}$, то

$$\sin 4\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}\ (0 < 4\alpha < \pi),$$

тогда $3\sin 4\alpha = 3\cdot\dfrac{4}{5} = 2{,}4$. Значит,

$\mathrm{L} = 4\sin^3\alpha\cdot\cos 3\alpha + 4\cos^3\alpha\cdot\sin 3\alpha = 2{,}4$;

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L} = 2{,}4\\ \Pi = 2{,}4\end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

4. Решите уравнения:

7.2 1) $\cos(170^\circ + x) - \cos(50^\circ + x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, если $-180^\circ < x < 90^\circ$.

$$2\sin\frac{170^\circ + x + 50^\circ + x}{2}\cdot\sin\frac{50^\circ + x - 170^\circ - x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

2.2 $2\sin(x + 110^\circ)\cdot\sin(-60^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad\sin(x + 110^\circ) = -\dfrac{1}{2}$;

$x + 110° = (-1)^k \cdot (-30°) + 180°k;$

$x = (-1)^{k+1} \cdot 30° - 110° + 180°k.$

Условию $x \in (-180°; 90°)$ удовлетворяет только $k = 0$;

$x = -30° - 110° = -140° \in (-180°; 90°).$

Ответ: $x = -140°$.

2) $\sin x \cdot \sin 3x + \sin 4x \cdot \sin 8x = 0.$ 7.8

$\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) + \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 12x) = 0;$

$\cos 2x - \cos 12x = 0; \quad 2\sin 7x \cdot \sin 5x = 0;$ 7.2

$$\left[\begin{array}{l} \sin 7x = 0 \\ \sin 5x = 0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 7x = \pi k \\ 5x = \pi n \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{7}k \\ x = \frac{\pi}{5}n \end{array}\right..$$ 2.2

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{7}k; \frac{\pi}{5}n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

3) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{3}.$

$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) = \sqrt{3};$

$\cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos 2x + \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$ 4.4 2.1

$2x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \quad x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{12} + \pi k.$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{12} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

4) $\sin 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x.$

$\sin 7x - \sin x + \cos^2 2x - \sin^2 2x = 0;$ 7.4 5.2

$2\sin 3x \cdot \cos 4x + \cos 4x = 0; \quad 2\cos 4x\left(\sin 3x + \frac{1}{2}\right) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \sin 3x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 3x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n \end{array}\right.;$$ 2.1 2.2

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{4}k \\ x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi}{3}n \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{4}k; (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi}{3}n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

5.1 5) $3 + 2\sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

$$3 + 4\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$3 + 4\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}.$$

Обозначим $t = \sin x \cdot \cos x$. Получаем $3 + 4t = \dfrac{1}{t}$;

$4t^2 + 3t - 1 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \sin x \cdot \cos x = -1 \\ \sin x \cdot \cos x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$, т. е.

2.2 $\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\sin 2x = -1 \\ \dfrac{1}{2}\sin 2x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \sin 2x = -2 \notin [-1; 1] \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$;

$$2x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k; \quad x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k.$$

Ответ: $\left\{(-1)^k\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

6) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \dfrac{1}{16}$.

Пусть $x = \pi k$ (тогда $\sin \pi k = 0$).

Легко убедиться, что такой x — не корень:

$\cos(\pi k) \cdot \cos(2\pi k) \cdot \cos(4\pi k) \cdot \cos(8\pi k) = \pm 1$, и $\pm 1 \neq \dfrac{1}{16}$.

Можно домножить обе части уравнения на $\sin x$:

5.1 $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \dfrac{1}{16}\sin x$;

$$\frac{1}{2}\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x=\frac{1}{16}\sin x;$$ **5.1**

$$\frac{1}{4}\sin 4x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x=\frac{1}{16}\sin x;$$ **5.1**

$$\frac{1}{8}\sin 8x\cdot\cos 8x=\frac{1}{16}\sin x;\quad \frac{1}{16}\sin 16x=\frac{1}{16}\sin x;$$ **5.1**

$$\sin 16x-\sin x=0;\quad 2\sin 7{,}5x\cdot\cos 8{,}5x=0;$$ **7.4**

$$\left[\begin{array}{l}\sin 7{,}5x=0\\ \cos 8{,}5x=0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}7{,}5x=\pi k\\ 8{,}5x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right.;$$ **2.1** **2.2**

$$\left[\begin{array}{ll}x=\dfrac{2\pi}{15}k & (k\not\vdots\, 15)\\ x=\dfrac{\pi}{17}+\dfrac{2\pi}{17}n & \left(\dfrac{1}{17}+\dfrac{2}{17}n\notin\mathbb{Z}\right)\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\dfrac{2\pi}{15}k;\ \dfrac{\pi}{17}+\dfrac{2\pi}{17}n\ \middle|\ k,n\in\mathbb{Z},\ k\not\vdots\, 15,\ \dfrac{1}{17}+\dfrac{2}{17}n\notin\mathbb{Z}\right\}$.

7) $\sin^6 x+\cos^6 x=\dfrac{15}{16}+\cos 2x$ при $0{,}5\pi\leqslant x\leqslant 1{,}5\pi$.

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3=$$
$$\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^4 x\right)=$$
$$=1\cdot\left(\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x-\sin^2 x\cdot\cos^2 x\right)=$$
$$=1-3\sin^2 x\cdot\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x,\ \text{тогда}$$ **5.1**

$$1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{15}{16}+\cos 2x;\quad 1-\frac{3}{4}\left(1-\cos^2 2x\right)=\frac{15}{16}+\cos 2x;$$

$$\frac{3}{4}\cos^2 2x-\cos 2x-\frac{11}{16}=0;\quad 12\cos^2 2x-16\cos 2x-11=0;$$

$$(\cos 2x)_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64+132}}{12}=\frac{8\pm 14}{12};$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x=\dfrac{11}{6}\notin[-1;1]\\ \cos 2x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.;\quad 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\quad x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k.$$ **2.1**

По условию $\frac{\pi}{2} \leqslant \pm\frac{\pi}{3} + \pi k \leqslant 1{,}5\pi$;

при $k = 1$ $\quad x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $\; x_1 = 1\frac{1}{3}\pi$.

При других значениях k $\quad x \notin \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: $x \in \left\{\frac{2\pi}{3}; 1\frac{1}{3}\pi\right\}$.

8) $\arcsin(\cos(2\operatorname{arcctg} x)) = 0$.

$\cos(2\operatorname{arcctg} x) = 0 \quad (\arcsin 0 = 0)$;

$2\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} + \pi k$,

$$\begin{array}{l} 0 \leqslant \operatorname{arcctg} x \leqslant \pi \\ 0 \leqslant 2\operatorname{arcctg} x \leqslant 2\pi \end{array}, \text{ тогда}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \\ 2\operatorname{arcctg} x = \frac{3\pi}{2} \end{array}\right.;$$

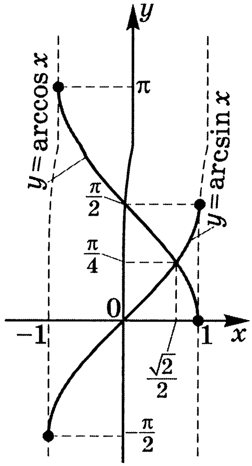
$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{arcctg} x = \frac{3\pi}{4} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = 1 & \left(\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}\right) \\ x = -1 & \left(\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}\right) \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-1; 1\}$.

5. Решите неравенства:

1) $\arcsin x < \arccos x$.



Решим неравенство графически, представив на одном графике обе функции:

Из чертежа следует, что

$\arcsin x < \arccos x$,

если $x \in \left[-1; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ответ: $\left[-1; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2) $\arcsin \dfrac{2x^2 - 9x + 8}{2} < \dfrac{\pi}{6}$.

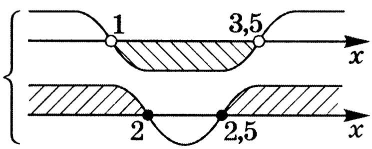
$D(\text{Н}):\ \left|\dfrac{2x^2 - 9x + 8}{2}\right| \leqslant 1.$

Так как $y(x) = \sin x$ возрастает на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, то

$$\sin\left(\arcsin \frac{2x^2 - 9x + 8}{x}\right) < \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 9x + 8}{2} < \dfrac{1}{2} \\ -1 \leqslant \dfrac{2x^2 - 9x + 8}{2} \leqslant 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 9x + 8 < 1 \\ 2x^2 - 9x + 8 \geqslant -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^2 - 9x + 7 < 0 \\ 2x^2 - 9x + 10 \geqslant 0 \end{cases}$$

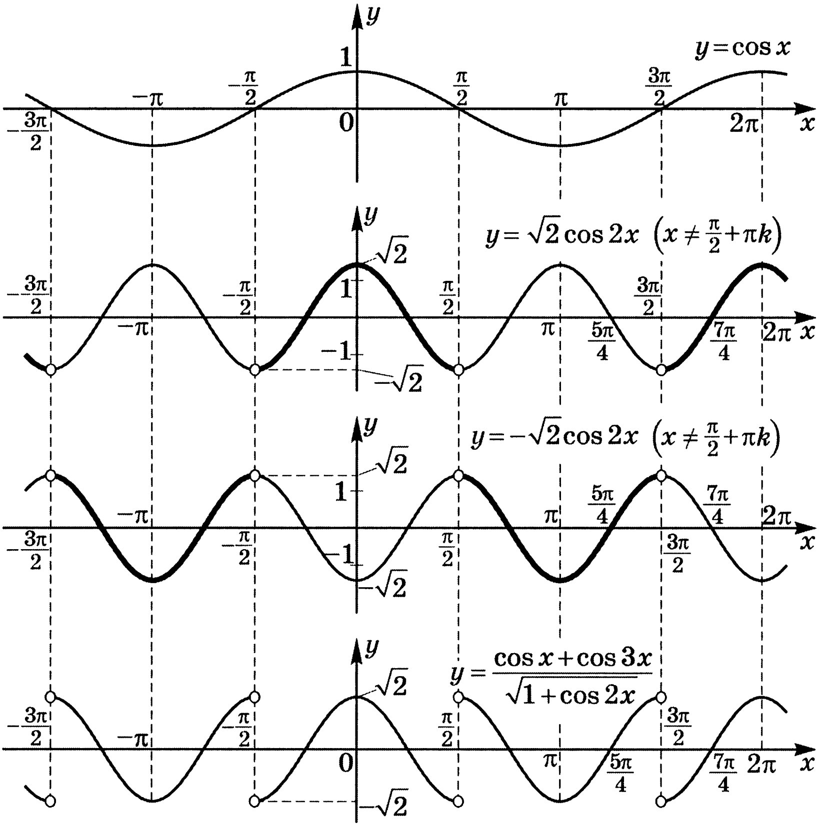


Ответ: $(1; 2] \cup [2{,}5; 3{,}5)$.

6. Постройте график $y(x) = \dfrac{\cos x + \cos 3x}{\sqrt{1 + \cos 2x}}$.

7.1 Так как $\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x \cdot \cos x$ и
$\sqrt{1 + \cos 2x} = \sqrt{2\cos^2 x} = \sqrt{2}|\cos x|$, тогда
$D(y)$: $\cos x \neq 0$;

$$y = \frac{2\cos 2x \cdot \cos x}{\sqrt{2}|\cos x|} = \begin{cases} \sqrt{2}\cos 2x, & \cos x > 0 \\ -\sqrt{2}\cos 2x, & \cos x < 0 \end{cases}.$$



9

Итоговые карточки

Карточка 1

1. Вычислите:

1) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{3}{4}$, $\quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

2) $\sin 10^\circ + \sin 30^\circ + \sin 50^\circ - \dfrac{1}{4\sin 10^\circ}$.

2. Упростите $\dfrac{2\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\sin 2\varphi}{2\sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{5}\right)\cdot\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{10}\right) + \sin\frac{7\pi}{10}}$.

3. Решите уравнения:

1) $\dfrac{4}{1-\sin x} - \dfrac{1}{1+\sin x} = 2\operatorname{tg}^2 x$;

2) $(1+\cos 4x)\cdot\sin(\pi - 3x) = \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$;

3) $\arcsin 2x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$.

4. Докажите $\cos(\beta+19^\circ)\cdot\sin(\beta+1^\circ) < \sin(106^\circ+\beta)\cdot\sin(\beta+4^\circ)$.

5. Решите неравенство $2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos 2x>0$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

7. Постройте график $y=\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\sqrt{2(1+\cos 2x)}}$.

Карточка 2

1. Вычислите:

1) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{12}$ при $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$;

2) $\dfrac{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\frac{5\pi}{6}}{2\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos 2\alpha}$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{11}$.

2. Докажите:

1) $\cos 5^\circ + \cos 15^\circ + \cos 25^\circ - \dfrac{1}{4\sin 5^\circ} = 0$;

2) $\cos(\alpha - 9^\circ)\cdot\cos(\alpha - 45^\circ) > \sin(\alpha + 40^\circ)\cdot\cos(\alpha - 4^\circ)$.

3. Решите уравнения:

1) $\dfrac{2}{1-\operatorname{tg}x} + \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}x} = \dfrac{2\cos^2 x}{\cos 2x}$;

2) $1 + \sin x + \sin 3x + \cos(\pi + 4x) = 0$;

3) $2\arcsin x = \arccos 2x$.

4. Решите неравенство $\sin x + \cos x > \sqrt{2}\cos 3x$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sin x + \dfrac{1}{\cos y} = 2 \\ \dfrac{\sin x}{\cos y} = 0{,}5 \end{cases}$.

6. Постройте график $y = \dfrac{\cos x - \cos 3x}{\sqrt{2(1-\cos 2x)}}$.

Карточка 3

1. Докажите:

1) $\cos 6° \cdot \cos 66° \cdot \cos 42° \cdot \cos 78° = \dfrac{1}{16}$;

2) $\dfrac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} = \operatorname{ctg} \dfrac{15\alpha}{2}$;

3) $\operatorname{arcctg} \dfrac{1}{7} + 2 \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{3} = \dfrac{5\pi}{4}$;

4) $\dfrac{1}{\sin^4 \alpha} + \dfrac{1}{\cos^4 \alpha} \geqslant 8$.

2. Решите уравнения:

1) $\dfrac{7}{4} \cos \dfrac{x}{4} = \cos^3 \dfrac{x}{4} + \sin \dfrac{x}{2}$;

2) $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \dfrac{29}{64}$;

3) $\cos(5x + 516°) - \cos(3x + 172°) = \cos(4x + 254°)$.

3. Решите неравенство $8 \sin^2 \dfrac{x}{2} + 3 \sin x - 4 > 0$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \cos x - \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

5. Постройте график $y = 2|\sin x| \cdot \cos x$.

Карточка 4

1. Вычислите $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, если $\sin\alpha+\sin\beta=-\dfrac{27}{65}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{7}{9}$ при $2{,}5\pi<\alpha<3\pi$ и $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$.

2. Найдите $A(\alpha)=\dfrac{\sin 4\alpha+\sin 10\alpha-\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha+1-2\sin^2 4\alpha}$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=m$.

3. Докажите:

1) $\operatorname{tg}^6 20^\circ-33\operatorname{tg}^4 20^\circ+27\operatorname{tg}^2 20^\circ=3$;

2) $\arcsin\dfrac{4}{5}+\arcsin\dfrac{12}{13}+\arcsin\dfrac{56}{65}=\pi$;

3) $\dfrac{\sin\alpha-1}{\sin\alpha-2}+\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{2-\sin\alpha}{3-\sin\alpha}$.

4. Решите уравнения:

1) $1+\cos 2x\cdot\cos 3x=\dfrac{1}{2}\sin^2 3x$;

2) $2\sin^2\dfrac{\pi x}{2}\cdot\sin^2\dfrac{\pi x}{4}=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

5. Решите неравенство $\dfrac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}\geqslant 3\operatorname{tg}x$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sin^2 x=\sin y\\ \cos^4 x=\cos y\end{cases}$.

7. Постройте график $y=2\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|\cdot\sin\dfrac{x}{2}$.

Карточка 5

1. Вычислите $\operatorname{tg} 2\beta$, $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$, если $\sin\beta = -\dfrac{60}{61}$ при $\beta \in [1{,}5\pi; 2\pi]$.

2. Упростите $\dfrac{4\sin^2(45^\circ+\alpha)\cdot\sin 10^\circ - 1 + 4\sin 10^\circ\cdot\sin 70^\circ}{4\sin 10^\circ\cdot\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)\cdot\cos^2(45^\circ+\alpha)}$.

3. Докажите:

1) $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \dfrac{1}{2}$;

2) $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$, если $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Решите уравнения:

1) $\cos x\cdot\cos 2x = \cos 3x$;

2) $3\cos 2x + 4\sin 2x + 5 = \sin^2 x$;

3) $\arccos x = \operatorname{arctg} x$.

5. Решите неравенство $\sqrt{5-2\sin x} \geqslant 6\sin x - 1$, если $x \in [0; \pi]$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x\cdot\sin y = 0{,}75 \\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y = 3 \end{cases}$.

7. Постройте график $y = \operatorname{tg}\dfrac{x+|x|}{2}\cdot\sin 2x$.

Карточка 6

1. Вычислите $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ$.

2. Найдите $\alpha + 2\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{7}$, $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ при $\alpha, \beta \in \mathrm{I}$.

3. Упростите $A(\alpha) = \dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^4\alpha}$.

4. Докажите $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} < 2$ для $\forall\alpha \in D(\mathrm{H})$.

5. Решите уравнения:

   1) $39 + 7\sin^2 x + 12\sin 2x = 33\cos x + 44\sin x$;

   2) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \dfrac{1}{8}$;

   3) $\arcsin(x^2 - 2x + 2) = \dfrac{\pi}{2}x$.

6. Решите неравенство $3\cos^2 x \cdot \sin x - \sin^2 x < -1$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = \pi \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z = 2 \\ \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = 18 \end{cases}$.

8. Постройте график
$$y = \frac{2\sin^2(45^\circ + x)\cdot\sin 10^\circ - 1 + 4\sin 70^\circ \cdot \sin 10^\circ}{4\sin 10^\circ \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + x)\cdot\cos^2(45^\circ + x)}.$$

Карточка 7

1. Вычислите $\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{12}+\operatorname{tg}^2\dfrac{3\pi}{12}+\operatorname{tg}^2\dfrac{5\pi}{12}$.

2. Докажите:

1) $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\geqslant\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}$, где $\alpha,\beta\in\mathrm{I}$.

2) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\dfrac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\dfrac{12}{13}\right)=-\dfrac{119}{120}$.

3. Найдите $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, если $\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=-\dfrac{21}{65}\\ \cos\alpha+\cos\beta=-\dfrac{27}{65}\end{cases}$

при $2{,}5\pi<\alpha<3\pi$, $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$.

4. Решите уравнения:

1) $\dfrac{\cos^2 x(1+\operatorname{ctg}x)}{\sin x-\cos x}=3\cos x$;

2) $(1+2\cos 2x)\cdot\sin x+(1-2\cos 2x)\cdot\cos x=0$

при $\pi<\left|2x-\dfrac{\pi}{2}\right|\leqslant\dfrac{7\pi}{3}$;

3) $\sin^5 x-\cos^5 x=\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\sin x}$.

5. Решите неравенство $\dfrac{\sin 3x\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2x}\leqslant 0$ на $[0;2\pi]$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases}\operatorname{ctg}x+\sin 2y=\sin 2x\\ 2\sin y\cdot\sin(x+y)=\cos x\end{cases}$.

7. Постройте график $y=|\operatorname{tg}x|\cdot\sin 2x$.

Карточка 8

1. Упростите:

1) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \sqrt{2}\sin\alpha}$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}(60^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(60^\circ - \alpha)$.

2. Вычислите $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$.

3. Докажите $\cos 36^\circ > \operatorname{tg} 36^\circ$.

4. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg}(x - 15^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(x + 15^\circ) = \dfrac{1}{3}$;

2) $\arcsin\dfrac{x}{2} + \arccos\left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$;

3) $2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

5. Решите неравенство $4\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x > \sin 4x$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x - \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

7. Постройте график $y = \sqrt{1 - \sin 2x} + \sin x + \cos x$.

Карточка 9

1. Упростите $\dfrac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

2. Докажите тождества:

1) $\dfrac{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{ctg}^4\alpha$;

2) $\operatorname{tg}^2 36^\circ\cdot\operatorname{tg}^2 72^\circ=5$.

3. Решите уравнения:

1) $\dfrac{1+2\cos 2x}{2\cos x}=\operatorname{tg}^2 x-3$, если $0\leqslant x\leqslant 2\pi$;

2) $\operatorname{tg}(120^\circ+3x)-\operatorname{tg}(140^\circ-x)=2\sin(80^\circ+2x)$.

4. Докажите $\sin\dfrac{A}{2}\cdot\sin\dfrac{B}{2}\cdot\sin\dfrac{C}{2}\leqslant\dfrac{1}{8}$, если $A+B+C=180^\circ$.

5. Решите неравенства:

1) $\sin 4x+\cos 4x\cdot\operatorname{ctg} 2x>1$;

2) $\dfrac{\arccos(x^2-3x+2)}{8x^2-10x+3}>0$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sin^2 x=\cos x\cdot\cos y\\ \cos^2 x=\sin x\cdot\sin y\end{cases}$.

7. Постройте график $y=2|\sin x|\cdot\cos x+|\operatorname{tg} x|\cdot\operatorname{ctg} x$.

Карточка 10

1. Упростите:

1) $\operatorname{tg}(35^\circ+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(25^\circ-\alpha)-\dfrac{2\cos(10^\circ+2\alpha)-1}{2\cos(10^\circ+2\alpha)+1}$;

2) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(\alpha+60^\circ)\cdot\operatorname{tg}(\alpha-60^\circ)$.

2. Докажите:

1) $\sin^2\dfrac{\pi}{7}\cdot\sin^2\dfrac{2\pi}{7}\cdot\sin^2\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{7}{64}$;

2) $\operatorname{tg}n\alpha>n\operatorname{tg}\alpha$, если $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4(n-1)}$ при $\forall n\in\mathbb{N},\ \ n\neq 1$;

3) $\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}>1$, если $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

3. Решите уравнения:

1) $\cos\dfrac{4x}{3}=\cos^2 x$;

2) $\arcsin\dfrac{2}{3\sqrt{x}}-\arcsin\sqrt{1-x}=\arcsin\dfrac{1}{3}$.

4. Решите неравенство $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}3x>0$.

5. Решите систему $\begin{cases}\cos^2 y+3\sin x\cdot\sin y=0\\ 21\cos 2x-\cos 2y=10\end{cases}$.

6. Постройте график $y=\sin\dfrac{x-|x|}{2}\cdot\cos\dfrac{x+|x|}{2}+\operatorname{tg}x\cdot|\operatorname{ctg}x|$.

Решение карточки 1

1. Вычислите:

1) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{3}{4}$, $\quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

1.6 $$\cos\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}; \qquad \cos\alpha < 0;$$

$$\cos\alpha = \frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = -\frac{3}{5}.$$

5.7 Так как $45^\circ < \dfrac{\alpha}{2} < 90^\circ$ и $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$,

то $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$.

2) $\sin 10^\circ + \sin 30^\circ + \sin 50^\circ - \dfrac{1}{4\sin 10^\circ} =$

5.8 $$= \frac{4\sin^2 10^\circ + 4\cdot\frac{1}{2}\sin 10^\circ + 4\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ - 1}{4\sin 10^\circ} =$$

7.8 $$= \frac{2(1-\cos 20^\circ) + 2\sin 10^\circ + 2(\cos 40^\circ - \cos 60^\circ) - 1}{4\sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{2 - 2\cos 20^\circ + 2\sin 10^\circ + 2\cos 40^\circ - 1 - 1}{4\sin 10^\circ} =$$

7.2 $$= \frac{2\cos 40^\circ - 2\cos 20^\circ + 2\sin 10^\circ}{4\sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{-4\sin 30^\circ\cdot\sin 10^\circ + 2\sin 10^\circ}{4\sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{-2\sin 10^\circ + 2\sin 10^\circ}{4\sin 10^\circ} = \boxed{0}.$$

2. Упростите $\dfrac{2\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\sin 2\varphi}{2\sin\left(\varphi-\frac{2\pi}{5}\right)\cdot\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{10}\right)+\sin\frac{7\pi}{10}}=$ 4.4

$$=\frac{2\cos 2\varphi\cdot\cos\frac{\pi}{3}+2\sin 2\varphi\cdot\sin\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\sin 2\varphi}{\sin\left(\varphi-\frac{2\pi}{5}+\varphi-\frac{\pi}{10}\right)+\sin\left(\varphi-\frac{2\pi}{5}-\varphi+\frac{\pi}{10}\right)+\sin\frac{7\pi}{10}}=$$ 7.9

$$=\frac{\cos 2\varphi+\sqrt{3}\sin 2\varphi-\sqrt{3}\sin 2\varphi}{\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)+\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{10}\right)}=$$

$$=\frac{\cos 2\varphi}{-\cos 2\varphi-\sin\frac{3\pi}{10}+\sin\frac{3\pi}{10}}=\frac{\cos 2\varphi}{-\cos 2\varphi}=\boxed{-1}.$$

3. Решите уравнения:

1) $\dfrac{4}{1-\sin x}-\dfrac{1}{1+\sin x}=2\operatorname{tg}^2 x.$

$$D(У):\ \begin{cases}\sin x\neq 1\\ \sin x\neq -1\\ \cos x\neq 0\end{cases};\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k.$$

$$\frac{4(1+\sin x)-1+\sin x}{1-\sin^2 x}=\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x};$$

$$3+5\sin x=2\sin^2 x;\quad 2\sin^2 x-5\sin x-3=0;$$

$$(\sin x)_{1,2}=\frac{5\pm 7}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=3\notin E(\sin x)\\ \sin x=-\frac{1}{2}\in E(\sin x)\end{array}\right.;\quad x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k.$$ 2.2

Ответ: $\left\{(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

2) $(1+\cos 4x)\cdot\sin(\pi-3x)=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right).$ 3.18 3.6

$$(1+\cos 4x)\cdot\sin 3x=\cos^2 2x;\quad 2\cos^2 2x\cdot\sin 3x=\cos^2 2x;$$ 5.7

2.1 2.2
$$\left[\begin{array}{l}\cos^2 2x = 0\\ \sin 3x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k\\ 3x = (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k\\ x = (-1)^n\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi}{3}n\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k; (-1)^n\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi}{3}n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

3) $\arcsin 2x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$.

$$D(\text{У}): \left\{\begin{array}{l}|2x| \leqslant 1\\ |x| \leqslant 1\end{array}\right.; \quad |x| \leqslant \frac{1}{2};$$

4.3
$$\cos(\arcsin 2x + \arcsin x) = \cos\frac{\pi}{2};$$

$$\cos(\arcsin 2x) \cdot \cos(\arcsin x) -$$
$$- \sin(\arcsin 2x) \cdot \sin(\arcsin x) = 0;$$

так как $\arcsin m \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, то $\cos(\arcsin m) \geqslant 0$;

9.6
$$\cos(\arcsin 2x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin 2x)} = \sqrt{1 - 4x^2};$$

9.6
$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2};$$

9.1
$$\sin(\arcsin 2x) = 2x; \quad \sin(\arcsin x) = x;$$

$$\sqrt{1 - 4x^2} \cdot \sqrt{1 - x^2} - 2x^2 = 0;$$

$$(1 - 4x^2)(1 - x^2) = 4x^4;$$

$$5x^2 = 1; \quad x^2 = \frac{1}{5} \in D(\text{У}); \quad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\\ x = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\end{array}\right..$$

а) Проверим значение $x = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

$-\dfrac{\pi}{2} < \arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) < 0;\ -\dfrac{\pi}{2} < \arcsin\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) < 0.$

Сложим почленно:

$-\pi < \arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) + \arcsin\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) < 0$, но

должно быть $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) + \arcsin\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \dfrac{\pi}{2}$,

значит $x = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ — посторонний корень.

б) Проверкой можно убедиться, что $x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ — корень уравнения.

Ответ: $x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

4. Докажите:

$\cos(\beta + 19^\circ) \cdot \sin(\beta + 1^\circ) < \sin(106^\circ + \beta) \cdot \sin(\beta + 4^\circ) \Leftrightarrow$ **3.3**

$\Leftrightarrow \cos(\beta + 19^\circ) \cdot \sin(\beta + 1^\circ) < \cos(16^\circ + \beta) \cdot \sin(\beta + 4^\circ) \Leftrightarrow$ **7.9**

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\sin(\beta + 1^\circ + \beta + 19^\circ) + \sin(\beta + 1^\circ - \beta - 19^\circ)\right] <$$
$$< \frac{1}{2}\left[\sin(16^\circ + \beta + \beta + 4^\circ) + \sin(\beta + 4^\circ - 16^\circ - \beta)\right] \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sin(2\beta + 20^\circ) - \sin 18^\circ < \sin(2\beta + 20^\circ) - \sin 12^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 18^\circ > \sin 12^\circ$ — истинно,

так как $y = \sin x$ возрастает на $(0; 90^\circ)$.

Значит, предположение верно, и неравенство

$\cos(\beta + 19^\circ) \cdot \sin(\beta + 1^\circ) < \sin(106^\circ + \beta) \cdot \sin(\beta + 4^\circ)$ — истинно, что и требовалось доказать.

5. Решите неравенство $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos 2x>0$.

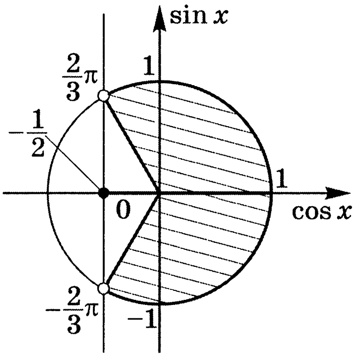
$$1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos 2x>0; \quad 1+\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x>0;$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x>-\frac{1}{2}; \quad \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)>-\frac{1}{2};$$

$$\frac{2\pi}{3}+2\pi k>2x-\frac{\pi}{6}>-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;$$

$$\frac{5\pi}{6}+2\pi k>2x>-\frac{\pi}{2}+2\pi k;$$

$$\frac{5\pi}{12}+\pi k>x>-\frac{\pi}{4}+\pi k.$$



Ответ: $\left\{\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{5\pi}{12}+\pi k\right) \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=\frac{1}{3}\end{cases}$.

$$\begin{cases}\sin x\cdot\sin y=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\\ \dfrac{\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}=\dfrac{1}{3} \quad (3\sin x\cdot\sin y=\cos x\cdot\cos y)\end{cases};$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} & ① + ② \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{3}{4\sqrt{2}} & ② - ① \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos(x-y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(x+y) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x - y = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k & \dfrac{1}{2}(① + ②) \\ x + y = \pm\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi n & \dfrac{1}{2}(② - ①) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{8} \pm \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \pi(k+n) \\ y = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \left(\pm\dfrac{\pi}{8}\right) + \pi(n-k) \end{cases}.$$

Расшифровывая, получим:

а) $$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x + y = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \pi(k+n) \\ y = \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\pi}{8} + \pi(n-k) \end{cases}.$$

б) $$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x + y = -\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi p \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \pi(k+p) \\ y = -\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \pi(p-k) \end{cases}.$$

в) $\begin{cases} x - y = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi t \\ x + y = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi n \end{cases}$;

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \pi(t+n) \\ y = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \pi(n-t) \end{cases}.$$

г) $\begin{cases} x - y = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi t \\ x + y = -\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi p \end{cases}$;

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \pi(p+t) \\ y = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \pi(p-t) \end{cases}.$$

Ответ:

$$\left\{\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(k+n); \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{8} + \pi(n-k)\right);\right.$$

$$\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(k+p); -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(p-k)\right);$$

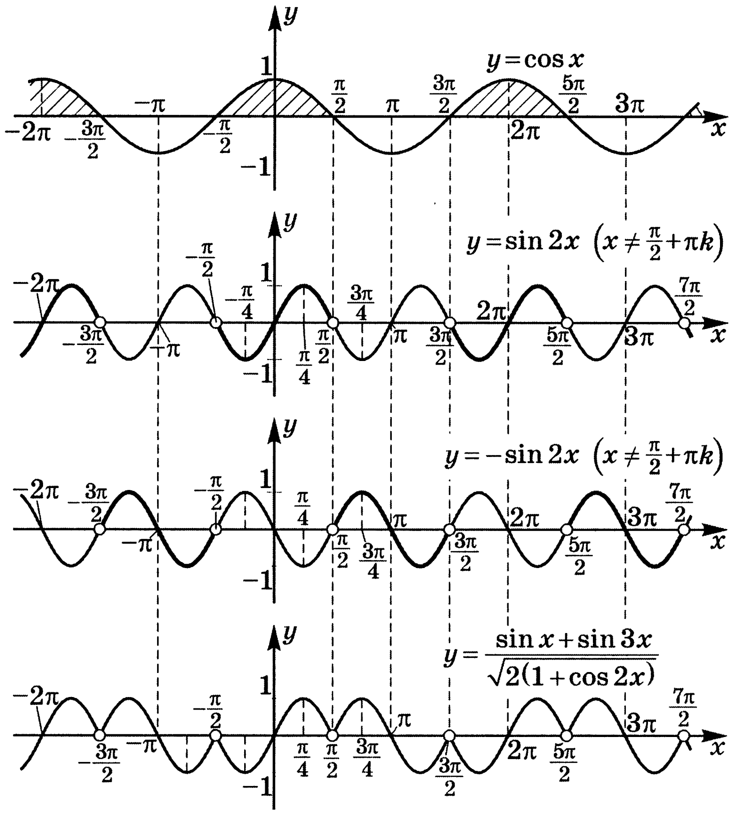
$$\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(t+n); \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(n-t)\right);$$

$$\left(-\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(p+t); \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(p-t)\right)$$

$$\left.\mid k, n, t, p \in \mathbb{Z}\right\}.$$

7. Постройте график $y = \dfrac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt{2(1 + \cos 2x)}}$.

$$y = \frac{2\sin 2x \cdot \cos x}{\sqrt{4\cos^2 x}} = \frac{2\sin 2x \cdot \cos x}{2|\cos x|} = \begin{cases} \sin 2x, & \cos x > 0 \\ -\sin 2x, & \cos x < 0 \end{cases}.$$



Решение карточки 2

1. Вычислите:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$ при $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad \cos\alpha < 0 \ \left(\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]\right);$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{25}{144}}} = -\frac{12}{13};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \quad \sin\frac{\alpha}{2} > 0 \ \left(\frac{\alpha}{2} \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]\right);$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}} = \boxed{\frac{5}{26}\sqrt{26}}.$$

2) $$A(\alpha) = \frac{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\frac{5\pi}{6}}{2\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}+\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\frac{5\pi}{6}}{2\sin 2\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{3}+2\cos 2\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{6}-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2\alpha+\sqrt{3}\cos 2\alpha-\sqrt{3}\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{6}+\sin 2\alpha-\cos\frac{\pi}{6}}{\sin 2\alpha} = \boxed{1}. \quad \alpha \in D(A).$$

2. Докажите:

1) $\cos 5^\circ + \cos 15^\circ + \cos 25^\circ - \frac{1}{4\sin 5^\circ} = 0.$

$$\mathrm{L} = \cos 5^\circ + \cos 15^\circ + \cos 25^\circ - \frac{1}{4\sin 5^\circ} =$$

$$= \frac{4\cos 5^\circ\cdot\sin 5^\circ + 4\cos 15^\circ\cdot\sin 5^\circ + 4\cos 25^\circ\cdot\sin 5^\circ - 1}{4\sin 5^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin 10^\circ + 2(\sin 20^\circ - \sin 10^\circ) + 2(\sin 30^\circ - \sin 20^\circ) - 1}{4\sin 5^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin 10^\circ + 2\sin 20^\circ - 2\sin 10^\circ + 1 - 2\sin 20^\circ - 1}{4\sin 5^\circ} = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L} = 0 \\ \Pi = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

2) $\cos(\alpha - 9^\circ)\cdot\cos(\alpha - 45^\circ) > \sin(\alpha + 40^\circ)\cdot\cos(\alpha - 4^\circ)$.

$$\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - 9^\circ + \alpha - 45^\circ) + \cos(\alpha - 9^\circ - \alpha + 45^\circ)\right) >$$

$$> \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha + 40^\circ + \alpha - 4^\circ) + \sin 44^\circ\right);$$

$\cos(2\alpha - 54^\circ) + \cos 36^\circ > \sin(2\alpha + 36^\circ) + \sin 44^\circ$;

$\cos(2\alpha - 90^\circ + 36^\circ) + \sin 54^\circ > \sin(2\alpha + 36^\circ) + \sin 44^\circ$;

$\sin(2\alpha + 36^\circ) + \sin 54^\circ > \sin(2\alpha + 36^\circ) + \sin 44^\circ$;

$\sin 54^\circ > \sin 44^\circ$ — истинно.

3. Решите уравнения:

1) $\dfrac{2}{1 - \operatorname{tg} x} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg} x} = \dfrac{2\cos^2 x}{\cos 2x}$.

$$D(\text{У}): \begin{cases} \operatorname{tg} x \neq 1 \\ \operatorname{tg} x \neq -1 \\ \cos 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases};$$

$$\frac{2(1 + \operatorname{tg} x) + 1 - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x};$$

$(\operatorname{tg} x + 3)\cdot\cos^2 x = 2\cos^2 x$; $\quad \cos x = 0 \notin D(\text{У})$;

$\operatorname{tg} x = -1$; $\quad x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k \notin D(\text{У})$.

Ответ: $\emptyset$.

2) $1+\sin x+\sin 3x+\cos(\pi+4x)=0.$

$1+\sin x+\sin 3x-\cos 4x=0;$

5.2 7.3 $(1-\cos 4x)+(\sin x+\sin 3x)=0;$

$2\sin^2 2x+2\sin 2x\cdot\cos x=0;$

5.1 $2\sin 2x(\sin 2x+\cos x)=0;$

$2\sin 2x(2\sin x\cdot\cos x+\cos x)=0;$

$2\sin 2x\cdot\cos x(2\sin x+1)=0;$

2.1 2.2 $$\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin 2x=0\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ x=\dfrac{\pi}{2}n\\ x=(-1)^{t+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi t\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2}k;(-1)^{t+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi t\,|\,k,t\in\mathbb{Z}\right\}.$

3) $2\arcsin x=\arccos 2x.$

$$\left.\begin{array}{l}0\leqslant\arccos 2x\leqslant\pi\\ -\pi\leqslant 2\arcsin x\leqslant\pi\end{array}\right|\Rightarrow 0\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2},\text{ тогда }0\leqslant x\leqslant 1;$$

$$\cos(2\arcsin x)=2x;\quad \left\{\begin{array}{l}|x|\leqslant 1\\ |2x|\leqslant 1\\ 0\leqslant x\leqslant 1\end{array}\right.;\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2};$$

$1-2x^2=2x;\quad 2x^2+2x-1=0;$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2};\quad \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\notin\left[0;\frac{1}{2}\right];$$

$$0\leqslant\frac{\sqrt{3}-1}{2}\leqslant\frac{1}{2};\quad 0\leqslant\sqrt{3}-1\leqslant 1;$$

$1\leqslant\sqrt{3}\leqslant 2$ — истинно.

Ответ: $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}.$

4. Решите неравенство $\sin x + \cos x > \sqrt{2}\cos 3x$.

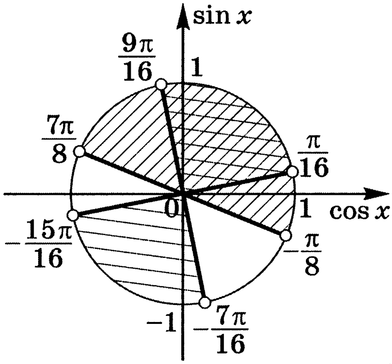
$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) > \sqrt{2}\cos 3x; \qquad \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \cos 3x > 0;$$

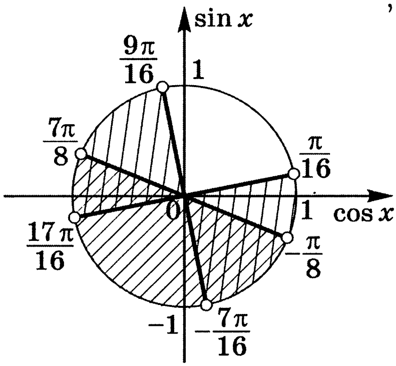
$$-2\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}-3x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}+3x}{2}\right) > 0;$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\cdot\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right) > 0;$$

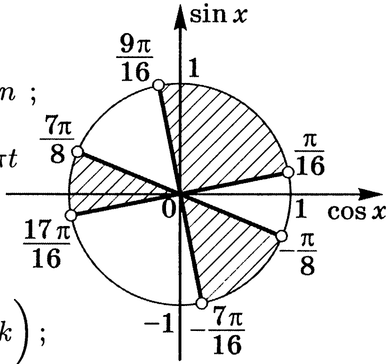
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) > 0\\ \sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right) > 0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) < 0\\ \sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right) < 0\end{cases}\end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\pi+2\pi k > x+\frac{\pi}{8} > 2\pi k\\ \pi+2\pi n > 2x-\frac{\pi}{8} > 2\pi n\end{cases}\\ \begin{cases}2\pi+2\pi t > x+\frac{\pi}{8} > \pi+2\pi t\\ 2\pi+2\pi p > 2x-\frac{\pi}{8} > \pi+2\pi p\end{cases}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{7\pi}{8}+2\pi k > x > -\frac{\pi}{8}+2\pi k\\ \frac{9\pi}{16}+\pi n > x > \frac{\pi}{16}+\pi n\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{15\pi}{8}+2\pi t > x > \frac{7\pi}{8}+2\pi t\\ \frac{17\pi}{16}+\pi p > x > \frac{9\pi}{16}+\pi p\end{cases}\end{array}\right.;$$





$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{16}+2\pi k<x<\dfrac{9\pi}{16}+2\pi k \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{7\pi}{8}+2\pi n<x<\dfrac{17\pi}{16}+2\pi n \\ -\dfrac{7\pi}{16}+2\pi t<x<-\dfrac{\pi}{8}+2\pi t \end{array}\right. \end{array}\right. ;$$



Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{16}+2\pi k; \dfrac{9\pi}{16}+2\pi k\right); \left(\dfrac{7\pi}{8}+2\pi n; \dfrac{17\pi}{16}+2\pi n\right); \left(-\dfrac{7\pi}{16}+2\pi t; -\dfrac{\pi}{8}+2\pi t\right) \mid k, n, t \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. Решите систему уравнсний $\begin{cases} 2\sin x+\dfrac{1}{\cos y}=2 \\ \dfrac{\sin x}{\cos y}=0{,}5 \end{cases}$.

$D(\mathrm{C}):\ y \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

$$\begin{cases} 2\sin x \cdot \cos y+1=2\cos y \\ 2\sin x=\cos y \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos^2 y-2\cos y+1=0 \\ 2\sin x=\cos y \end{cases};$$

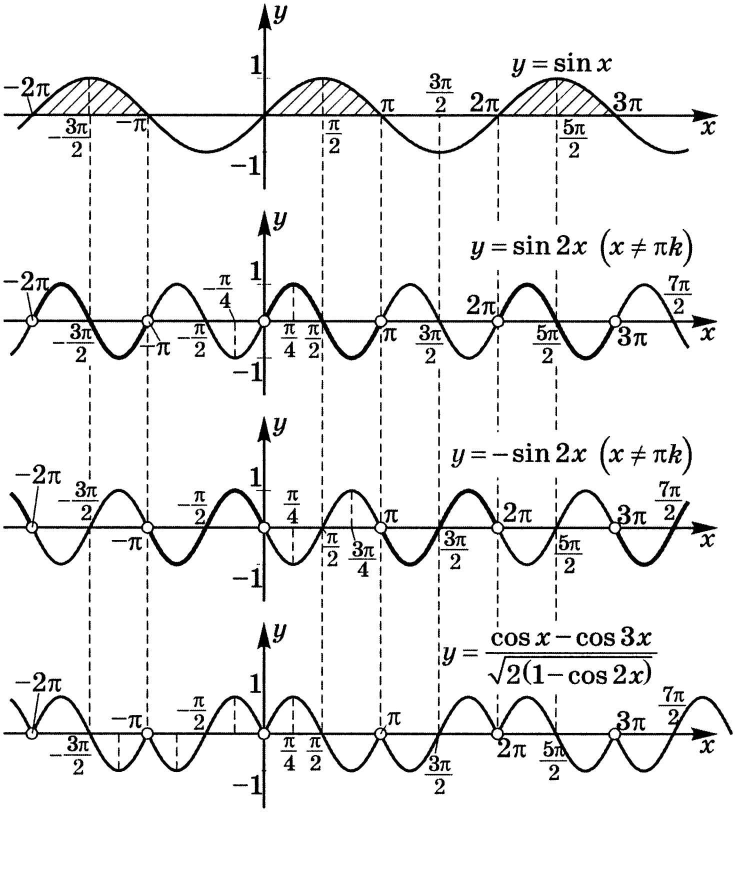
$$\begin{cases} (\cos y-1)^2=0 \\ 2\sin x=\cos y \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos y=1 \\ 2\sin x=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos y=1 \\ \sin x=\dfrac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} y=2\pi k \\ x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\left((-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n; 2\pi k\right) \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

6. Постройте график $y = \dfrac{\cos x - \cos 3x}{\sqrt{2(1-\cos 2x)}}$.

$$y = \frac{2\sin 2x \cdot \sin x}{\sqrt{4\sin^2 x}} = \frac{\sin 2x \cdot \sin x}{|\sin x|} = \begin{cases} \sin 2x, & \sin x > 0 \\ -\sin 2x, & \sin x < 0 \end{cases}$$



Решение карточки 3

1. Докажите:

1) $\cos 6^\circ \cdot \cos 66^\circ \cdot \cos 42^\circ \cdot \cos 78^\circ = \dfrac{1}{16}$.

$$\mathrm{L} = \cos 6^\circ \cdot \cos 66^\circ \cdot \cos 42^\circ \cdot \cos 78^\circ =$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 72^\circ + \cos 60^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 36^\circ) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cos 72^\circ + \frac{1}{2}\right)\left(\cos 36^\circ - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cos 72^\circ \cdot \cos 36^\circ + \frac{1}{2}\cos 36^\circ - \frac{1}{2}\cos 72^\circ - \frac{1}{4}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cos 72^\circ \cdot \cos 36^\circ + \sin 54^\circ \cdot \sin 18^\circ - \frac{1}{4}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(2\cos 72^\circ \cdot \cos 36^\circ - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{16}},$$

так как $\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \dfrac{4\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ}{4\sin 36^\circ} =$

$$= \frac{2\sin 72^\circ \cdot \cos 72^\circ}{4\sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{4\sin 36^\circ} = \frac{1}{4}; \quad \left.\begin{matrix} \mathrm{L} = \frac{1}{16} \\ \Pi = \frac{1}{16} \end{matrix}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

2) $\dfrac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} = \operatorname{ctg}\dfrac{15\alpha}{2}$.

$$\mathrm{L} = \frac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} =$$
$$= \frac{2\cos\frac{6\alpha+9\alpha}{2} \cdot \cos\frac{6\alpha-9\alpha}{2} - 2\cos\frac{7\alpha+8\alpha}{2} \cdot \cos\frac{7\alpha-8\alpha}{2}}{2\sin\frac{6\alpha+9\alpha}{2} \cdot \cos\frac{6\alpha-9\alpha}{2} - 2\sin\frac{7\alpha+8\alpha}{2} \cdot \cos\frac{7\alpha-8\alpha}{2}} =$$
$$= \frac{\cos\frac{15\alpha}{2} \cdot \left(\cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{15\alpha}{2} \cdot \left(\cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)} = \operatorname{ctg}\frac{15\alpha}{2};$$

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{L} = \operatorname{ctg}\dfrac{15\alpha}{2} \\ \Pi = \operatorname{ctg}\dfrac{15\alpha}{2} \end{matrix}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

3) $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{7}+2\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{3}=\dfrac{5\pi}{4}$.

Так как $\begin{cases} 0<\dfrac{1}{3}<\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ 0<\dfrac{1}{7}<\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$,

то, учитывая, что функция $\operatorname{arcctg} x$ убывает, имеем

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}>\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{7}>\dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{\pi}{2}>\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{3}>\dfrac{\pi}{3} \end{cases}\right| \Rightarrow 1{,}5\pi>\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{7}+2\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{3}>\pi.$$

Значит, $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{7}+2\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{3}\in(\pi;1{,}5\pi)$.

Очевидно, и $\dfrac{5\pi}{4}\in(\pi;1{,}5\pi)$ — правая и левая части расположены в одной четверти. Функция $\operatorname{tg} x$ на $(\pi;1{,}5\pi)$ возрастает. Поэтому переход от равенства углов к равенству значений функции $\operatorname{tg} x$ не нарушает равносильности:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{7}+2\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{3}\right)=\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}.$$

Обозначим $\alpha=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{7}$, $\beta=2\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{3}$;

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{7}\right)}=7;$$

$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}\right)}=$$

$$=\dfrac{\dfrac{2}{\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}\right)}}{1-\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}\right)}}=\dfrac{\frac{2}{\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{\frac{1}{9}}}=\dfrac{6}{-8}=-\dfrac{3}{4}.$$

$$\text{L} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}; \quad \text{L} = \frac{7-\frac{3}{4}}{1-7\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} = 1;$$

$$\Pi = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1;$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L}=1\\ \Pi=1\end{array}\right| \Rightarrow \text{L} = \Pi.$$

4) $\dfrac{1}{\sin^4\alpha} + \dfrac{1}{\cos^4\alpha} \geqslant 8.$

Учтем, что при $a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0 \quad a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

Действительно,

$a+b \geqslant 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$ — истина. Поэтому

$$\frac{1}{\sin^4\alpha} + \frac{1}{\cos^4\alpha} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{\sin^4\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^4\alpha}} = \frac{2}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha} = \frac{8}{\sin^2 2\alpha}.$$

$\sin^2 2\alpha \leqslant 1$, значит $\dfrac{1}{\sin^2 2\alpha} \geqslant 1$, откуда $\dfrac{8}{\sin^2 2\alpha} \geqslant 8$, что и требовалось доказать.

2. Решите уравнения:

1) $\dfrac{7}{4}\cos\dfrac{x}{4} = \cos^3\dfrac{x}{4} + \sin\dfrac{x}{2}.$

$$\frac{7}{4}\cos\frac{x}{4} = \cos^3\frac{x}{4} + 2\sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4};$$

$$\cos\frac{x}{4}\cdot\left(\frac{7}{4} - \cos^2\frac{x}{4} - 2\sin\frac{x}{4}\right) = 0;$$

$$\cos\frac{x}{4} = 0; \quad \frac{x}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x = 2\pi + 4\pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{7}{4} - 1 + \sin^2\frac{x}{4} - 2\sin\frac{x}{4} = 0; \quad \sin\frac{x}{4} = t; \quad 4t^2 - 8t + 3 = 0;$$

$$t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{4}=\frac{4\pm 2}{4};\quad \left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{x}{4}=\dfrac{3}{2}\notin[-1;1]\\ \sin\dfrac{x}{4}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.;$$

$$\frac{x}{4}=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;\quad x=(-1)^n\frac{2\pi}{3}+4\pi n;$$

Ответ: $\left\{2\pi+4\pi k;(-1)^n\dfrac{2\pi}{3}+4\pi n\,|\,k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

2) $\sin^{10}x+\cos^{10}x=\dfrac{29}{64}$. 5.7 5.8

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5=\frac{29}{64};$$

$\boxed{(a\pm b)^5=a^5\pm 5a^4b+10a^3b^2\pm 10a^2b^3+5ab^4\pm b^5}$

$$1-5\cos 2x+10\cos^2 2x-10\cos^3 2x+5\cos^4 2x-\cos^5 2x+$$
$$+1+5\cos 2x+10\cos^2 2x+10\cos^3 2x+5\cos^4 2x+\cos^5 2x=\frac{29}{2};$$

$$2+20\cos^2 2x+10\cos^4 2x=\frac{29}{2};\quad \cos 2x=t;$$

$$20t^2+40t-25=0;\quad 4t^2+8t-5=0;$$

$$t_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{4}=\frac{-4\pm 6}{4};\quad \left[\begin{array}{l}t=-2{,}5\notin[-1;1]\\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.;$$

$$\cos^2 2x=\frac{1}{2};\quad \frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{1}{2};\quad \cos 4x=0;\quad x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3) $\cos(5x+516^\circ)-\cos(3x+172^\circ)=\cos(4x+254^\circ)$.

$$-2\sin(4x+344^\circ)\cdot\sin(x+172^\circ)=\cos(4x+254^\circ);$$
$$2\sin(4x+254^\circ+90^\circ)\cdot\sin(x+172^\circ)+\cos(4x+254^\circ)=0;$$
$$2\cos(4x+254^\circ)\cdot\sin(x+172^\circ)+\cos(4x+254^\circ)=0;$$
$$2\cos(4x+254^\circ)\cdot\left[\sin(x+172^\circ)+\frac{1}{2}\right]=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos(4x+254^\circ)=0\\ \sin(x+172^\circ)=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}4x+254^\circ=90^\circ+180^\circ k\\ x+172^\circ=(-1)^{n+1}30^\circ+180^\circ n\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-41^\circ+45^\circ k\\ x=-172^\circ+(-1)^{n+1}30^\circ+180^\circ n\end{array}\right..$$

Ответ: $\Big\{-41^\circ+45^\circ k;$

$-172^\circ+(-1)^{n+1}30^\circ+180^\circ n\,|\,k,n\in\mathbb{Z}\Big\}.$

3. Решите неравенство $8\sin^2\dfrac{x}{2}+3\sin x-4>0.$

$$8\sin^2\frac{x}{2}+6\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}-4\sin^2\frac{x}{2}-4\cos^2\frac{x}{2}>0;$$

$$4\sin^2\frac{x}{2}+6\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}-4\cos^2\frac{x}{2}>0;$$

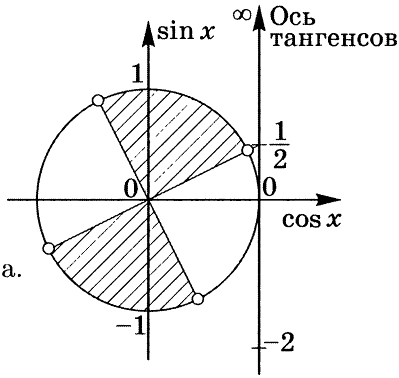
а) Пусть $\cos\dfrac{x}{2}=0;$

$x=\pi+2\pi k,$ тогда

$4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)+$

$+6\cdot 0-4\cdot 0^2>0;$

$4\sin^2\dfrac{\pi}{2}=4>0$ — истина.

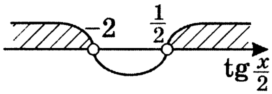


б) Пусть $\cos\dfrac{x}{2}\neq 0,$

тогда $\cos^2\dfrac{x}{2}>0.$

Значит, $2\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}+3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-2>0;$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4};\quad \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=-2\\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.;$$



$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}+\pi k > \frac{x}{2} > \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k \\ \operatorname{arctg}(-2)+\pi n > \frac{x}{2} > -\frac{\pi}{2}+\pi n \end{array}\right. .$$

Объединяя оба случая, получаем следующий ответ.

Ответ: $\left\{\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k; 2\pi+2\operatorname{arctg}(-2)+2\pi k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ \cos x - \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

$$\begin{cases} 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \\ 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{y-x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases},$$

тогда $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = -\sqrt{3}$; $\quad \frac{x-y}{2} = -\frac{\pi}{3} + \pi k$;

$$\begin{cases} x = y - \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ \sin\left(y - \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) + \sin y = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y - \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ \sin\left(y - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin y = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y - \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ 2\sin\left(y - \frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = y - \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ \sin\left(y - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y - \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ y = \frac{\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n \end{cases};$$

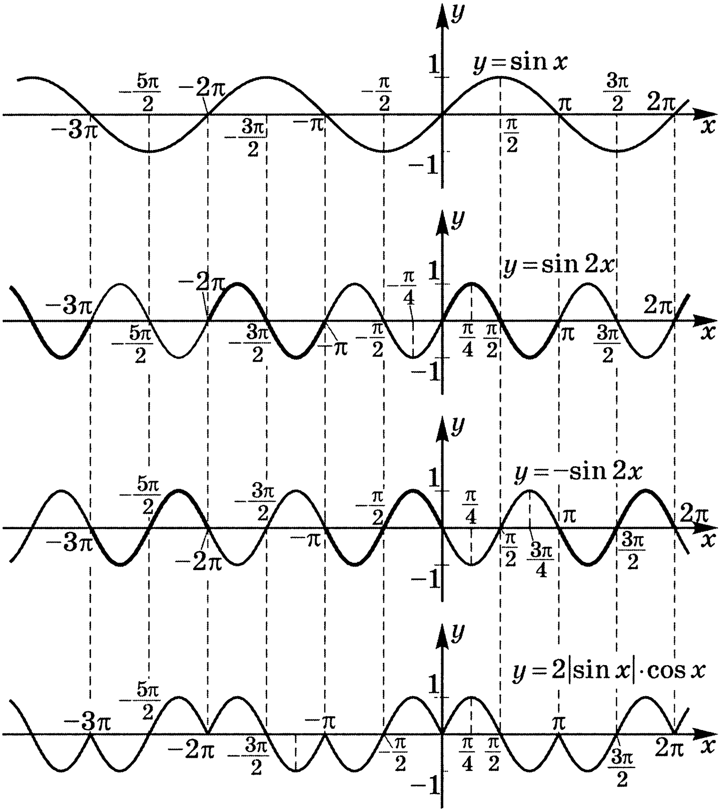
$$x = \frac{\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} + \pi n + 2\pi k;$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi(n + 2k).$$

Ответ: $\left\{\left(-\frac{\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi(n + 2k); \frac{\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n\right) \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

5. Постройте график $y = 2|\sin x| \cdot \cos x$.

$$y = \begin{cases} \sin 2x, & \sin x \geqslant 0 \\ -\sin 2x, & \sin x < 0 \end{cases}$$



Решение карточки 4

1. Вычислите $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, если $\sin\alpha+\sin\beta=-\dfrac{27}{65}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{7}{9}$ при $2{,}5\pi<\alpha<3\pi$ и $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$.

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=-\frac{27}{65}.$$

Так как $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{7}{9}$; $\dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{7}{9}$.

Учтем, что $2\pi<\alpha+\beta<3\pi$, тогда $\pi<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<1{,}5\pi$, значит

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}};\quad \cos\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{9}{130}\sqrt{130};$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2};\quad \sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{7}{9}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{7}{9}\cdot\left(-\frac{9}{130}\cdot\sqrt{130}\right)=-\frac{7}{\sqrt{130}}=-\frac{7}{130}\cdot\sqrt{130}.$$

Так как $2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=-\dfrac{27}{65}$, то

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=-\frac{27}{65\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}},\text{ т. е. }\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\boxed{\frac{27\sqrt{130}}{910}}.$$

2. Найдите $A(\alpha)=\dfrac{\sin4\alpha+\sin10\alpha-\sin6\alpha}{\cos2\alpha+1-2\sin^2 4\alpha}$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=m$.

$$A(\alpha)=\frac{\sin4\alpha+\sin10\alpha-\sin6\alpha}{\cos2\alpha+1-2\sin^2 4\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin(-\alpha)\cdot\cos5\alpha+2\sin5\alpha\cdot\cos5\alpha}{\cos2\alpha+1-1+\cos8\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos5\alpha\cdot(\sin5\alpha-\sin\alpha)}{\cos2\alpha+\cos8\alpha}=\frac{2\cos5\alpha\cdot2\sin2\alpha\cdot\cos3\alpha}{2\cos5\alpha\cdot\cos3\alpha}=$$

$$=2\sin2\alpha;$$

$$m = \sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right), \text{ тогда } -\sqrt{2} \leqslant m \leqslant \sqrt{2};$$

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = m^2; \quad 1 - \sin 2\alpha = m^2; \quad \sin 2\alpha = 1 - m^2.$$

Значит, $A(\alpha) = 2(1 - m^2)$ при $m \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

Ответ: $A(\alpha) = 2(1 - m^2)$ при $m \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

3. Докажите:

1) $\operatorname{tg}^6 20^\circ - 33\operatorname{tg}^4 20^\circ + 27\operatorname{tg}^2 20^\circ = 3$.

5.9

$$\operatorname{tg}^2 20^\circ = \frac{\sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ} = \frac{1 - \cos 40^\circ}{1 + \cos 40^\circ};$$

$$\mathrm{L} = \operatorname{tg}^6 20^\circ - 33\operatorname{tg}^4 20^\circ + 27\operatorname{tg}^2 20^\circ = \frac{1}{(1 + \cos 40^\circ)^3}\times$$

$$\times\Big((1 - \cos 40^\circ)^3 - 33(1 - \cos 40^\circ)^2(1 + \cos 40^\circ) +$$

$$+ 27(1 - \cos 40^\circ)(1 + \cos 40^\circ)^2\Big) =$$

$$= \frac{1}{(1 + \cos 40^\circ)^3}\Big((1 - \cos 40^\circ)\big[(1 - \cos 40^\circ)^2 -$$

$$- 33(1 - \cos 40^\circ)(1 + \cos 40^\circ) + 27(1 + \cos 40^\circ)^2\big]\Big) =$$

$$= \frac{1}{(1 + \cos 40^\circ)^3}\Big((1 - \cos 40^\circ)\big[1 - 2\cos 40^\circ + \cos^2 40^\circ -$$

$$- 33 + 33\cos^2 40^\circ + 27 + 54\cos 40^\circ + 27\cos^2 40^\circ\big]\Big) =$$

$$= \frac{(1 - \cos 40^\circ)(61\cos^2 40^\circ + 52\cos 40^\circ - 5)}{(1 + \cos 40^\circ)^3} =$$

$$= \frac{1}{(1 + \cos 40^\circ)^3}\Big(61\cos^2 40^\circ - 61\cos^3 40^\circ + 52\cos 40^\circ -$$

$$- 52\cos^2 40^\circ - 5 + 5\cos 40^\circ\Big) =$$

$$= \frac{-61\cos^3 40^\circ + 9\cos^2 40^\circ + 57\cos 40^\circ - 5}{(1 + \cos 40^\circ)^3}.$$

Используя тождество $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

при $\alpha = 40^\circ$, получаем:

$\cos 120^\circ = 4\cos^3 40^\circ - 3\cos 40^\circ$; умножим на 16:

$-8 = 64\cos^3 40^\circ - 48\cos 40^\circ$; $64\cos^3 40^\circ - 48\cos 40^\circ + 8 = 0$;

$$\mathrm{L} = \frac{1}{(1+\cos 40^\circ)^3}\Big(-61\cos^3 40^\circ + 9\cos^2 40^\circ + 57\cos 40^\circ - $$
$$- 5 + (64\cos^3 40^\circ - 48\cos 40^\circ + 8)\Big) =$$
$$= \frac{3\cos^3 40^\circ + 9\cos^2 40^\circ + 9\cos 40^\circ + 3}{(1+\cos 40^\circ)^3} =$$
$$= \frac{3(\cos 40^\circ + 1)^3}{(1+\cos 40^\circ)^3} = 3.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{L} = 3\\ \Pi = 3\end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

2) $\arcsin\dfrac{4}{5} + \arcsin\dfrac{12}{13} + \arcsin\dfrac{56}{65} = \pi.$

Предположим, что тождество выполняется. Тогда оно равносильно

$$\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{12}{13} = \pi - \arcsin\frac{56}{65} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\underbrace{\arcsin\frac{4}{5}}_{\alpha} + \underbrace{\arcsin\frac{12}{13}}_{\beta}\right) = \sin\left(\pi - \underbrace{\arcsin\frac{56}{65}}_{\gamma}\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma \Leftrightarrow \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha = \sin\gamma$;

$\sin\gamma = \dfrac{56}{65}$; $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$; $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$;

$\sin\beta = \dfrac{12}{13}$; $\cos\beta = \dfrac{5}{13}$.

Тогда равенство равносильно

$\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13}\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{56}{65}$; $\dfrac{56}{65} = \dfrac{56}{65}$ — истинно.

Значит, предположение о справедливости тождества верно, что и требовалось доказать.

Примечание. То, что из $\alpha + \beta = \gamma$ следует, что $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$ — очевидный факт. Но в **общем** случае из $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$ не следует $\alpha+\beta=\gamma$. В данном случае следствие выполняется, так как:

$$\frac{\pi}{2} \geqslant \arcsin\frac{4}{5} > \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\frac{4}{5} > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и функция } \arcsin x \text{ возрастает на } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right);$$

$$\frac{\pi}{2} \geqslant \arcsin\frac{12}{13} > \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\text{аналогично так как } \frac{12}{13} > \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$0 \leqslant \arcsin\frac{56}{65} < \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому $\alpha + \beta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ и $\pi - \gamma \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

А если $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\pi-\gamma)$ и углы из одной четверти, то углы равны.

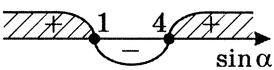
3) $\dfrac{\sin\alpha - 1}{\sin\alpha - 2} + \dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{2-\sin\alpha}{3-\sin\alpha}$.

Домножим обе части неравенства

на $2(2-\sin\alpha)(3-\sin\alpha) > 0$. Тогда

$$2(1-\sin\alpha)(3-\sin\alpha) + (2-\sin\alpha)(3-\sin\alpha) - 2(2-\sin\alpha)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 5\sin\alpha + \sin^2\alpha \geqslant 0 \Leftrightarrow (\sin\alpha - 1)(\sin\alpha - 4) \geqslant 0;$$



$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha \geqslant 4\ \emptyset \\ \sin\alpha \leqslant 1\ \forall\alpha\end{array}\right.$ — истина. Следовательно, предположение о том, что неравенство выполнено, верно для $\forall\alpha$, что и требовалось доказать.

4. Решите уравнения:

1) $1+\cos 2x\cdot\cos 3x=\dfrac{1}{2}\sin^2 3x.$

$2+2\cos 2x\cdot\cos 3x=\sin^2 3x;$

$1+\sin^2 3x+\cos^2 3x+2\cos 2x\cdot\cos 3x+\cos^2 2x-\cos^2 2x=\sin^2 3x;$

$\sin^2 2x+(\cos 3x+\cos 2x)^2=0;$

$$\begin{cases}\sin 2x=0\\ \cos 3x+\cos 2x=0\end{cases};\quad \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}k\\ \cos\dfrac{3\pi}{2}k+\cos\pi k=0\end{cases};$$

а) при $k=0$ $\cos 0+\cos 0=0$ — ложно;

б) при $k=1$ $\cos\dfrac{3\pi}{2}+\cos\pi=0$ — ложно;

в) при $k=2$ $\cos 3\pi+\cos 2\pi=0$ — истинно;

г) при $k=3$ $\cos 4{,}5\pi+\cos 3\pi=0$ — ложно.

Ответ: $\{x=\pi+2\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$.

2) $2\sin^2\dfrac{\pi x}{2}\cdot\sin^2\dfrac{\pi x}{4}=x^2+\dfrac{1}{x^2}.$

$\mathrm{L}=2\sin^2\dfrac{\pi x}{2}\cdot\sin^2\dfrac{\pi x}{4}\leqslant 2;\quad \Pi=x^2+\dfrac{1}{x^2}\geqslant 2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}}=2;$

$\begin{cases}\mathrm{L}\leqslant 2\\ \Pi\geqslant 2\end{cases}$, значит $\mathrm{L}=\Pi=2.$ $\quad x^2+\dfrac{1}{x^2}=2$ при $\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right.;$

Проверим левую часть:

а) $x=1;\quad \mathrm{L}=2\sin^2\dfrac{\pi}{2}\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{4}=1;\quad \mathrm{L}\neq\Pi;$

б) $x=-1;\quad \mathrm{L}=2\sin^2\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\sin^2\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=1;\quad \mathrm{L}\neq\Pi.$

Ответ: решений нет.

5. Решите неравенство $\dfrac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}\geqslant 3\,\mathrm{tg}\,x.$

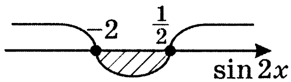
$D(\mathrm{H}):\ \cos x\neq 0;$

$\cos^2 2x\geqslant 3\,\mathrm{tg}\,x\cdot\cos^2 x;\qquad \cos^2 2x\geqslant 3\sin x\cdot\cos x;$

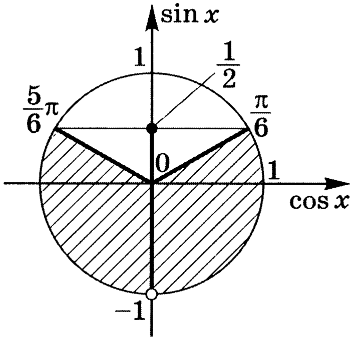
$$1-\sin^2 2x \geqslant \frac{3}{2}\sin 2x; \quad 2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 2 \leqslant 0;$$

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3\pm 5}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = -2 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$



$$\sin 2x \leqslant \frac{1}{2}.$$



Из чертежа следует, что

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n > 2x \geqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{4} + \pi k < x \leqslant \frac{\pi}{12} + \pi k \\ \frac{5\pi}{12} + \pi n \leqslant x < \frac{3\pi}{4} + \pi n \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{12}+\pi k\right]; \left[\frac{5\pi}{12}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right) \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin^2 x = \sin y \\ \cos^4 x = \cos y \end{cases}.$

$\begin{cases} \sin^4 x = \sin^2 y \\ \cos^8 x = \cos^2 y \end{cases}$, тогда

$$\cos^8 x + \sin^4 x = 1; \quad \cos^8 x + (1-\cos^2 x)^2 = 1;$$

$$\cos^8 x + \cos^4 x - 2\cos^2 x = 0; \quad \cos^2 x(\cos^6 x + \cos^2 x - 2) = 0.$$

Обозначая $t = \cos^2 x$, получаем $t \cdot \left(t^3 + t - 2\right) = 0$;

$$\begin{array}{r|l} t^3 \qquad + \ t - 2 & t - 1 \\ \cline{2-2} -\underline{t^3 - t^2} \qquad\qquad & t^2 + t + 2 \qquad D < 0 \\ t^2 + \ t - 2 & \\ -\underline{t^2 - \ t} \quad\; & \\ 2t - 2 & \\ -\underline{2t - 2} & \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x = 0 \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} x = \pi k \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right..$$

а) $\begin{cases} \sin^2 \pi k = \sin y \\ \cos^4 \pi k = \cos y \end{cases};$

$$\begin{cases} \sin y = 0 \\ \cos y = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = \pi k \\ y = 2\pi p \end{cases};$$

$$y = 2\pi p; \qquad (\pi k; 2\pi p) \mid k, p \in \mathbb{Z};$$

б) $\begin{cases} \sin^2 \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right) = \sin y \\ \cos^4 \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right) = \cos y \end{cases}; \qquad \begin{cases} \sin y = 1 \\ \cos y = 0 \end{cases};$

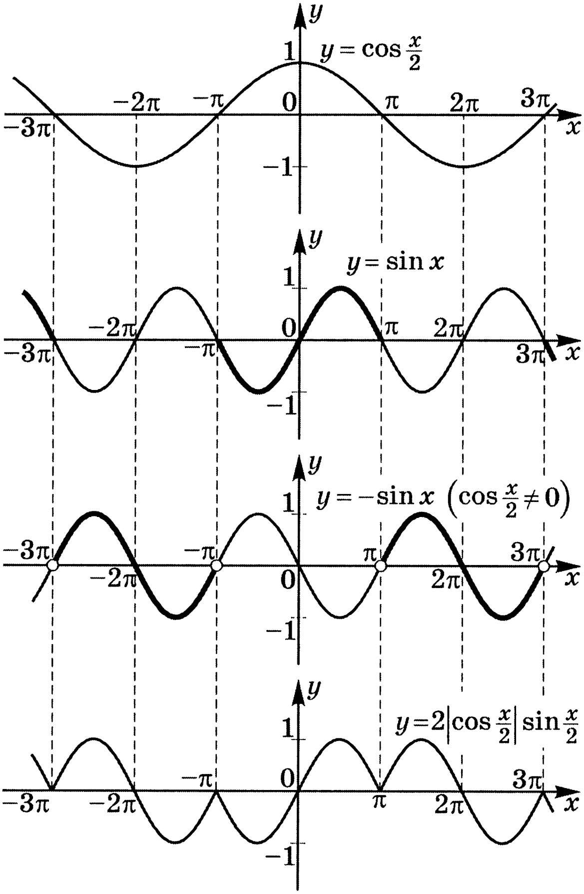
$$\begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m \\ y = \dfrac{\pi}{2} + \pi t \end{cases};$$

$$y = \frac{\pi}{2} + 2\pi m; \qquad \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi m\right).$$

Ответ: $\left\{(\pi k; 2\pi p); \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m\right) \mid k, p, n, m \in \mathbb{Z}\right\}.$

7. Постройте график $y = 2\left|\cos\frac{x}{2}\right| \cdot \sin\frac{x}{2}$.

$$y = \begin{cases} \sin x, & \cos\frac{x}{2} \geqslant 0 \\ -\sin x, & \cos\frac{x}{2} < 0 \end{cases}.$$



Решение карточки 5

1. Вычислите $\operatorname{tg} 2\beta$, $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$, если $\sin\beta = -\dfrac{60}{61}$ при $\beta \in [1{,}5\pi; 2\pi]$.

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \left(-\frac{60}{61}\right)^2} = \sqrt{\frac{(61+60)(61-60)}{61^2}} = \frac{11}{61},$$

$$\text{тогда } \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{-\frac{60}{61}}{\frac{11}{61}} = -\frac{60}{11}.$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta};$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\cdot\left(-\frac{60}{11}\right)}{1 - \left(-\frac{60}{11}\right)^2} = \frac{120\cdot 11}{3600 - 121} = \boxed{\frac{1320}{3479}}.$$

Так как $\dfrac{3\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant 2\pi$, то $\dfrac{3\pi}{4} \leqslant \dfrac{\beta}{2} \leqslant \pi$,

значит, $\cos\dfrac{\beta}{2} < 0$, $\sin\dfrac{\beta}{2} > 0$.

$$\cos\frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}; \quad \cos\frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\frac{11}{61}}{2}} = -\frac{6}{61}\sqrt{61};$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}; \quad \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{11}{61}}{2}} = \frac{5}{61}\sqrt{61}.$$

Значит, $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \boxed{-\dfrac{5}{6}}$.

2. Упростите $\dfrac{4\sin^2(45^\circ+\alpha)\cdot\sin 10^\circ - 1 + 4\sin 10^\circ\cdot\sin 70^\circ}{4\sin 10^\circ\cdot\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)\cdot\cos^2(45^\circ+\alpha)} =$

$$= \frac{2\,(1-\cos(90^\circ+2\alpha))\cdot\sin 10^\circ - 1 + 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)}{4\sin 10^\circ\cdot\sin(45^\circ+\alpha)\cdot\cos(45^\circ+\alpha)} =$$

$$= \frac{2(1+\sin 2\alpha)\cdot\sin 10^\circ - 1 + 1 - 2\cos 80^\circ}{2\sin 10^\circ\cdot\sin(90^\circ+2\alpha)} =$$

$$= \frac{2\sin 10^\circ + 2\sin 2\alpha \cdot \sin 10^\circ - 2\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ \cdot \cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin 2\alpha \cdot \sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ \cdot \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

3. Докажите:

1) $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2}$.

$$\mathrm{L} = \cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \cos 36^\circ - \cos 72^\circ =$$

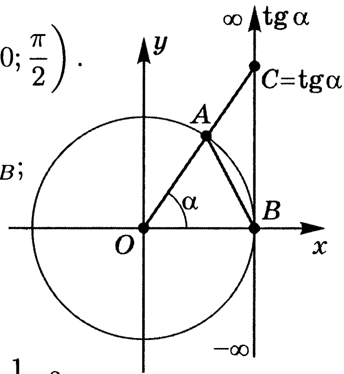
$$= 2\sin 54^\circ \cdot \sin 18^\circ = 2\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ =$$

$$= \frac{2\cos 36^\circ \cdot \sin 36^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 72^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{2\sin 36^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{2\sin 36^\circ} = \frac{1}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L} = \frac{1}{2} \\ \Pi = \frac{1}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

2) $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$, если $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.



Из чертежа следует, что

$S_{\triangle AOB} < S_{\text{сект. } AOB} < S_{\triangle OCB}$;

Пусть $OA = R$;

$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin\alpha$;

$S_{\triangle OCB} = \frac{1}{2} OB \cdot CB = \frac{1}{2} OB^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} R^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha$;

$S_{\text{сект. } AOB} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \alpha$;

$\frac{1}{2} R^2 \sin\alpha < \frac{1}{2} R^2 \alpha < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha.$

4. Решите уравнения:

1) $\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x.$

$\frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) = \cos 3x;\quad \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos x) = 0;$

$\frac{1}{2}\cdot 2\sin 2x \cdot \sin x = 0;\quad \left[\begin{array}{l} x = \pi k \\ 2x = \pi n \end{array}\right.;\quad x = \frac{\pi}{2}n.$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}n \,|\, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

2) $3\cos 2x + 4\sin 2x + 5 = \sin^2 x.$

$3\cos 2x + 4\sin 2x + 5 = \sin^2 x;$

$3\cos^2 x - 3\sin^2 x + 8\sin x \cdot \cos x + 5\sin^2 x + 5\cos^2 x - \sin^2 x = 0;$

$8\cos^2 x + 8\sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 0;$

$\operatorname{tg}^2 x + 8\operatorname{tg} x + 8 = 0;\quad \operatorname{tg} x = -4 \pm \sqrt{8} = -4 \pm 2\sqrt{2};$

$x = \operatorname{arctg}\left(-4 \pm 2\sqrt{2}\right) + \pi k.$

Ответ: $\left\{\operatorname{arctg}\left(-4 \pm 2\sqrt{2}\right) + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

3) $\arccos x = \operatorname{arctg} x.\qquad \left\{\begin{array}{l} \arccos x \in [0;\pi] \\ \operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right.,$

т. е. углы в левой и правой части располагаются в первой четверти, и косинус этих углов положителен.

Так как $\cos x = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$, то $x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}};$

$x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}};\quad x^4 + x^2 - 1 = 0;\quad x^2 = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2};$

$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \notin [0;\infty);\quad x^2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\quad \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \in (0;1] \\ x = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \notin (0;1] \end{array}\right..$

Ответ: $x = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}.$

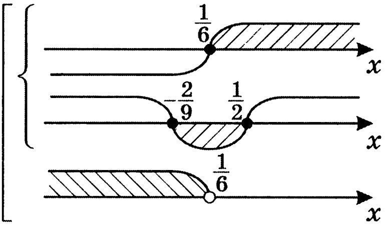
5. Решите неравенство[1] $\sqrt{5-2\sin x} \geqslant 6\sin x - 1$, если $x \in [0;\pi]$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6\sin x - 1 \geqslant 0 \\ 5 - 2\sin x \geqslant 36\sin^2 x - 12\sin x + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 6\sin x < 1 \\ 5 - 2\sin x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.;$$

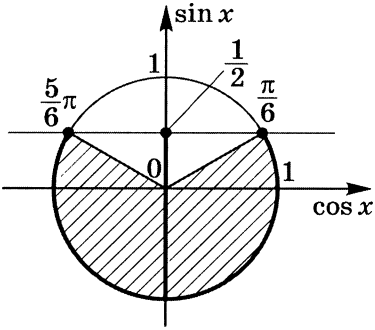
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x \geqslant \dfrac{1}{6} \\ 36\sin^2 x - 10\sin x - 4 \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < \dfrac{1}{6} \\ \sin x \leqslant 2{,}5 \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\sin x = t; \quad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{36} = \frac{5 \pm 13}{36};$$

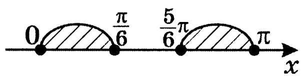
$$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = -\dfrac{2}{9} \end{array}\right.;$$



$$\sin x \leqslant \frac{1}{2};$$



Учитывая, что $x \in [0;\pi]$, получим



Ответ: $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}; \pi\right]$.

[1] Более подробно см. Шахмейстер А. Х. Иррациональные уравнения и неравенства. СПб.: «Петроглиф», 2008.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = 0{,}75 \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3 \end{cases}.$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = 0{,}75 \\ \dfrac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \dfrac{3}{4} & ① + ② \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{4} & ② - ① \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ \cos(x+y) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x - y = 2\pi k \\ x + y = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases};$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 2\pi k & ① + ② \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n & ② - ① \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 2\pi k & ① + ② \\ x + y = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n & ② - ① \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \pi(n+k) \\ y = \dfrac{\pi}{3} + \pi(n-k) \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi(n+k) \\ y = -\dfrac{\pi}{3} + \pi(n-k) \end{cases} \end{array}\right. \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

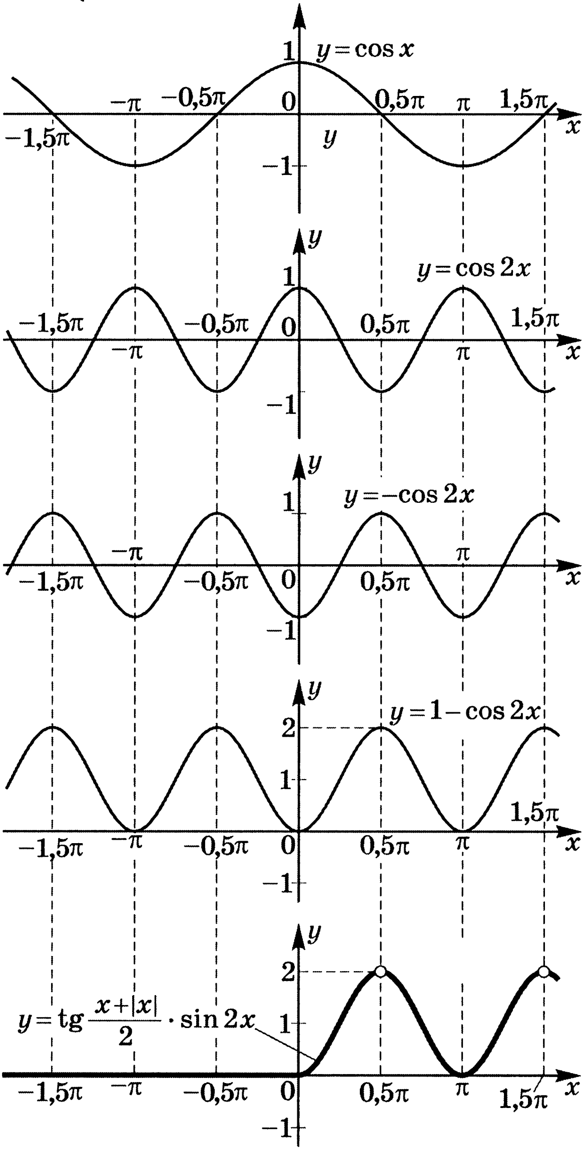
Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi(n+k); \dfrac{\pi}{3} + \pi(n-k)\right); \left(-\dfrac{\pi}{3} + \pi(n+k); -\dfrac{\pi}{3} + \pi(n-k)\right) \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

7. Постройте график $y = \operatorname{tg} \dfrac{x + |x|}{2} \cdot \sin 2x.$

$$y = \begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \sin 2x, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases};$$

$$y = \begin{cases} 2\sin^2 x, & x \geqslant 0 \text{ при } x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ 0, & x < 0 \end{cases};$$

$$y = \begin{cases} 1 - \cos 2x, & x \geqslant 0 \text{ при } x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$



Решение карточки 6

1. Вычислите $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ =$

$$= (\cos 24^\circ - \cos 84^\circ) + (\cos 48^\circ - \cos 12^\circ) =$$

$$= -2\sin 54^\circ \cdot \sin(-30^\circ) - 2\sin 30^\circ \cdot \sin 18^\circ =$$

$$= \sin 54^\circ - \sin 18^\circ = 2\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = 2\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ =$$

$$= \frac{2\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 144^\circ}{2\sin 36^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 36^\circ)}{2\sin 36^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{2\sin 36^\circ} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

2. Найдите $\alpha + 2\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ при $\alpha, \beta \in \mathrm{I}$.

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}2\beta};$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10}\sqrt{10}, \text{ поэтому } \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}.$$

$$\operatorname{tg}2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2 \cdot 3}{8} = \frac{3}{4}.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}2\beta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{4 + 21}{28 - 3} = \frac{25}{25} = 1.$$

$$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4} + \pi k, \text{ но } \begin{cases} 0 < \beta < \dfrac{\pi}{4} \\ 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}, \quad \left[\begin{array}{l} \text{так как } \dfrac{1}{\sqrt{10}} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \text{ то} \\ \sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{10}} < \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4}, \\ \text{т. е. } \beta < \dfrac{\pi}{4}. \end{array}\right]$$

значит, $0 < 2\beta < \frac{\pi}{2}$, и $0 < \alpha + 2\beta < \pi$.

При $k = 0$ $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$; при $k = 1$ $\alpha + 2\beta = \frac{5\pi}{4} \notin (0; \pi)$.

Это все возможные значения $\alpha + 2\beta \in (0; 1{,}5\pi)$.

Ответ: $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$.

3. Упростите $A(\alpha)=\dfrac{\sin^2 2\alpha+4\sin^4\alpha}{4-\sin^2 2\alpha-4\sin^4\alpha}$.

$$A(\alpha)=\frac{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+4\sin^4\alpha}{4-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-4\sin^4\alpha}=$$

$$=\frac{4\sin^2\alpha\cdot\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)}{4-4\sin^2\alpha\cdot\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{4\sin^2\alpha}{4-4\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha.$$

4. Докажите $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}<2$ для $\forall\alpha\in D(\text{H})$.

По условию $\cos\dfrac{\alpha}{2}\neq 0$

$\left(\text{условие существования } \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\quad \alpha\neq 2\pi n+\pi\right)$.

5.9 $$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}<2\Leftrightarrow\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}<2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos\alpha+\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}<2\Leftrightarrow$$

5.10 $$\Leftrightarrow\sin\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}<2\Leftrightarrow\qquad\left[\text{при }\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0\text{ и }\ \alpha\neq 2\pi n+\pi\right]$$

$$\Leftrightarrow\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}<2\Leftrightarrow 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}<2\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{\alpha}{2}<2\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1+\cos\alpha<2\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\alpha<1\\ \alpha\neq\pi k\end{cases}$ — истина, что и требовалось доказать.

5. Решите уравнения:

1) $39+7\sin^2 x+12\sin 2x=33\cos x+44\sin x$.

$30+9\cos^2 x+9\sin^2 x+7\sin^2 x+24\sin x\cdot\cos x=$
$=11(4\sin x+3\cos x)$;

$30+(4\sin x+3\cos x)^2=11(4\sin x+3\cos x)$.

Учтем, что $a\sin x + b\cos x =$
$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi_0) \in \left[-\sqrt{a^2+b^2}; \sqrt{a^2+b^2}\right]$,

где $\varphi_0 = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$.

Тогда $4\sin x + 3\cos x = 5\sin(x+\varphi_0) \in [-5;5]$.

Обозначим $t = 4\sin x + 3\cos x$, тогда

$t^2 - 11t + 30 = 0;\quad \left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=6 \end{array}\right.;$

$\left[\begin{array}{l} 4\sin x + 3\cos x = 5 \\ 4\sin x + 3\cos x = 6 \notin E(y = 4\sin x + 3\cos x) \end{array}\right.;$

$4\sin x + 3\cos x = 5;\quad \dfrac{4}{5}\sin x + \dfrac{3}{5}\cos x = 1;$

$\begin{cases} \dfrac{3}{5} = \cos\varphi_0 \\ \dfrac{4}{5} = \sin\varphi_0 \end{cases};\quad \varphi_0 = \arccos\dfrac{3}{5}\quad (\varphi_0 \in \mathrm{I});$

$\cos\varphi_0 \cdot \cos x + \sin\varphi_0 \cdot \sin x = 1;$

$\cos(x - \varphi_0) = 1;\quad x - \varphi_0 = 2\pi k.$

Ответ: $x = \arccos\dfrac{3}{5} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \dfrac{1}{8}$.

а) $x \neq \pi k;\quad \dfrac{\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x}{\sin x} = \dfrac{1}{8};$

$\dfrac{\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x}{2\sin x} = \dfrac{1}{8};\quad \dfrac{\sin 4x \cdot \cos 4x}{4\sin x} = \dfrac{1}{8};$

$\dfrac{\sin 8x}{8\sin x} = \dfrac{1}{8};\quad \sin 8x - \sin x = 0;$

$2\sin 3{,}5x \cdot \cos 4{,}5x = 0;$

$\left[\begin{array}{l} 3{,}5x = \pi k \\ 4{,}5x = \pi t + \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{2\pi}{7}k & k \not\vdots\, 7 \\ x = \dfrac{2\pi}{9}t + \dfrac{\pi}{9} & (2t+1) \not\vdots\, 9 \end{array}\right..$

б) $x = \pi k; \quad \cos\pi k \cdot \cos 2\pi k \cdot \cos 4\pi k = \dfrac{1}{8};$

$\cos\pi k = \dfrac{1}{8}$ — ложно, т. е. $x = \pi k$ корнем уравнения не является.

Ответ: $\left\{\dfrac{2\pi}{7}k; \dfrac{2\pi}{9}t + \dfrac{\pi}{9} \mid k, t \in \mathbb{Z},\ k \not\vdots\ 7,\ (2t+1) \not\vdots\ 9\right\}.$

3) $\arcsin(x^2 - 2x + 2) = \dfrac{\pi}{2}x.$

Выясним, чему равно D(У).

$|x^2 - 2x + 2| \leqslant 1; \quad \begin{cases} x^2 - 2x + 2 \leqslant 1 \\ x^2 - 2x + 2 \geqslant -1 \end{cases};$

$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \leqslant 0 \\ x^2 - 2x + 3 \geqslant 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (x-1)^2 \leqslant 0 \\ \forall x \end{cases}; \quad x = 1.$

Проверим: $\arcsin(1 - 2 + 2) = \dfrac{\pi}{2}; \quad \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2};$

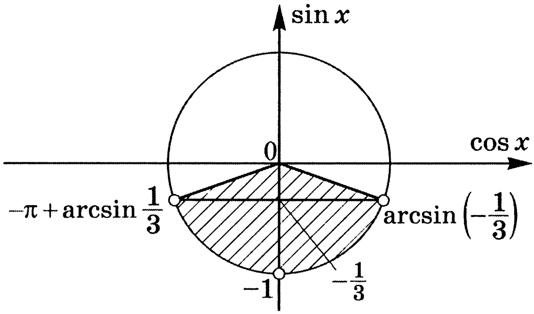
$\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ — истинно.

Ответ: $x = 1$.

6. Решите неравенство $3\cos^2 x \cdot \sin x - \sin^2 x < -1$.

$3\cos^2 x \cdot \sin x + \cos^2 x < 0; \quad \cos^2 x(3\sin x + 1) < 0;$

$\begin{cases} \cos^2 x \neq 0 \\ \sin x < -\dfrac{1}{3} \end{cases}$



Ответ: $\left\{\left(-\pi + \arcsin\dfrac{1}{3} + 2\pi k; -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right);\right.$
$\left.\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; -\arcsin\dfrac{1}{3} + 2\pi n\right) \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=\pi \\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} z=2 \\ \operatorname{tg} y\cdot\operatorname{tg} z=18 \end{cases}$.

$$\begin{cases} z=\pi-(x+y) \\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left[\pi-(x+y)\right]=2 \\ 9\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y \end{cases};\qquad \begin{cases} z=\pi-(x+y) \\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}(x+y)=-2 \\ 9\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y \end{cases};$$

$$\begin{cases} z=\pi-(x+y) \\ \dfrac{\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y)}{1-\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y}=-2 \\ 9\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y \end{cases};$$

$$\frac{\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x+9\operatorname{tg} x)}{1-9\operatorname{tg}^2 x}=-2;\quad \operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{4}\ \left(\operatorname{tg}^2 x\neq\frac{1}{9}\right);$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \operatorname{tg} x=\dfrac{1}{2} \\ \operatorname{tg} y=\dfrac{9}{2} \\ \operatorname{tg} z=4 \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{tg} x=-\dfrac{1}{2} \\ \operatorname{tg} y=-\dfrac{9}{2} \\ \operatorname{tg} z=-4 \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} \left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\pi k;\operatorname{arctg}\dfrac{9}{2}+\pi n;\operatorname{arctg}4+\pi t\right) \\ \left(\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\pi p;\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{9}{2}\right)+\pi m;\operatorname{arctg}(-4)+\pi l\right) \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\pi k;\operatorname{arctg}\dfrac{9}{2}+\pi n;\operatorname{arctg}4+\pi t\right);\right.$
$\left(\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\pi p;\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{9}{2}\right)+\pi m;\operatorname{arctg}(-4)+\pi l\right)$
$\left.\mid k,t,n,p,m,l\in\mathbb{Z}\right\}$.

8. Постройте график

$$y = \frac{2\sin^2(45^\circ + x)\cdot\sin 10^\circ - 1 + 4\sin 70^\circ\cdot\sin 10^\circ}{4\sin 10^\circ\cdot\mathrm{tg}(45^\circ + x)\cdot\cos^2(45^\circ + x)}.$$

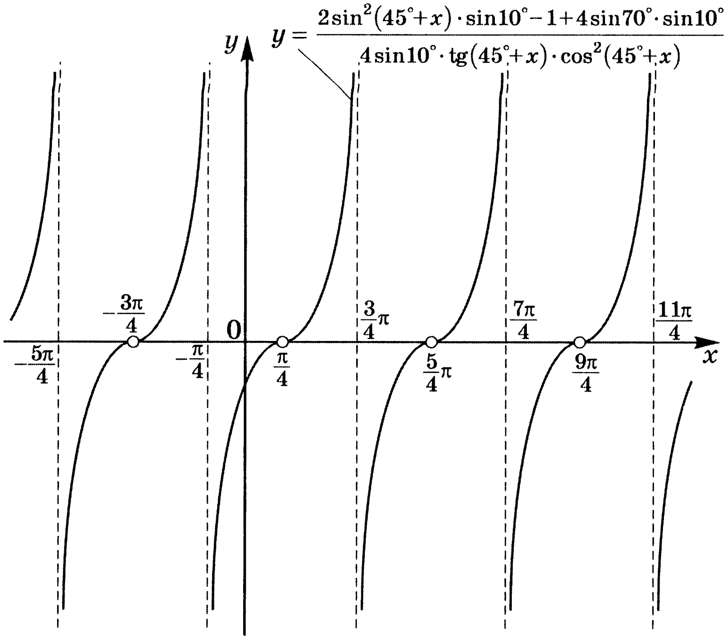
$$y = \frac{[1 - \cos(90^\circ + 2x)]\cdot\sin 10^\circ - 1 + 2[\cos 60^\circ - \cos 80^\circ]}{4\sin 10^\circ\cdot\sin(45^\circ + x)\cdot\cos(45^\circ + x)} =$$

$$= \frac{\sin 10^\circ + \sin 2x\cdot\sin 10^\circ - 1 + 1 - 2\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ\cdot\sin(90^\circ + 2x)} =$$

$$= \frac{\sin 10^\circ\cdot(\sin 2x - 1)}{2\sin 10^\circ\cdot\cos 2x} = -\frac{1}{2}\,\frac{(\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Таким образом, $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \pi k \end{cases}.$



Решение карточки 7

1. Вычислите $\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{12}+\operatorname{tg}^2\dfrac{3\pi}{12}+\operatorname{tg}^2\dfrac{5\pi}{12}=$

$$=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}+1+\frac{1-\cos\frac{5\pi}{6}}{1+\cos\frac{5\pi}{6}}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}+1+\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{1-\cos\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)^2+1-\cos^2\frac{\pi}{6}+\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}{1-\cos^2\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{1-2\cos\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}+1+2\cos\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}}{\sin^2\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{3+\cos^2\frac{\pi}{6}}{\sin^2\frac{\pi}{6}}=\frac{3+\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=\boxed{15}.$$

2. Докажите:

1) $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\geqslant\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}$, где $\alpha,\beta\in\mathrm{I}$.

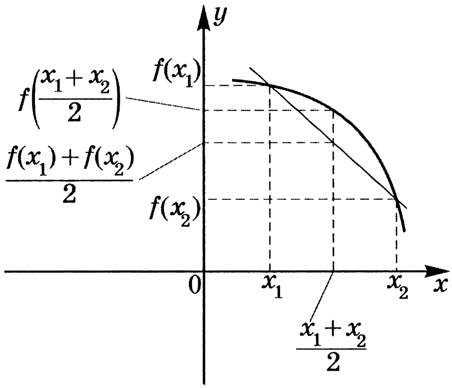
$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\geqslant\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\geqslant 0 \text{ — истинно, так как}$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\geqslant 0\quad\forall\alpha,\beta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right],\qquad\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 1\quad\forall\alpha,\beta.$$

Примечание. Из определения выпуклости функции вверх на множестве M (функция называется выпуклой вверх, если $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ для $\forall x_1,x_2\in M$) следует, что мы доказали выпуклость $y=\cos x$ вверх на $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, что графически очевидно.



2) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}} - \arcsin\frac{12}{13}\right) = -\frac{119}{120}$.

Обозначим $\alpha = \arccos\frac{5}{\sqrt{26}}$, $\beta = \arcsin\frac{12}{13}$.

$$\mathrm{L} = \operatorname{tg}(2\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};\quad \arccos\frac{5}{\sqrt{26}} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}\right) = \frac{\sin\left(\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}\right)}{\cos\left(\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2}}{\frac{5}{\sqrt{26}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{26}}}{\frac{5}{\sqrt{26}}} = \frac{1}{5};$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12};$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right) = \frac{\sin\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)}{\cos\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{12}{13}}{\sqrt{1-\frac{144}{169}}} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}.$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)=\frac{\frac{5}{12}-\frac{12}{5}}{1+\frac{5}{12}\cdot\frac{12}{5}}=\frac{\frac{25-144}{60}}{2}=-\frac{119}{120};$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{L}&=-\frac{119}{120}\\ \Pi&=-\frac{119}{120}\end{aligned}\right|\Rightarrow \mathrm{L}=\Pi.$$

3. Найдите $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, если $\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=-\dfrac{21}{65}\\ \cos\alpha+\cos\beta=-\dfrac{27}{65}\end{cases}$

при $2{,}5\pi<\alpha<3\pi$, $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$.

$$\begin{cases}2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=-\dfrac{21}{65}\\ 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=-\dfrac{27}{65}\end{cases}.$$

Тогда $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{7}{9}$.

Учитывая, что $2\pi<\alpha+\beta<3\pi$, $\pi<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\dfrac{3\pi}{2}$, получаем $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}<0$ и $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}<0$.

Значит, $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}}$;

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\frac{7}{9}}{-\sqrt{1+\frac{49}{81}}}=-\frac{7}{\sqrt{130}}=\boxed{-\frac{7}{130}\sqrt{130}}.$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}};$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{49}{81}}}=-\frac{9}{\sqrt{130}}=\boxed{-\frac{9}{130}\sqrt{130}}.$$

4. Решите уравнения:

1) $\dfrac{\cos^2 x(1+\operatorname{ctg} x)}{\sin x - \cos x} = 3\cos x.$

$D(У):\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}$ и $\sin x \neq 0;\quad x \neq \pi n \,|\, n \in \mathbb{Z}.$

а) $\cos x = 0;\quad x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \,|\, n \in \mathbb{Z}$, тогда $\dfrac{\pi}{2} + \pi n \in D(У);$

б) $\operatorname{ctg} x \cdot \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = 3;\quad \operatorname{ctg} x \cdot \dfrac{1+\operatorname{ctg} x}{1-\operatorname{ctg} x} = 3.$

Обозначим $\operatorname{ctg} x = t;$

$t(1+t) = 3(1-t);\quad t^2 + 4t - 3 = 0;\quad t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{7};$

$$\left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arcctg}\left(-2 \pm \sqrt{7}\right) + \pi k \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arcctg}\left(-2 \pm \sqrt{7}\right) + \pi k \,|\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

2) $(1 + 2\cos 2x)\cdot \sin x + (1 - 2\cos 2x)\cdot \cos x = 0$

при $\pi < \left|2x - \dfrac{\pi}{2}\right| \leqslant \dfrac{7\pi}{3}.$

Так как $\cos x = 0$ не является решением уравнения, можно разделить обе части уравнения на $\cos x$:

$\operatorname{tg} x = \dfrac{2\cos 2x - 1}{1 + 2\cos 2x};\quad \cos 2x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$

Обозначим $t = \operatorname{tg} x$. Тогда $t = \dfrac{\frac{2(1-t^2)}{1+t^2} - 1}{1 + \frac{2(1-t^2)}{1+t^2}};$

$t = \dfrac{2 - 2t^2 - 1 - t^2}{1 + t^2 + 2 - 2t^2};\quad t \neq \pm\sqrt{3};$

$t(3 - t^2) = 1 - 3t^2;\quad t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = 0;$

$(t+1)(t^2 - t + 1) - 3t(t+1) = 0;\quad (t+1)(t^2 - 4t + 1) = 0;$

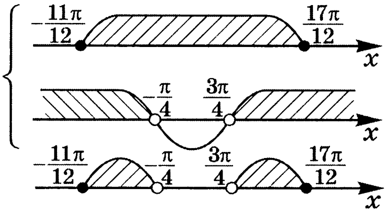
а) $t = -1;\quad x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z};$

б) $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3};\quad \operatorname{tg} x = 2 \pm \sqrt{3};$
$x = \operatorname{arctg}\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + \pi n \,|\, n \in \mathbb{Z}.$

Отметим, что $\pm\sqrt{3} \notin \left\{-1; 2 \pm \sqrt{3}\right\}$.

Расшифруем условия:

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{\pi}{2} \leqslant \dfrac{7\pi}{3} \\ 2x - \dfrac{\pi}{2} \geqslant -\dfrac{7\pi}{3} \\ \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{2} > \pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{2} < -\pi \end{array}\right. \end{cases};$$



$$M = \left[-\frac{11\pi}{12}; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \frac{17\pi}{12}\right].$$

а) $x_1 = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k \notin M$: $\begin{array}{ll} k = -1: & (x_1)_1 \notin M \\ k = 0: & (x_1)_2 \notin M. \\ k = 1: & (x_1)_3 \notin M \end{array}$

б) $x_2 = \operatorname{arctg}\left(2 - \sqrt{3}\right) + \pi n$. Вычислим $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}$.

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{1 + \cos\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\left(2 - \sqrt{3}\right)^2}{4 - 3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Проверим принадлежность $x_2 = \dfrac{\pi}{12} + \pi n \in M$:

$$\begin{array}{ll} n = -1: & (x_2)_1 = -\dfrac{11\pi}{12} \in M \\ n = 0: & (x_2)_2 = \dfrac{\pi}{12} \notin M \\ n = 1: & (x_2)_3 = \dfrac{13\pi}{12} \in M \end{array}.$$

в) Аналогично: $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\frac{5\pi}{6}}{1 + \cos\frac{5\pi}{6}}} = \sqrt{\dfrac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}} =$

$$= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2}{4 - 3}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Проверим $x_3 = \dfrac{5\pi}{12} + \pi t \in M \ (t \in \mathbb{Z})$:

$t = -1$: $(x_3)_1 = -\dfrac{7\pi}{12} \in M$

$t = 0$: $\quad (x_3)_2 = \dfrac{5\pi}{12} \notin M$.

$t = 1$: $\quad (x_3)_3 = \dfrac{17\pi}{12} \in M$

Ответ: $\left\{-\dfrac{11\pi}{12}; -\dfrac{7\pi}{12}; \dfrac{13\pi}{12}; \dfrac{17\pi}{12}\right\}$.

3) $\sin^5 x - \cos^5 x = \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\sin x}$. $\qquad D(У): \ x \neq \dfrac{\pi}{2}k$.

$$(\sin x - \cos x) \cdot \Big[\sin x \cdot \cos x \cdot (\sin^4 x + \sin^3 x \cdot \cos x +$$
$$+ \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot \cos^3 x + \cos^4 x) - 1\Big] = 0;$$

а) $\sin x - \cos x = 0$; $\quad x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k \in D(y)$.

б) $\sin x \cdot \cos x \cdot \Big(\sin^4 x + \cos^4 x +$
$+ \sin x \cdot \cos x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin^2 x \cdot \cos^2 x\Big) = 1$;

$\sin x \cdot \cos x \cdot \Big[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x +$
$+ \sin x \cdot \cos x\Big] = 1$.

Обозначим $\sin x \cdot \cos x = t$. Тогда

$t(1 - t^2 + t) = 1$; $\quad t^3 - t^2 - t + 1 = 0$;

$t^2(t-1) - (t-1) = 0$; $\quad (t-1)^2(t+1) = 0$;

$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} \sin x \cdot \cos x = 1 \\ \sin x \cdot \cos x = -1 \end{array}\right.$; .

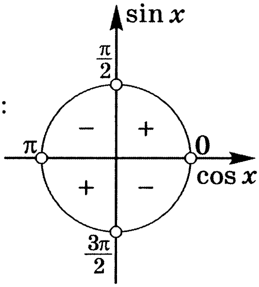
$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 2 \notin E(\sin x) \\ \sin 2x = -2 \notin E(\sin x) \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. Решите неравенство $\dfrac{\sin 3x \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2x} \leqslant 0$ на $[0; 2\pi]$.

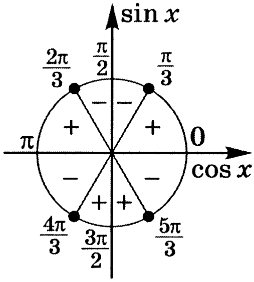
а) $\sin 2x \neq 0$: $x \neq \dfrac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}$.

Чередование знаков для $y = \dfrac{1}{\sin 2x}$:



б) $\sin 3x = 0$: $x = \dfrac{\pi}{3}n \mid n \in \mathbb{Z}$.

Чередование знаков для $y = \sin 3x$:

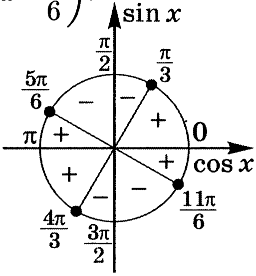


в) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$;

$2x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + \pi m$; $\quad 2x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2} + \pi m \mid m \in \mathbb{Z}$;

$2x = \dfrac{2\pi}{3} + \pi m$; $\quad x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}m$.

Чередование знаков для $y = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$:



	$\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6};\pi\right)$	$\left(\pi;\frac{7\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{6};\frac{4\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{4\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3};\frac{11\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{11\pi}{6};2\pi\right)$
$y=\dfrac{1}{\sin 2x}$	+	+	+	−	−	−	+	+	+	−	−	−
$y=\sin 3x$	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−
$y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$	+	+	−	−	−	+	+	+	−	−	−	+
$y=\dfrac{\sin 3x\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2x}$	+	+	+	−	+	−	−	−	−	+	−	+

Итак, $\dfrac{\sin 3x\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2x}\leqslant 0$, если

$$x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};\pi\right)\cup\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left[\frac{5\pi}{3};\frac{11\pi}{6}\right].$$

6. Решите систему уравнений $\begin{cases}\operatorname{ctg}x+\sin 2y=\sin 2x\\ 2\sin y\cdot\sin(x+y)=\cos x\end{cases}.$

$$\begin{cases}\operatorname{ctg}x+\sin 2y=\sin 2x\\ \cos(y-x-y)-\cos(x+2y)=\cos x\end{cases};$$

$$\begin{cases}\operatorname{ctg}x+\sin 2y=\sin 2x\\ \cos(x+2y)=0\end{cases};$$

$$\begin{cases}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-2y+\pi k\right)+\sin 2y=\sin 2\left(-2y+\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)\\ x\neq\pi n\\ x+2y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\end{cases};$$

$$\begin{cases}\operatorname{tg}2y+\sin 2y=\sin(\pi-4y)\\ x+2y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ x\neq\pi n\end{cases};$$

$$\begin{cases}\dfrac{\sin 2y}{\cos 2y}+\sin 2y=\sin 4y\\ x=-2y+\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ x\neq\pi n\end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sin 2y}{\cos 2y}\left(1+\cos 2y-2\cos^2 2y\right)=0 \\ x\neq \pi n \\ x=-2y+\dfrac{\pi}{2}+\pi k \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 2y=0 \\ \cos 2y=1 \\ \cos 2y=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ x\neq \pi n \\ x=-2y+\dfrac{\pi}{2}+\pi k \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{\pi}{2}p \\ y=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi t \end{array}\right. \\ x\neq \pi n \\ x=-2y+\dfrac{\pi}{2}+\pi k \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\dfrac{\pi}{2}p \\ x=\dfrac{\pi}{2}+(k-p)\pi \end{cases} \in D(\mathrm{C}) \\ \begin{cases} y=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi t \\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}+(k-2t)\pi \end{cases} \in D(\mathrm{C}) \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{2}+(k-p)\pi; \dfrac{\pi}{2}p\right);\right.$

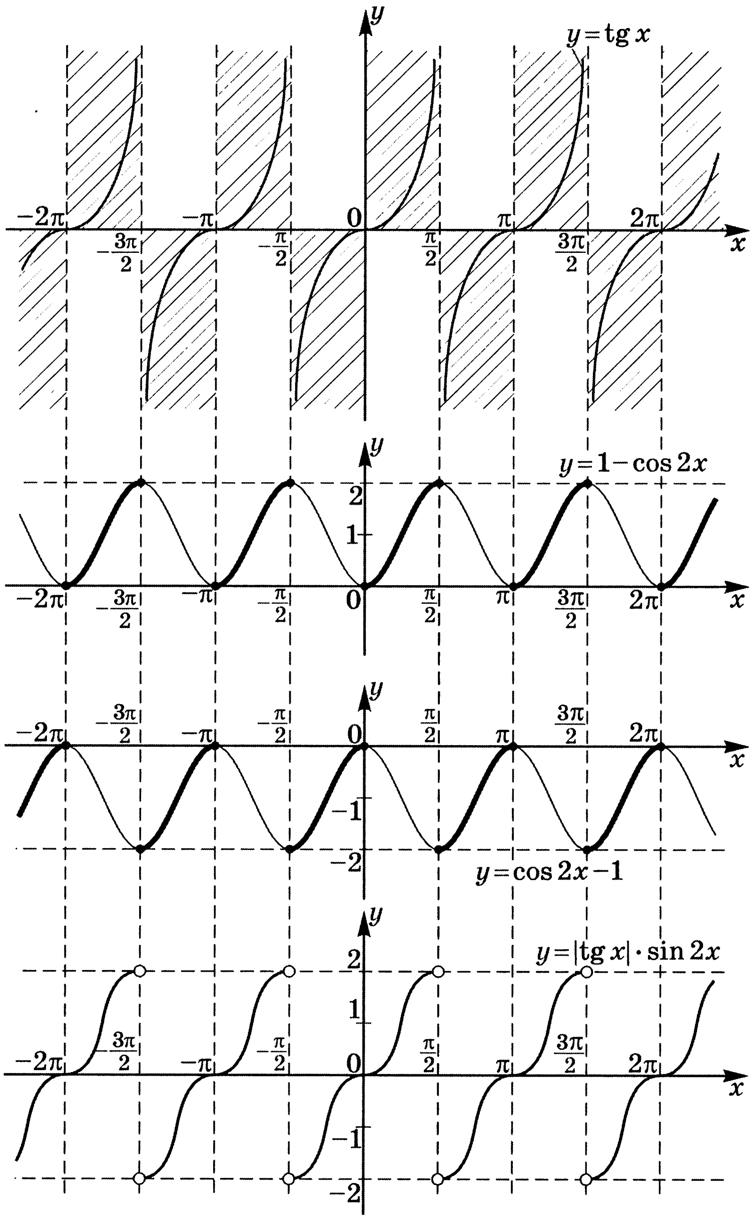
$\left.\left(\pm\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}+(k-2t)\pi; \pm\dfrac{\pi}{3}+\pi t\right) \mid p,t,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

7. Постройте график $y=|\operatorname{tg} x|\cdot\sin 2x$.

$$y=\begin{cases} \operatorname{tg} x\cdot\sin 2x, & \operatorname{tg} x\geqslant 0 \\ -\operatorname{tg} x\cdot\sin 2x, & \operatorname{tg} x<0 \end{cases};$$

$$y=\begin{cases} 2\sin^2 x, & \operatorname{tg} x\geqslant 0 \\ -2\sin^2 x, & \operatorname{tg} x<0 \end{cases};$$

$$y=\begin{cases} 1-\cos 2x, & \operatorname{tg} x\geqslant 0 \\ \cos 2x-1, & \operatorname{tg} x<0 \end{cases}.$$


y
y = tg x
−2π
−π
0
π
2π
x
−3π/2
−π/2
π/2
3π/2
y = 1 − cos 2x
2
1
y = cos 2x − 1
−1
−2
y = |tg x| · sin 2x

Решение карточки 8

1. Упростите:

1) $$\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{2}\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha + 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha}{2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha + 2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

2) $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}(60^\circ+\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(60^\circ-\alpha) =$

$$= \frac{\cos\alpha\cdot\cos(60^\circ+\alpha)\cdot\cos(60^\circ-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin(60^\circ-\alpha)} =$$

$$= -\frac{\cos\alpha\,[\cos(\alpha+60^\circ+\alpha-60^\circ)+\cos(\alpha+60^\circ-\alpha+60^\circ)]}{\sin\alpha\,[\cos(\alpha+60^\circ-\alpha+60^\circ)-\cos(\alpha+60^\circ+\alpha-60^\circ)]} =$$

$$= -\frac{\cos\alpha(\cos 120^\circ+\cos 2\alpha)}{\sin\alpha(\cos 120^\circ-\cos 2\alpha)} = \frac{\cos\alpha\left(\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\sin\alpha\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\cos\alpha\left[2(2\cos^2\alpha-1)-1\right]}{\sin\alpha\left[2(2\cos^2\alpha-1)+1\right]} = \frac{\cos\alpha(4\cos^2\alpha-3)}{\sin\alpha(4\cos^2\alpha-1)} =$$

$$= \frac{4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\left[4(1-\sin^2\alpha)-1\right]} = \frac{4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha} =$$

$$= \frac{\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha.$$

2. Вычислите $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7} =$

$$= \frac{\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= -\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

3. Докажите $\cos 36° > \operatorname{tg} 36°$.

$\cos 36° > \operatorname{tg} 36° \Leftrightarrow \cos^2 36° > \sin 36° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \cos 72° > 2\sin 36° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \sin 18° > 2\sin 6° \cdot \cos 30° + 2\sin 30° \cdot \cos 6° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + 2\sin 9° \cdot \cos 9° > 2\sin 6° \cdot \cos 30° + \cos 6°$.

С другой стороны, $\sin 9° > \sin 6°$, $\quad \cos 9° > \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin 9° \cdot \cos 9° > 2\sin 6° \cdot \cos 30°$;

$1 > \cos 6°$, $\quad 2\sin 9° \cdot \cos 9° > 2\sin 6° \cdot \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + 2\sin 9° \cdot \cos 9° > 2\sin 6° \cdot \cos 30° + \cos 6°$ — верное утверждение.

Значит, предположение о выполнении неравенства $\cos 36° > \operatorname{tg} 36°$ также истинно, что и требовалось доказать.

4. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg}(x - 15°) \cdot \operatorname{ctg}(x + 15°) = \dfrac{1}{3}$.

7.9

$$\frac{\sin(x - 15°) \cdot \cos(x + 15°)}{\cos(x - 15°) \cdot \sin(x + 15°)} = \frac{1}{3};$$

$$\frac{\sin 2x - \frac{1}{2}}{\sin 2x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}; \quad 3\sin 2x - 1{,}5 = \sin 2x + \frac{1}{2};$$

$$\sin 2x = 1; \quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2) $\arcsin \dfrac{x}{2} + \arccos\left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

$$\arcsin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} - \arccos\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\sin\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \arccos\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right);$$

$$\frac{x}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\left(\arccos\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)-\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin\left(\arccos\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right);$$

$\arccos m\in[0;\pi]$, значит $\sin(\arccos m)\geqslant 0$;

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};\quad \sin\left(\arccos\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\sqrt{1-\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2};$$

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos\left(\arccos\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=x+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{1-\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sqrt{1-\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2};\quad 1-\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4};$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0;\qquad \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Проверим:

а) $x=0$; $\quad\arcsin 0+\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{6}$;

$0+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$ — истинно.

б) $x=-\sqrt{3}$; $\quad\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$;

$-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$; $\quad\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{6}$ — ложно.

Ответ: $x=0$.

3) $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x.\qquad D(У):\ x\neq\dfrac{\pi}{2}k;$

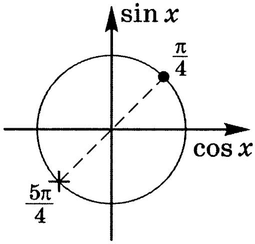
$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cdot\cos x};$$

$$2\sin x\cdot\cos x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1;$$

$$\sin 2x \cdot \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1;$$

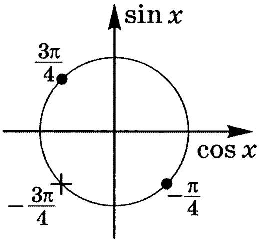
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 2x = 1\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 2x=-1\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\end{cases}\end{array}\right. ; \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n\end{cases}\\ \begin{cases}2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi t\\ x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2\pi p\end{cases}\end{array}\right. ;$$

$$\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\pi k\\ x=\frac{\pi}{4}+2\pi n\end{cases}$$



$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$$

$$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{4}+\pi t\\ x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi p\end{cases}$$



$$\emptyset$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

5. Решите неравенство $4\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x>\sin 4x$.

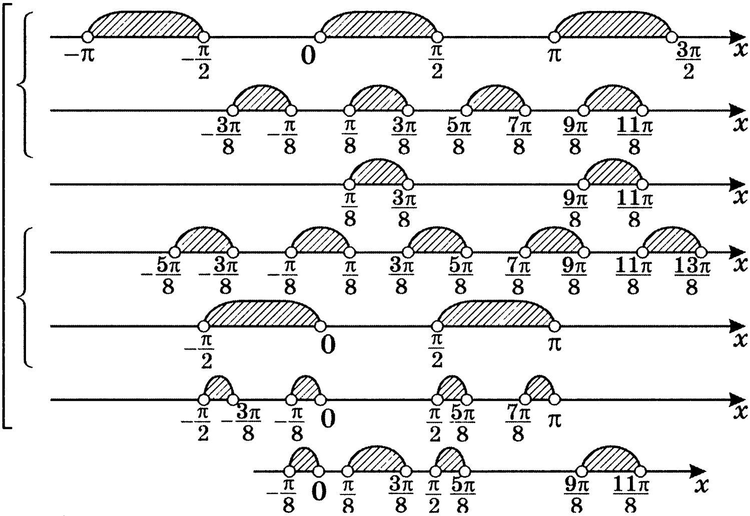
$$2\sin 2x\cdot(\cos 2x-\cos 4x)>\sin 4x;$$

$$2\sin 2x\cdot(\cos 2x-\cos 4x-\cos 2x)>0;$$

$$2\sin 2x\cdot(-\cos 4x)>0; \qquad \sin 2x\cdot\cos 4x<0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 2x > 0\\ \cos 4x < 0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 2x < 0\\ \cos 4x > 0\end{cases}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\pi + 2\pi k > 2x > 2\pi k\\ \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n > 4x > \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\end{cases}\\ \begin{cases}2\pi + 2\pi t > 2x > \pi + 2\pi t\\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi p > 4x > -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi p\end{cases}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} + \pi k > x > \pi k\\ \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}n > x > \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}n\end{cases}\\ \begin{cases}\pi + \pi t > x > \dfrac{\pi}{2} + \pi t\\ \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}p > x > -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}p\end{cases}\end{array}\right.;$$



а) $\left(\dfrac{\pi}{8} + \pi k; \dfrac{3\pi}{8} + \pi k\right)$;

б) $\left(-\dfrac{\pi}{8} + \pi n; \pi n\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi t; \dfrac{5\pi}{8} + \pi t\right)$.

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{8} + \pi k; \dfrac{3\pi}{8} + \pi k\right); \left(-\dfrac{\pi}{8} + \pi n; \pi n\right); \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi t; \dfrac{5\pi}{8} + \pi t\right) \mid k, n, t \in \mathbb{Z}\right\}$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x - \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$

$$\begin{cases} \sin^2 x = \sin^2 y + \sin y + \dfrac{1}{4} \\ \cos^2 x = \dfrac{3}{4} - \sqrt{3}\cos y + \cos^2 y \end{cases} \quad (1) + (2)$$

$1 = 1 + 1 + \sin y - \sqrt{3}\cos y; \quad \sin y - \sqrt{3}\cos y = -1;$

$\dfrac{1}{2}\sin y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos y = -\dfrac{1}{2}; \quad \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + y\right) = \dfrac{1}{2};$

$\dfrac{\pi}{6} + y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad y = -\dfrac{\pi}{6} \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;$

$$\begin{cases} \sin y = \sin x - \dfrac{1}{2} \\ \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin^2 y = \sin^2 x - \sin x + \dfrac{1}{4}; \\ \cos^2 y = \dfrac{3}{4} - \sqrt{3}\cos x + \cos^2 x; \end{cases};$$

$1 = 1 + 1 - \left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right);$

$\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2};$

$x - \dfrac{\pi}{6} = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n; \quad x = \dfrac{\pi}{6} \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n.$

Значит, $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \\ y = -\dfrac{\pi}{6} \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}.$

Проведем проверку при $k = 0, \quad n = 0.$

а) $\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}\right) = \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{2} - \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \\ \cos\dfrac{\pi}{2} + \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ — истинно.}$$

б) $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2} \\ \cos\frac{\pi}{2}+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \emptyset.$$

в) $\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \\ \cos\frac{\pi}{6}+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \emptyset.$$

г) $\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\left(-\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2} \\ \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{— истинно.}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right);\right.$

$\left.\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

7. Постройте график $y=\sqrt{1-\sin 2x}+\sin x+\cos x$.

$1-\sin 2x=(\sin x-\cos x)^2$;

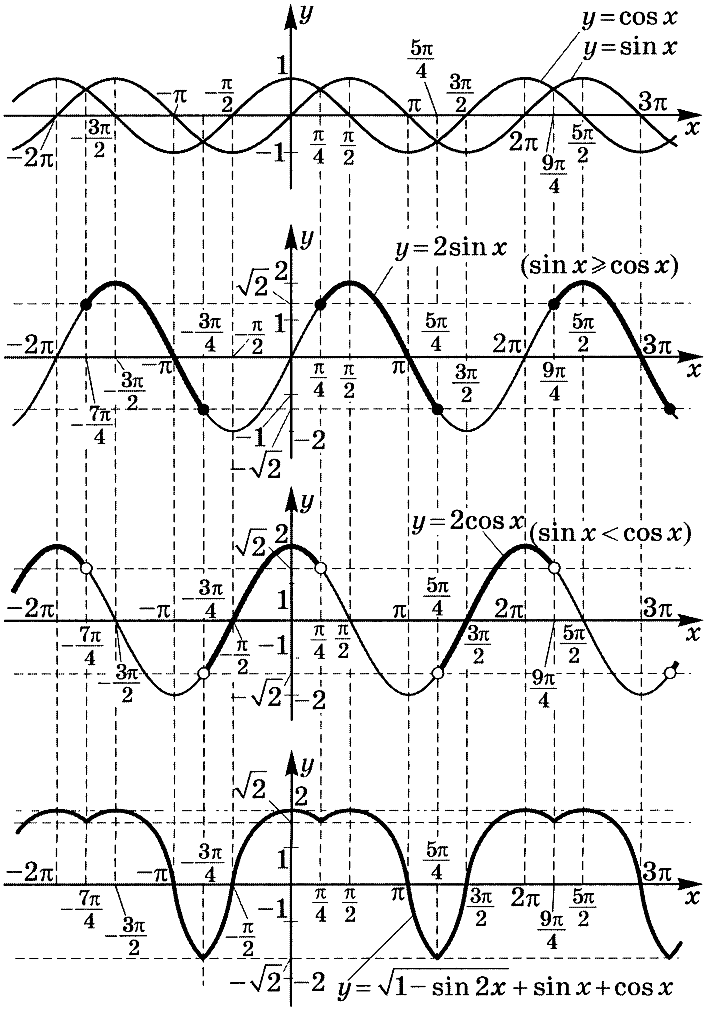
$y=|\sin x-\cos x|+\sin x+\cos x$;

а) $\begin{cases} \sin x \geqslant \cos x \\ y=2\sin x \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{5\pi}{4}+2\pi k \geqslant x \geqslant \frac{\pi}{4}+2\pi k \\ y=2\sin x \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \sin x < \cos x \\ y=2\cos x \end{cases}$; $\begin{cases} -\frac{3\pi}{4}+2\pi n < x < \frac{\pi}{4}+2\pi n \\ y=2\cos x \end{cases}$;

$$\sin x \geqslant \cos x \ \text{ на } \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right];$$

$$\sin x < \cos x \ \text{ на } \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right).$$



Решение карточки 9

1. Упростите $\dfrac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha; \quad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$

Поэтому $\dfrac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\sin\alpha} =$

$$= \frac{\cos^3\alpha - 4\cos^3\alpha + 3\cos\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin^3\alpha + 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{3\cos\alpha - 3\cos^3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{3\sin\alpha - 3\sin^3\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= 3 - 3\cos^2\alpha + 3 - 3\sin^2\alpha = 6 - 3(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 6 - 3 = 3.$$

2. Докажите тождества:

1) $\dfrac{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg}^4\alpha.$

$$\mathrm{L} = \frac{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} =$$

$$= \frac{3 + 4(2\cos^2\alpha - 1) + 2\cos^2 2\alpha - 1}{3 - 4(2\cos^2\alpha - 1) + 2\cos^2 2\alpha - 1} =$$

$$= \frac{8\cos^2\alpha - 1 + 2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1}{-8\cos^2\alpha + 6 + 2(2\cos^2\alpha - 1)^2} =$$

$$= \frac{8\cos^2\alpha - 1 + 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 2 - 1}{-8\cos^2\alpha + 6 + 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 2} =$$

$$= \frac{8\cos^4\alpha}{8(1 - \cos^2\alpha) + 8\cos^2\alpha(\cos^2\alpha - 1)} =$$

$$= \frac{8\cos^4\alpha}{8\sin^2\alpha - 8\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{8\cos^4\alpha}{8\sin^2\alpha(1 - \cos^2\alpha)} = \frac{8\cos^4\alpha}{8\sin^4\alpha} = \operatorname{ctg}^4\alpha;$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L} = \operatorname{ctg}^4\alpha \\ \Pi = \operatorname{ctg}^4\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

2) $\operatorname{tg}^2 36^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 72^\circ = 5.$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \cos 36^\circ; \quad \cos\frac{2\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = -\cos\frac{3\pi}{5};$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = 0; \quad 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1 + 4\cos^3\frac{\pi}{5} - 3\cos\frac{\pi}{5} = 0;$$

$$4\cos^3\frac{\pi}{5} + 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 3\cos\frac{\pi}{5} - 1 = 0.$$

Обозначим $\cos\frac{\pi}{5} = t$:

$$\begin{array}{r|l}
4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 & t+1 \\
\underline{4t^3 + 4t^2 \qquad\qquad} & \overline{4t^2 - 2t - 1} \\
-2t^2 - 3t - 1 & \\
\underline{-2t^2 - 2t \quad\;\;} & \\
-t - 1 & \\
\underline{-t - 1} &
\end{array}$$

$$(t+1)(4t^2 - 2t - 1) = 0;$$

$$\cos\frac{\pi}{5} \neq -1 \Rightarrow 4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} - 1 = 0;$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}; \quad \cos\frac{\pi}{5} > 0 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} = 2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{5+1+2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4};$$

$$\cos^2\frac{\pi}{5} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8};$$

$$\sin^2\frac{\pi}{5} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{5} = 1 - \frac{3+\sqrt{5}}{8} = \frac{5-\sqrt{5}}{8};$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{5}}{\cos^2\frac{\pi}{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}};$$

$$\cos^2\frac{2\pi}{5} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{5+1-2\sqrt{5}}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8};$$

$$\sin^2\frac{2\pi}{5} = 1 - \cos^2\frac{2\pi}{5} = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{8} = \frac{5+\sqrt{5}}{8};$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{5}=\frac{5+\sqrt5}{3-\sqrt5};$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{5}=\frac{(5-\sqrt5)\,(5+\sqrt5)}{(3-\sqrt5)\,(3+\sqrt5)}=\frac{25-5}{9-5}=\frac{20}{4}=5,$$

что и требовалось доказать.

3. Решите уравнения:

1) $\dfrac{1+2\cos2x}{2\cos x}=\operatorname{tg}^2x-3$, если $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

$D(\text{У}):\ \cos x\neq 0;$

$$\frac{1+2(2\cos^2x-1)}{2\cos x}=\frac{1}{\cos^2x}-1-3;$$

$$\frac{1}{\cos^2x}=1+\operatorname{tg}^2x;\qquad \cos x\cdot(4\cos^2x-1)=2(1-4\cos^2x);$$

$$(4\cos^2x-1)(\cos x+2)=0;\qquad (2+2\cos2x-1)(\cos x+2)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=-2\notin E(\cos x)\\ \cos 2x=-\dfrac12;\quad 2x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k\end{array}\right..$$

Ответ: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}$.

2) $\operatorname{tg}(120^\circ+3x)-\operatorname{tg}(140^\circ-x)=2\sin(80^\circ+2x)$.

$$\operatorname{tg}3(x+40^\circ)-\operatorname{tg}(180^\circ-(40^\circ+x))=2\sin2(x+40^\circ);$$

$$\operatorname{tg}3(x+40^\circ)+\operatorname{tg}(40^\circ+x)=2\sin2(x+40^\circ).$$

Обозначим $x+40^\circ=z$. Тогда $\operatorname{tg}3z+\operatorname{tg}z=2\sin2z$;

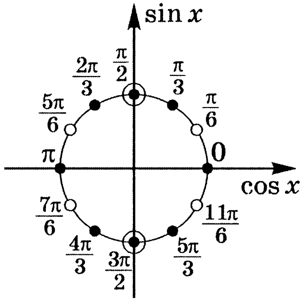
$$\frac{\sin4z}{\cos3z\cdot\cos z}-2\sin2z=0;$$

$$\frac{2\sin2z\cdot\cos2z}{\cos3z\cdot\cos z}-2\sin2z=0;$$

$$\frac{2\sin2z}{\cos3z\cdot\cos z}(\cos2z-\cos3z\cdot\cos z)=0;\qquad \left\{\begin{array}{l}\cos z\neq0\\ \cos3z\neq0\end{array}\right.;$$

$$\sin 2z(\cos 2z - \cos 4z) = 0; \qquad 2\sin 2z \cdot \sin 3z \cdot \sin z = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} z = \pi k \\ 2z = \pi t \\ 3z = \pi n \end{array}\right. ; \qquad \left\{\begin{array}{l} z \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi p \\ z \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}m \end{array}\right. ;$$



Ответ: $\left\{\pi k; \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Докажите $\sin\dfrac{A}{2} \cdot \sin\dfrac{B}{2} \cdot \sin\dfrac{C}{2} \leqslant \dfrac{1}{8}$, если $A + B + C = 180°$.

$$\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right] \leqslant \frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right) \leqslant \frac{1}{8};$$

$$\cos\frac{B+C}{2} = \cos\frac{\pi - A}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \sin\frac{A}{2} > 0;$$

$\cos\dfrac{B-C}{2} \leqslant 1$. Прибавим к обеим частям $\left(-\sin\dfrac{A}{2}\right)$:

$$\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2} \leqslant 1 - \sin\frac{A}{2}.$$

Обозначим $\sin\dfrac{A}{2} = x$. Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2}x(1-x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 - x\right) = -\frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8};$$

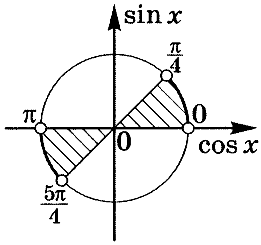
$f(x) \leqslant \dfrac{1}{8}$; $\dfrac{1}{8} = f(x)$ — наибольшее при $x = \dfrac{1}{2}$, значит

$\sin\dfrac{A}{2} \cdot \sin\dfrac{B}{2} \cdot \sin\dfrac{C}{2} \leqslant \dfrac{1}{8}$, что и требовалось доказать.

5. Решите неравенства:

1) $\sin 4x + \cos 4x \cdot \operatorname{ctg} 2x > 1.$

$\dfrac{\sin 4x \cdot \sin 2x + \cos 4x \cdot \cos 2x}{\sin 2x} > 1;\ \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} > 1;\ \operatorname{ctg} 2x > 1;$



$\dfrac{\pi}{4} + \pi n > 2x > \pi n;\ \left(\dfrac{\pi}{2}n; \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}n\right).$

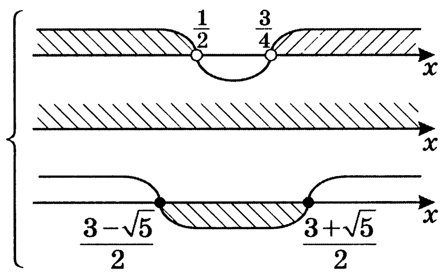
Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{2}n; \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}n\right) \mid n \in \mathbb{Z}\right\}.$

2) $\dfrac{\arccos(x^2 - 3x + 2)}{8x^2 - 10x + 3} > 0.$

$\arccos(x^2 - 3x + 2) \in [0; \pi];$

$$\begin{cases} 8x^2 - 10x + 3 > 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant -1 \\ x^2 - 3x + 2 \leqslant 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 8x^2 - 10x + 3 > 0 \\ x^2 - 3x + 3 \geqslant 0 \\ x^2 - 3x + 1 \leqslant 0 \end{cases};$$



Ответ: $\left[\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\right].$

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cdot \cos y \\ \cos^2 x = \sin x \cdot \sin y \end{cases}$.

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = \cos(x - y) \\ \cos^2 x = \sin x \cdot \sin y \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1 \\ \cos^2 x = \sin x \cdot \sin y \end{cases};$$

$$\begin{cases} x - y = 2\pi k \\ \cos^2(y + 2\pi k) = \sin(y + 2\pi k) \cdot \sin y \end{cases} \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$\begin{cases} x = y + 2\pi k \\ \cos^2 y - \sin^2 y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = y + 2\pi k \\ \cos 2y = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y + 2\pi k \\ y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}n + 2\pi k \\ y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}n \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}(n + 4k); \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}n \right) \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

7. Постройте график $y = 2|\sin x| \cdot \cos x + |\operatorname{tg} x| \cdot \operatorname{ctg} x$.

а) $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases}$: $\quad y = \sin 2x + 1; \quad \left(2\pi k; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$;

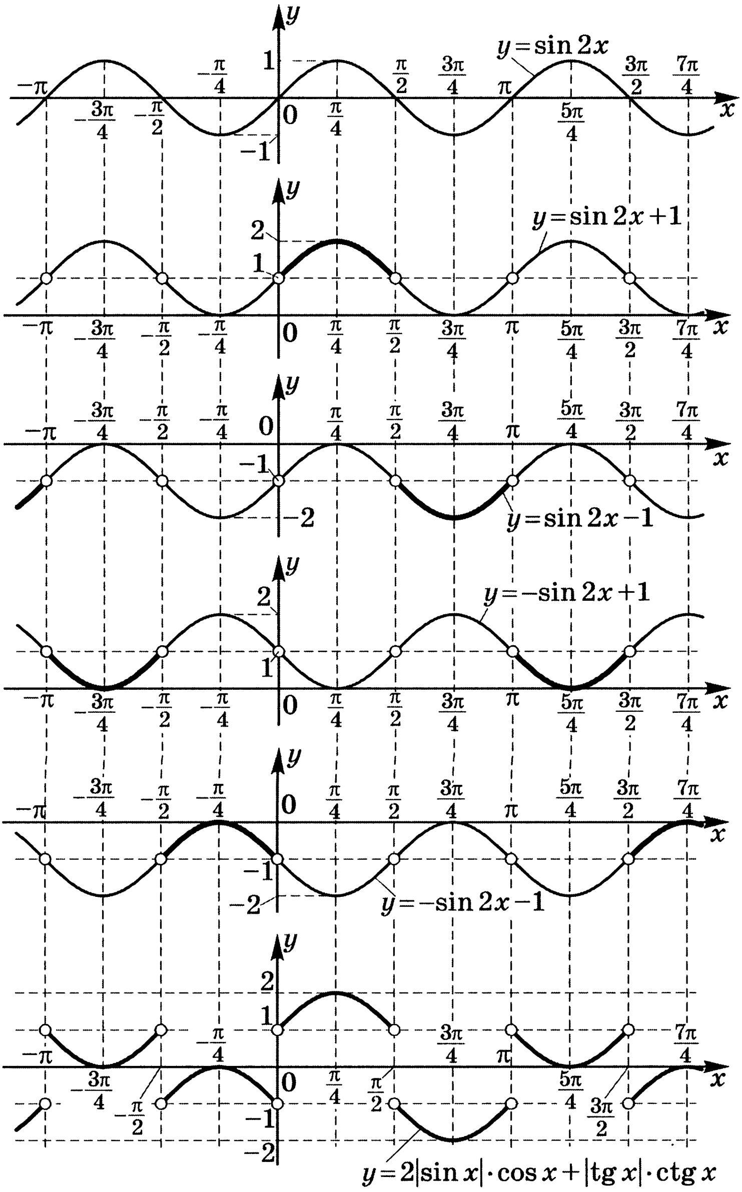
б) $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases}$: $\quad y = \sin 2x - 1; \quad \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$;

в) $\begin{cases} \sin x < 0 \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases}$: $\quad y = -\sin 2x + 1; \quad \left(\pi + 2\pi t; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi t\right)$;

г) $\begin{cases} \sin x < 0 \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases}$: $\quad y = -\sin 2x - 1; \quad \left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi p; 2\pi + 2\pi p\right)$.

$(k, n, t, p \in \mathbb{Z})$

Учтем, что $x \neq \dfrac{\pi}{2}k$.


$y = \sin 2x$
$y = \sin 2x + 1$
$y = \sin 2x - 1$
$y = -\sin 2x + 1$
$y = -\sin 2x - 1$
$y = 2|\sin x| \cdot \cos x + |\operatorname{tg} x| \cdot \operatorname{ctg} x$

Решение карточки 10

1. Упростите:

1) $\operatorname{tg}(35^\circ+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(25^\circ-\alpha)-\dfrac{2\cos(10^\circ+2\alpha)-1}{2\cos(10^\circ+2\alpha)+1}$;

$$\operatorname{tg}(35^\circ+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(25^\circ-\alpha)-\frac{2\cos(10^\circ+2\alpha)-1}{2\cos(10^\circ+2\alpha)+1}=$$

$$=\frac{\sin(35^\circ+\alpha)\cdot\sin(25^\circ-\alpha)}{\cos(35^\circ+\alpha)\cdot\cos(25^\circ-\alpha)}-\frac{\cos(10^\circ+2\alpha)-\frac{1}{2}}{\cos(10^\circ+2\alpha)+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[\cos(35^\circ+\alpha-25^\circ+\alpha)-\cos(35^\circ+\alpha+25^\circ-\alpha)\right]}{\frac{1}{2}\left[\cos(35^\circ+\alpha+25^\circ-\alpha)+\cos(35^\circ+\alpha-25^\circ+\alpha)\right]}-$$

$$-\frac{\cos(10^\circ+2\alpha)-\frac{1}{2}}{\cos(10^\circ+2\alpha)+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{\cos(10^\circ+2\alpha)-\frac{1}{2}}{\cos(10^\circ+2\alpha)+\frac{1}{2}}-\frac{\cos(10^\circ+2\alpha)-\frac{1}{2}}{\cos(10^\circ+2\alpha)+\frac{1}{2}}=0.$$

2) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(\alpha+60^\circ)\cdot\operatorname{tg}(\alpha-60^\circ)=$

$$=\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{\sin(\alpha+60^\circ)\cdot\sin(\alpha-60^\circ)}{\cos(\alpha+60^\circ)\cdot\cos(\alpha-60^\circ)}=$$

$$=\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{\cos(\alpha+60^\circ-\alpha+60^\circ)-\cos(\alpha+60^\circ+\alpha-60^\circ)}{\cos(\alpha+60^\circ+\alpha-60^\circ)+\cos(\alpha+60^\circ-\alpha+60^\circ)}=$$

$$=\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{\cos 120^\circ-\cos 2\alpha}{\cos 120^\circ+\cos 2\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{2\cos 2\alpha+1}{2\cos 2\alpha-1}=$$

$$=-\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{2(2\cos^2\alpha-1)+1}{2(2\cos^2\alpha-1)-1}=-\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{4\cos^2\alpha-1}{4\cos^2\alpha-3}=$$

$$=-\frac{4\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha-\sin\alpha}{4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}=-\frac{4(1-\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha-\sin\alpha}{4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}=$$

$$=-\frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}=-\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}=-\operatorname{tg}3\alpha.$$

2. Докажите:

1) $\sin^2\frac{\pi}{7}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{7}\cdot\sin^2\frac{3\pi}{7}=\frac{7}{64}.$

$$\mathrm{L}=\sin^2\frac{\pi}{7}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{7}\cdot\sin^2\frac{3\pi}{7}=$$

$$=\frac{1-\cos\frac{2\pi}{7}}{2}\cdot\frac{1-\cos\frac{4\pi}{7}}{2}\cdot\frac{1-\cos\frac{6\pi}{7}}{2}=$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\right)\cdot\left(1-\cos\frac{6\pi}{7}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}-\cos\frac{6\pi}{7}+\right.$$

$$+\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}-$$

$$\left.-\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-2\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}-\right.$$

$$\left.-\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{7}-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{7}+\frac{1}{2}\cos\frac{6\pi}{7}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{7}+\right.$$

$$\left.+\cos\frac{\pi}{7}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}-\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(1+\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\right)=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{64},$$

так как $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}=$

$$=\frac{8\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{4\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$= \frac{2\sin\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L} = \dfrac{7}{64} \\ \Pi = \dfrac{7}{64} \end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi.$$

2) $\operatorname{tg} n\alpha > n\operatorname{tg}\alpha$, если $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4(n-1)}$ при $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$.

Доказательство проведем методом математической индукции.

а) Пусть $n = 2$.

Докажем, что $\operatorname{tg} 2\alpha > 2\operatorname{tg}\alpha$; $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$;

$$\operatorname{tg} 2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} - 2\operatorname{tg}\alpha =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\alpha(1-1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}^3\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} > 0,$$

так как при $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ $\operatorname{tg} 0 < \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$,

а значит, $0 < \operatorname{tg}\alpha < 1$, поэтому $\operatorname{tg} 2\alpha > 2\operatorname{tg}\alpha$, и при $n = 2$ неравенство выполнено.

б) Пусть неравенство выполнено при $n = k$,

т. е. $\operatorname{tg} k\alpha > k\operatorname{tg}\alpha$, если $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4(k-1)}$.

Докажем, что неравенство выполняется при $n = k+1$, т. е. $\operatorname{tg}(k+1)\alpha > (k+1)\operatorname{tg}\alpha$, если $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4k}$.

Доказательство: $\operatorname{tg}(k+1)\alpha = \dfrac{\operatorname{tg} k\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg} k\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha} >$

$$> \frac{k\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg} k\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha} = \frac{(k+1)\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg} k\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha} > (k+1)\operatorname{tg}\alpha.$$

Так как по индуктивному предположению

$\operatorname{tg} k\alpha > k \operatorname{tg}\alpha$ при $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4(k-1)}$,

то $0 < \operatorname{tg} k\alpha < \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$;

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \operatorname{tg} k\alpha < 1 \\ 0 < \operatorname{tg}\alpha < 1 \end{array}\right| \Rightarrow \ 0 < \operatorname{tg} k\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha < 1.$$

Значит, $1 > 1 - \operatorname{tg} k\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha > 0$,

т. е. $\operatorname{tg}(k+1)\alpha > (k+1)\operatorname{tg}\alpha$.

Индуктивный переход доказан.

3) $\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} > 1$, если $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; & 1 > 1 \text{ — ложно} \\ x = 2\pi n; & 1 > 1 \text{ — ложно} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x \neq 2\pi n \end{cases}; \quad \sqrt{\sin x} > 1 - \sqrt{\cos x} > 0;$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\sin x > 1 - 2\sqrt{\cos x} + \cos x; \quad 2\sqrt{\cos x} > 1 + \cos x - \sin x > 0;$$

Так как $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ и

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$, то

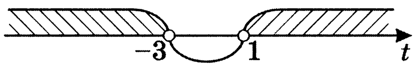
$$4\cos x > 1 + \cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos x - 2\sin x - 2\sin x \cdot \cos x;$$

$$2 - 2(\cos x + \sin x) - 2\sin x \cdot \cos x < 0;$$

$$3 - 2(\cos x + \sin x) - (\cos x + \sin x)^2 < 0.$$

Обозначим $t = \cos x + \sin x$; $\quad t^2 + 2t - 3 > 0$;

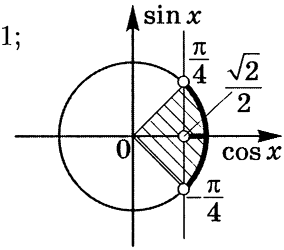
$(t+3)(t-1) > 0$;



$[-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \not\subset (-\infty; -3) \Rightarrow \sin x + \cos x < -3 \quad x \in \emptyset;$

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 1;$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2};$



$\frac{\pi}{4} + 2\pi k > x - \frac{\pi}{4} > -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k > x > 2\pi k,$

т. е. для $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ утверждение $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$ верно.

Примечание. Есть более простое доказательство, которое требует догадки.

$\cos x(1 - \cos^3 x) > 0$ для $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

т. е. $\cos x > \cos^4 x$, тогда $\sqrt{\cos x} > \cos^2 x$.

Аналогично $\sin x(1 - \sin^3 x) > 0; \quad \sqrt{\sin x} > \sin^2 x$.

Почленно сложив полученные неравенства, получаем: $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, что верно для $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, что и требовалось доказать.

3. Решите уравнения:

1) $\cos\frac{4x}{3} = \cos^2 x$.

$\cos\frac{4x}{3} = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad 2\cos\frac{4x}{3} = 1 + \cos 2x;$

$2\left(2\cos^2\frac{2x}{3} - 1\right) = 1 + 4\cos^3\frac{2x}{3} - 3\cos\frac{2x}{3};$

$4\cos^2\frac{2x}{3} - 3 - \cos\frac{2x}{3} \cdot \left(4\cos^2\frac{2x}{3} - 3\right) = 0;$

$\left(4\cos^2\frac{2x}{3} - 3\right)\left(1 - \cos\frac{2x}{3}\right) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{2x}{3}=1\\ \cos^2\dfrac{2x}{3}=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{2x}{3}=1\\ \dfrac{1+\cos\frac{4x}{3}}{2}=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{2x}{3}=1\\ \cos\dfrac{4x}{3}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{2x}{3}=2\pi k\\ \dfrac{4x}{3}=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}x=3\pi k\\ x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\pi}{2}n\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{3\pi k; \pm\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\pi}{2}n \mid k,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

2) $\arcsin\dfrac{2}{3\sqrt{x}}-\arcsin\sqrt{1-x}=\arcsin\dfrac{1}{3}$.

Найдем $D(\text{У})$.

$\dfrac{2}{3\sqrt{x}}>0,\quad \sqrt{1-x}\geqslant 0$, значит

$\arcsin\dfrac{2}{3\sqrt{x}}\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right],\quad \arcsin\sqrt{1-x}\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

С другой стороны, $\left\{\begin{array}{l}\left|\dfrac{2}{3\sqrt{x}}\right|\leqslant 1\\ \left|\sqrt{1-x}\right|\leqslant 1\end{array}\right.;$

$\left\{\begin{array}{l}x\geqslant\dfrac{4}{9}\\ 1-x\leqslant 1\\ 1-x\geqslant 0\end{array}\right.;\quad$ Итак, $x\in\left[\dfrac{4}{9};1\right]$.

$$\sin\left(\underbrace{\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}}}_{\alpha}-\underbrace{\arcsin\sqrt{1-x}}_{\beta}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right);$$

$\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$;

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$;

$\sin\alpha=\dfrac{2}{3\sqrt{x}};\quad \sin\beta=\sqrt{1-x}$;

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9x}}; \qquad \cos\beta = \sqrt{1 - 1 + x} = \sqrt{x}.$$

Получим: $\sin(\alpha - \beta) = \dfrac{2}{3\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{4}{9x}} = \dfrac{1}{3}$;

$$\frac{1}{3} = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{\frac{9x-4}{9x}}; \qquad \sqrt{x} = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{9x-4};$$

$$x = 9x - 9x^2 + 4x - 4; \qquad 9x^2 - 12x + 4 = 0;$$

$$(3x-2)^2 = 0; \qquad x = \frac{2}{3} \in \left[\frac{4}{9}; 1\right].$$

Ответ: $x = \dfrac{2}{3}$.

4. Решите неравенство $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x > 0$.

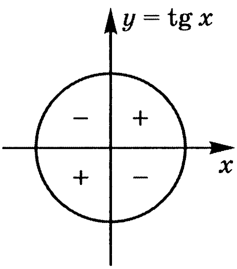
$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} > 0; \qquad \frac{\sin 3x}{\cos x \cdot \cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} > 0;$$

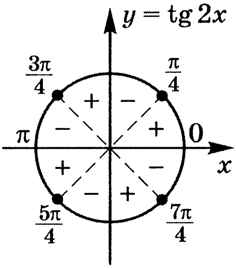
$$\sin 3x \cdot \left(\frac{\cos 3x - \cos x \cdot \cos 2x}{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}\right) > 0;$$

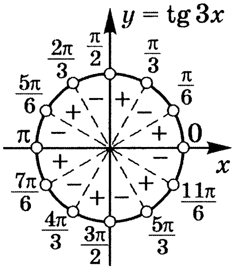
$$\operatorname{tg} 3x \cdot \frac{\cos 3x - \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)}{\cos x \cdot \cos 2x} > 0;$$

$$\operatorname{tg} 3x \cdot \frac{\cos 3x - \cos x}{2\cos x \cdot \cos 2x} > 0; \qquad \operatorname{tg} 3x \cdot \frac{-2\sin 2x \cdot \sin x}{2\cos x \cdot \cos 2x} > 0;$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x < 0; \qquad \left\{\begin{array}{ll} \operatorname{tg} x = 0 & x = \pi k \\ \operatorname{tg} 2x = 0 & x = \dfrac{\pi}{2} t \\ \operatorname{tg} 3x = 0 & x = \dfrac{\pi}{3} n \end{array}\right. \mid k, t, p \in \mathbb{Z};$$







$$0 \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{2\pi}{3} \quad \frac{3\pi}{4} \quad \frac{5\pi}{6} \quad \pi \quad \frac{7\pi}{6} \quad \frac{5\pi}{4} \quad \frac{4\pi}{3} \quad \frac{3\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{3} \quad \frac{7\pi}{4} \quad \frac{11\pi}{6} \quad 2\pi$$

$\operatorname{tg} 3x$	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−
$\operatorname{tg} 2x$	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−
$\operatorname{tg} x$	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−
$f(x)$	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−

Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\right); \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}n\right) \mid k,n \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. Решите систему $\begin{cases} \cos^2 y + 3\sin x \cdot \sin y = 0 \\ 21\cos 2x - \cos 2y = 10 \end{cases}$.

Пусть $\sin y = 0$. Тогда $\cos^2 y = 0$; $\sin^2 y = 1$ — ложь.
Следовательно, $\sin y \neq 0$. Тогда

$$\begin{cases} \sin x = -\dfrac{\cos^2 y}{3\sin y} \\ 21(1-2\sin^2 x) - \cos 2y = 10 \end{cases}; \quad 21\left(1-2\cdot\frac{\cos^4 y}{9\sin^2 y}\right) = \cos 2y + 10;$$

$$21\left(1 - \frac{2\left(\frac{1+\cos 2y}{2}\right)^2}{9\cdot\frac{1-\cos 2y}{2}}\right) = \cos 2y + 10.$$

Обозначая $t = \cos 2y$, получим $21\left(1-\dfrac{1+2t+t^2}{9(1-t)}\right) = t+10$;

$21(9-9t-1-2t-t^2) = 9(1-t)(t+10)$;

$21(8-11t-t^2) = 9(10-9t-t^2)$;

$4t^2+50t-26=0$; $\quad 2t^2+25t-13=0$;

$$t_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{625+104}}{4} = \frac{-25\pm 27}{4} = \left[\begin{array}{l} -13 \notin E(\cos x) \\ \dfrac{1}{2} \end{array}\right.;$$

$\cos 2y = \dfrac{1}{2}$; $\quad 2y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\quad y = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$;

$$\begin{cases} \cos 2y = \dfrac{1}{2} \\ 21\cos 2x - \dfrac{1}{2} = 10 \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos 2y = \dfrac{1}{2} \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi k; \pm\frac{\pi}{6}+\pi n\right) \mid k,n \in \mathbb{Z}\right\}$.

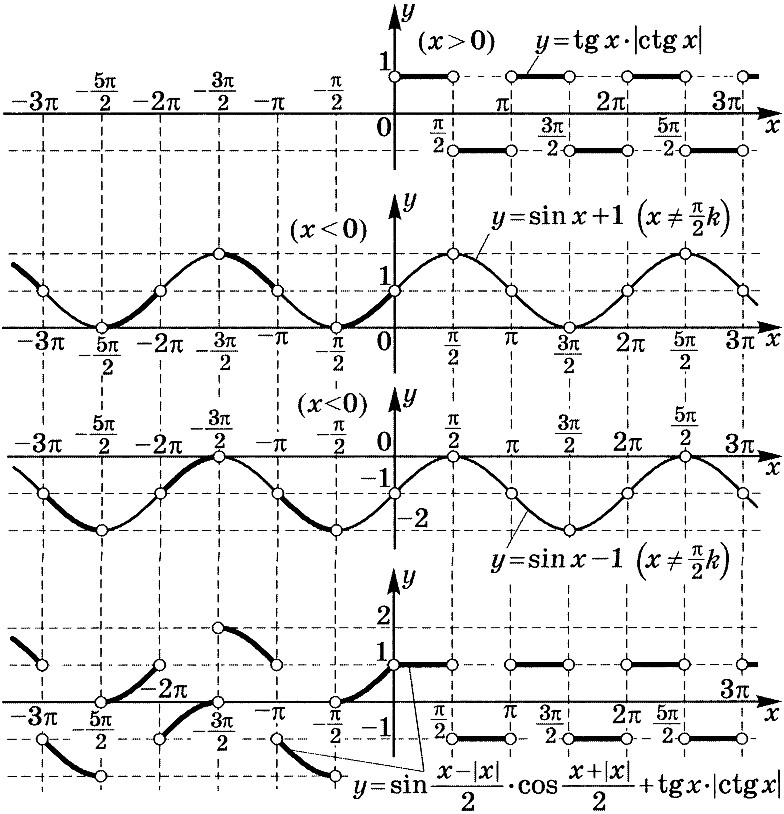
6. Постройте график $y = \sin\dfrac{x - |x|}{2} \cdot \cos\dfrac{x + |x|}{2} + \operatorname{tg} x \cdot |\operatorname{ctg} x|$.

а) $x > 0$, тогда $y = 0 + \operatorname{tg} \cdot |\operatorname{ctg} x| =$

$$= \begin{cases} 1,\ \operatorname{ctg} x > 0;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k > x > \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \text{ и } k \geqslant 0 \\ -1,\ \operatorname{ctg} x < 0;\ \pi + \pi n > x > \dfrac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ и } n \geqslant 0 \end{cases};$$

б) $x < 0$, тогда $y = \sin x + \operatorname{tg} x \cdot |\operatorname{ctg} x| =$

$$= \begin{cases} \sin x + 1,\ \operatorname{ctg} x > 0;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k > x > \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \text{ и } k < 0 \\ \sin x - 1,\ \operatorname{ctg} x < 0;\ \pi + \pi n > x > \dfrac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ и } n < 0 \end{cases}.$$



10

Самостоятельные работы

Самостоятельная работа 1

Решите простейшие уравнения и неравенства:

Вариант А **Вариант Б**

1	$\sin\left(4x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -1$	1	$\cos\left(4x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -1$
2	$\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$	2	$\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$
3	$\sin\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 1$	3	$\cos\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 1$
4	$\cos\left(3x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$	4	$\sin\left(3x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$
5	$\sin\left(3x - \dfrac{5\pi}{4}\right) = 0$	5	$\cos\left(3x - \dfrac{5\pi}{4}\right) = 0$
6	$\cos\left(2x - \dfrac{3\pi}{4}\right) = 1$	6	$\sin\left(2x - \dfrac{3\pi}{4}\right) = 1$
7	$\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) \geqslant 0$	7	$\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) \geqslant 0$
8	$\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) < 0$	8	$\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) < 0$
9	$\sin\left(3x - \dfrac{2\pi}{3}\right) \leqslant 0$	9	$\cos\left(3x - \dfrac{2\pi}{3}\right) \leqslant 0$
10	$\cos\left(2x + \dfrac{3\pi}{4}\right) \geqslant 0$	10	$\sin\left(2x + \dfrac{3\pi}{4}\right) \geqslant 0$

Самостоятельная работа 2

Решите уравнение:

Вариант А

1	$2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$
2	$2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=3$
4	$\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$
5	$2\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$
6	$2\cos^2 x-\cos x-1=0$
7	$\mathrm{tg}^2 x-3\,\mathrm{tg}\,x-4=0$
8	$8\cos^2 2x-\left(6-4\sqrt{3}\right)\cos 2x-3\sqrt{3}=0$
9	$\sin^4 x-\cos^4 x=-\dfrac{1}{2}$
10	$\sin^3 x+\cos^3 x=\sin^2 x-\cos^2 x$

Вариант Б

1	$2\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$
2	$2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$
3	$\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\left(3x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=-1$
4	$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$
5	$2\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$
6	$2\sin^2 2x+\sin 2x-1=0$
7	$\mathrm{ctg}^2 3x+4\,\mathrm{ctg}\,3x+3=0$
8	$8\sin^2 2x-\left(6+4\sqrt{3}\right)\sin 2x+3\sqrt{3}=0$
9	$\sin^4 x+\cos^4 x=\sin^2 x$
10	$\sin^3 x-\cos^3 x=2(\sin x-\cos x)$

Самостоятельная работа 3

Решите уравнение:

Вариант А

1	$3\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$
2	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+3x\right)=\sqrt{3}\cos(1{,}5-3x)$
3	$3\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+2\sin(x+\pi)+2\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$
4	$4\sin^2 2x-2\left(\sqrt{3}+1\right)\sin 2x+\sqrt{3}=0$
5	$3\sin^2(\pi-2x)+\cos^2(2x+\pi)=3$
6	$6\cos^2 3x+\sin 3x\cdot\cos 3x-\sin^2 3x=2$
7	$\dfrac{\cos 3x}{1-\sin 3x}=0$
8	$\dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin(x+\pi)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\dfrac{\cos(2\pi+x)-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-1}$
9	$2\operatorname{tg}^2 2x+\dfrac{1-(\sin 2x+\cos 2x)^2}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right).}=0$
10	$\dfrac{2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x}{2\cos^2 x-\cos x-1}=0$

Решите уравнение:

Вариант Б

1	$3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$
2	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=\sin(1{,}5\pi-2x)$
3	$3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(x-\pi)+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0$
4	$4\cos^2 3x+2\left(\sqrt{3}+1\right)\cos 3x+\sqrt{3}=0$
5	$3\cos^2(\pi+2x)+\sin^2(2x-\pi)=3$
6	$6\sin^2 3x+\cos 3x\cdot\sin 3x-\cos^2 3x=2$
7	$\dfrac{\sin 3x}{1-\cos 3x}=0$
8	$\dfrac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}{\cos(x-\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\dfrac{\sin(2\pi-x)-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1}$
9	$2\operatorname{ctg}^2 2x+\dfrac{1-(\cos 2x+\sin 2x)^2}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}=0$
10	$\dfrac{2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x}{2\sin^2 x-\sin x-1}=0$

Самостоятельная работа 4

Вариант А

Докажите тождество:

1	$\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}=1$
2	$1+\dfrac{\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$
3	$\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^6\alpha$
4	$\dfrac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$
5	$\dfrac{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^6\alpha$

Вычислите:

6	$\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$ при $\pi<\alpha<1{,}5\pi$
7	$\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=\dfrac{7}{25}$ при $1{,}5\pi<\alpha<2\pi$
8	$\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-3\operatorname{tg}\alpha+1}{2\operatorname{tg}^2\alpha+3\operatorname{tg}\alpha+2}$, если $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ при $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$
9	$\dfrac{2+3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=4$
10	$\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$

Вариант Б

Докажите тождество:

1	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=-1$
2	$\dfrac{\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\sin\alpha}+1=\dfrac{1}{\sin\alpha}$
3	$\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha}{\sin^2\alpha}=1+\operatorname{ctg}^6\alpha$
4	$\dfrac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^4\alpha}=2\operatorname{ctg}^2\alpha$
5	$3\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)-2\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)=1$

Вычислите:

6	$\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{2}$ при $\pi<\alpha<1{,}5\pi$
7	$\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha=\dfrac{8}{17}$ при $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$
8	$\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha+2\operatorname{ctg}\alpha+1}{2\operatorname{ctg}^2\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha+2}$, если $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$ при $\pi<\alpha<1{,}5\pi$
9	$\dfrac{\cos^2\alpha+2}{3\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$
10	$\dfrac{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$

Самостоятельная работа 5

Вариант А

Упростите:

1	$\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$
2	$\cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha$
3	$\dfrac{2\sin^2 x - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$
4	$\dfrac{\sin^4\alpha + \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + (1+\cos^2\alpha)(\cos^2\alpha - 1)}$
5	$\dfrac{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 1}{(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha) - 1}$
6	$\dfrac{\cos^3\alpha + \sin^3\alpha}{(1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha)\sin\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha$

Докажите тождество:

7	$\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2 \cdot \cos^2\alpha = 1$
8	$\dfrac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$
9	$\dfrac{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$
10	$2\left(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha\right) - 3\left(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha\right) = -1$

Вариант Б

Упростите:

1	$\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^4\alpha$
2	$\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha$
3	$\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$
4	$\dfrac{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\left(1+\sin^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$
5	$\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)-1}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}$
6	$\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{(1+\sin\alpha\cdot\cos\alpha)\cos\alpha}$

Докажите тождество:

7	$\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$
8	$\dfrac{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{1+\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$
9	$\dfrac{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1$
10	$\cos\alpha\left(1-2\cos^2\alpha\right)\left(\operatorname{tg}\alpha-\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right)=\sin\alpha$

Самостоятельная работа 6

Вариант А

Вычислите:

1	$\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ при $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
2	$\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{4}$ при $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$
3	$\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{2}{7}}$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
4	$\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$ при $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$
5	$\frac{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$
6	$\frac{2\operatorname{tg}^2\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha - 1}{3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1}$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Зная, что $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}5$, вычислите:

7	$\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
8	$\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$
9	$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$
10	$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$

Вариант Б

Вычислите:

1	$\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ при $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
2	$\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
3	$\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
4	$\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ при $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$
5	$\frac{2\cos^2\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha}{3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -3$
6	$\frac{2\operatorname{ctg}^2\alpha + 3\operatorname{ctg}\alpha + 1}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 2\operatorname{ctg}\alpha - 2}$, если $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Зная, что $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{3}$, вычислите:

7	$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
8	$\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$
9	$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$
10	$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$

Самостоятельная работа 7

Упростите:

Вариант А

1	$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\mathrm{tg}(\pi+\alpha)\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\mathrm{tg}(2\pi+\alpha)$
2	$\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(2\pi+\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$
3	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(2\pi+\alpha)$
4	$\sin(\pi-2\alpha)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)+\sin(2\alpha-2\pi)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)$
5	$\dfrac{\sin^2(2\pi+\alpha)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin^2(\pi+\alpha)-\cos^2(\pi-\alpha)}$
6	$\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(\pi-\alpha)\cdot\sin(2\pi+\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}$
7	$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)\cdot\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\mathrm{ctg}(\alpha-2\pi)$
8	$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin^2(\alpha-\pi)$
9	$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi+\alpha)\right)^2+2\sin(\pi-\alpha)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$
10	$\dfrac{\sin^2(3\pi-\alpha)+\sin(\pi-\alpha)\cdot\cos(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(3\pi+\alpha)}$

Упростите:

Вариант Б

1	$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)$
2	$\dfrac{\cos(\pi-\alpha)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(2\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin(\pi+\alpha)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$
3	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(2\pi-\alpha)$
4	$\cos(\pi-2\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)+\cos(2\pi-2\alpha)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)$
5	$\dfrac{\cos^2(2\pi+\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos^2(\pi+\alpha)-\sin^2(\pi-\alpha)}$
6	$\dfrac{\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\sin(\pi-\alpha)\cdot\cos(2\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(\pi+\alpha)\cdot\sin(2\pi-\alpha)}$
7	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(\alpha-3\pi)$
8	$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos^2(\pi+\alpha)$
9	$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(\alpha-\pi)\right)^2+2\cos(\pi-\alpha)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$
10	$\dfrac{\cos^2(3\pi-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)\cdot\sin(\pi+\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(3\pi+\alpha)}$

Самостоятельная работа 8

Упростите:

Вариант А

1	$\dfrac{\cos\frac{2\alpha}{5}+\sin\frac{2\alpha}{5}\cdot\operatorname{ctg}\frac{2\alpha}{15}}{\sin\frac{2\alpha}{5}+\cos\frac{2\alpha}{5}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\alpha}{15}}$
2	$\left(\operatorname{tg}\dfrac{3\alpha}{8}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{3\alpha}{16}+1\right)^2-1$
3	$\left(1+\sin\dfrac{2\pi}{7}\right):\left(\cos\dfrac{\pi}{7}+\sin\dfrac{\pi}{7}\right)^2$
4	$\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\cos 2\alpha-\sin 2\alpha$
5	$\dfrac{2\sin 1-\sin 2}{2\sin 1+\sin 2}\cdot 4\operatorname{ctg}^2\dfrac{1}{2}$
6	$\dfrac{5\operatorname{tg}3}{4\operatorname{tg}1}-\dfrac{3+\operatorname{tg}^2 1}{1-3\operatorname{tg}^2 1}$
7	$\sin\dfrac{\pi}{10}+\sin\dfrac{13\pi}{10}$
8	$\sin 40^\circ+2\sin 20^\circ-\sqrt{3}\cos 40^\circ$
9	$\dfrac{\operatorname{ctg}^4\frac{\alpha}{2}\left(\sin^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\alpha-4+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$
10	$\dfrac{\sin\frac{2\pi}{15}\cdot\sin\frac{4\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{15}\cdot\sin\frac{3\pi}{10}}{\sin\frac{6\pi}{7}\cdot\sin\frac{11\pi}{28}-\cos\frac{8\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{28}}$

Упростите:

Вариант Б

1	$\dfrac{\cos\frac{4\alpha}{3}+\sin\frac{4\alpha}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{7\alpha}{15}}{\sin\frac{2\alpha}{5}-\cos\frac{2\alpha}{5}\cdot\operatorname{ctg}\frac{7\alpha}{15}}$
2	$\left(\operatorname{ctg}\dfrac{5\alpha}{12}-\operatorname{ctg}\dfrac{5\alpha}{6}\right)^2-1$
3	$\dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\alpha}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$
4	$4\cos^4\alpha-\sin^2 2\alpha-\cos 4\alpha-2\cos 2\alpha$
5	$\dfrac{2}{\sin 1}-\dfrac{2}{\sin 3}-\dfrac{4\cos 2}{\sin 3}$
6	$\dfrac{1-\sin^6 4-\cos^6 4}{1-\sin^4 4-\cos^4 4}$
7	$\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{18}}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{18}}$
8	$\cos^2 85^\circ+\sin 115^\circ\cdot\sin 55^\circ$
9	$\dfrac{\sin\alpha\left(1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\alpha}$
10	$\dfrac{\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{4\pi}{21}-\cos\frac{17\pi}{21}\cdot\cos\frac{8\pi}{7}}{\cos\frac{5\pi}{24}\cdot\cos\frac{\pi}{24}+\cos\frac{7\pi}{24}\cdot\sin\frac{25\pi}{24}}$

Самостоятельная работа 9

Упростите:

Вариант А

1	$\dfrac{1+\sin 6\alpha-\cos 6\alpha}{1+\sin 6\alpha+\cos 6\alpha}$
2	$\dfrac{4\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos^3\frac{\alpha}{4}-4\sin^3\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}}{\sin\alpha}$
3	$\dfrac{4\sin^4\left(\sqrt{2}\alpha\right)+\sin^2\left(2\sqrt{2}\alpha\right)}{1-\cos^2\left(\sqrt{2}\alpha\right)}$
4	$\dfrac{1-2\sin 3-\cos 6}{1+2\sin 3-\cos 6}$
5	$\cos 47^\circ\cdot\cos 73^\circ+\cos^2 77^\circ-2$
6	$\dfrac{\operatorname{ctg} 75^\circ-\operatorname{tg} 75^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ}$
7	$\dfrac{\sin 47^\circ+\sin 48^\circ+\sqrt{2}\sin 87^\circ}{\sqrt{2}\cos 3^\circ}$
8	$\dfrac{\cos 54^\circ+\cos 50^\circ+\cos 46^\circ+\cos 42^\circ}{2\cos 2^\circ\cdot\sin 86^\circ\cdot 48^\circ}$
9	$\dfrac{\cos 70^\circ\cdot\sin 80^\circ\cdot\sin 30^\circ+\sin 70^\circ\cdot\sin 10^\circ\cdot\sin 150^\circ}{\cos 69^\circ\cdot\sin 81^\circ+\sin 69^\circ\cdot\sin 9^\circ}$
10	$\operatorname{ctg}^6 70^\circ-33\operatorname{ctg}^4 70^\circ+27\operatorname{ctg}^2 70^\circ$

Упростите:

Вариант Б

1	$\dfrac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1\sin\alpha-\cos\alpha}$
2	$\dfrac{4\sin\frac{\alpha}{5}\cdot\cos^3\frac{\alpha}{5}-4\cos\frac{\alpha}{5}\cdot\sin^3\frac{\alpha}{5}}{\sin\frac{4\alpha}{5}}$
3	$\dfrac{1-\cos^2\frac{\sqrt{2}}{6}}{4\sin^4\frac{\sqrt{2}}{6}+\sin^2\frac{\sqrt{2}}{3}}$
4	$\dfrac{1+2\cos 3+\cos 6}{1-2\cos 3+\cos 6}$
5	$\operatorname{ctg} 83^\circ\cdot\left(\dfrac{1}{\cos 76^\circ}+\dfrac{1}{\operatorname{ctg} 76^\circ}\right)$
6	$\sin^2 67^\circ+\sin^2 7^\circ\cdot\cos^2 53^\circ+3$
7	$\dfrac{2\cos 201^\circ-16\sin 111^\circ}{\cos 21^\circ}$
8	$\dfrac{5\sin 27^\circ+2\cos 63^\circ-4\cos 153^\circ}{\cos 75^\circ\cdot\cos 12^\circ+\cos 15^\circ\cdot\cos 78^\circ}$
9	$\dfrac{4\cos 55^\circ-3\sin 35^\circ+2\cos 35^\circ}{\sin 73^\circ\cdot\sin 72^\circ-\sin 17^\circ\cdot\sin 18^\circ}$
10	$\operatorname{ctg}^2 54^\circ\cdot\operatorname{ctg}^2 18^\circ$

Самостоятельная работа 10

Решите уравнение:

Вариант А

1	$\sin 2x = 3\cos^2 x$
2	$2\cos^2 x = 1 + 4\sin x$
3	$2\cos 2x + 2\cos x \cdot \sin^2 x = \cos x$
4	$\sin 2x + 2\sin x - 3\cos x = 3$
5	$2\cos x + \cos 2x = 2\sin x$
6	$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$
7	$2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$
8	$8\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = \sqrt{3}$
9	$\sin x + \cos x = \sin^3 x$
10	$\cos^4 \dfrac{3x}{2} - \sin^4 \dfrac{3x}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Решите уравнение:

Вариант Б

1	$\sin^4 x + \cos^4 x = 0{,}5$
2	$\sin^3 x \cdot \cos x + \cos^3 x \cdot \sin x = \cos 2x$
3	$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4} \sin^2 x$
4	$4 \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = \cos 4x$
5	$2 + \cos^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x = \sin^2 x$
6	$\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$
7	$2 \sin x \cdot \sin 3x = \cos 2x$
8	$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$
9	$\sin 3x + \cos 7x = 0$
10	$\sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{3}$

Самостоятельная работа 11

Решите уравнение:

Вариант А

1	$\sin 4x + \sin^2 2x = 0$
2	$\sin 3x = 3\sin x \cdot \cos^2 x$
3	$1 - \sin 5x = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2$
4	$5\sin x + \cos x = 5$
5	$\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$
6	$\sin 2x + 3 = 3\sin x + 3\cos x$
7	$\cos x \cdot \sin 9x = \cos 3x \cdot \sin 7x$
8	$2\cos^2 2x + 3\sin 4x + 4\sin^2 2x = 0$
9	$\sin 4x = 6\cos^2 2x - 4$
10	$2\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^3 2x = 1$

Вариант Б

1	$\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1 + 4\sin x$
2	$\sin x \cdot \sin 5x = 1$
3	$\sin^2 x - \cos x \cdot \cos 3x = \frac{1}{4}$
4	$\sin 3x = 3\sin x$
5	$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 7x$
6	$4\cos^4 x = 11\cos 2x - 1$
7	$\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sqrt{3}\sin x$
8	$2\sin(40^\circ + x) \cdot \sin(50^\circ - x) = -1$
9	$4\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 6x$
10	$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$

Самостоятельная работа 12

Решите уравнение:

Вариант А

1	$\cos 2x + \cos 6x + 2\sin^2 x = 1$
2	$\sin x + \sin 3x = 4\cos^2 x$
3	$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$
4	$144\cos^4 x - 4\sin^4 x = 9\sin^2 2x$
5	$\cos 7x + \cos x = 2\cos 3x \cdot (\sin 2x + 1)$
6	$\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$
7	$\sin 5x = \sin x + \sin 2x$
8	$2\operatorname{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$
9	$\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x - 1 = 2\cos x$
10	$\sqrt{5}\sin 2x = \sqrt{1 + 8\sin x \cdot \cos x}$

Вариант Б

1	$2\sin^2 2x = (\cos x + \sin x)^2$
2	$4\cos x \cdot \sin x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0$
3	$\cos x = \cos 3x + 2\sin 2x$
4	$\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = 1{,}5$
5	$2(\cos 4x - \sin x \cdot \cos 3x) = \sin 4x + \sin 2x$
6	$5\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 2x$
7	$9\operatorname{ctg}^2 x + 4\sin^2 x = 6$
8	$(\cos 6x - 1)\operatorname{ctg} 3x = \sin 3x$
9	$\sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x - 1 = 2\sin x$
10	$\sqrt{10}\cos x = \sqrt{4\cos x - \cos 2x}$

Самостоятельная работа 13

Вычислите:

Вариант А **Вариант Б**

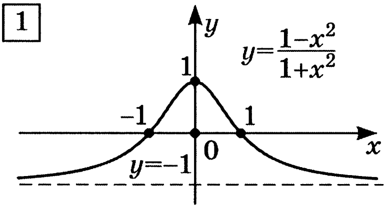
1	$\arccos\left(\cos\frac{17\pi}{5}\right)$	1	$\arccos\left(\cos\frac{13\pi}{5}\right)$
2	$\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}\right)$	2	$\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{5}\right)$
3	$\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{5}\right)$	3	$\arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{7}\right)$
4	$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-3{,}2\pi))$	4	$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(2{,}7\pi))$
5	$\sin(\operatorname{arctg} 2)$	5	$\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$
6	$\cos\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$	6	$\cos\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$
7	$\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right)$	7	$\sin\left(\frac{1}{2}\arccos(0{,}1)\right)$
8	$\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right)$	8	$\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$
9	$\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(\frac{12}{13}\right)\right)$	9	$\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{15}{17}\right)$
10	$\cos(\operatorname{arctg}(2\sqrt{2}))$	10	$\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)\right)$

Самостоятельная работа 14

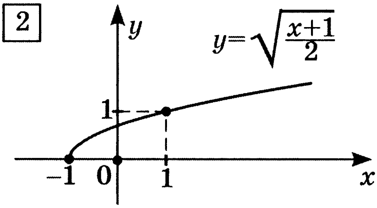
Укажите номер графика соответствующий каждой из данных функций

1	$y = \sin(2\arcsin x)$
2	$y = \cos(2\arcsin x)$
3	$y = \cos(2\arccos x)$
4	$y = \sin(2\operatorname{arctg} x)$
5	$y = \cos(2\operatorname{arctg} x)$
6	$y = \sin(\operatorname{arctg} x)$
7	$y = \cos(\operatorname{arctg} x)$
8	$y = \operatorname{tg}(\arcsin x)$
9	$y = \operatorname{tg}(\arccos x)$
10	$y = \operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x)$
11	$y = \cos\left(\dfrac{1}{2}\arccos x\right)$
12	$y = \sin\left(\dfrac{1}{2}\arccos x\right)$

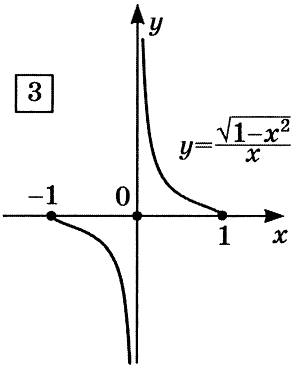
1



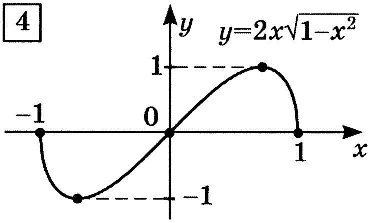
2



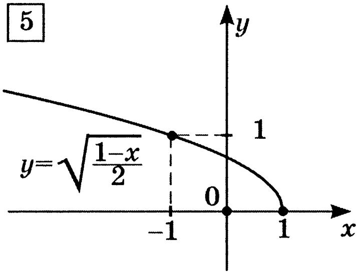
3



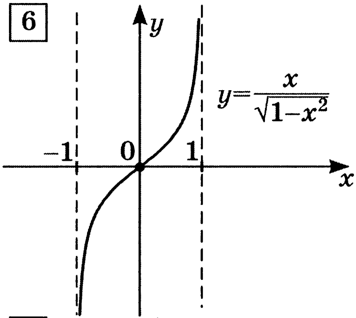
4



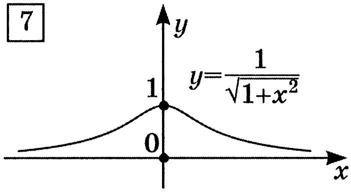
5



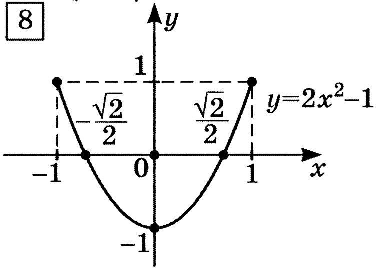
6



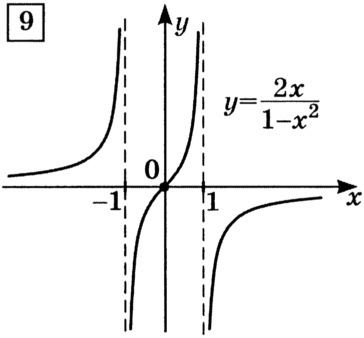
7



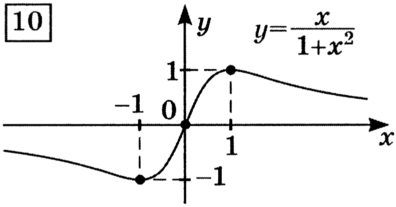
8



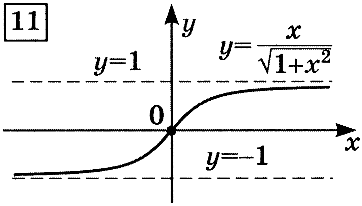
9



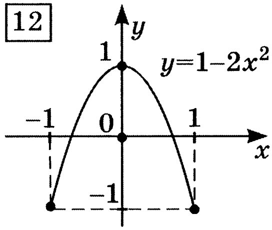
10



11



12



Самостоятельная работа 15

Решите системы уравнений:

Вариант А		**Вариант Б**	
1	$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2} \\ \sin^2 x-\sin^2 y=1 \end{cases}$	1	$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2} \\ \cos^2 x+\sin^2 y=2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} \sin^2 x-\cos^2 y=0 \\ \sin^2 x+\cos^2 y=2 \end{cases}$	2	$\begin{cases} \sin x-\cos y=1 \\ \sin y-\cos x=0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 4y+\sqrt{3}\cos x=-\dfrac{1}{2} \\ 28y+3\sqrt{3}\cos x=1 \end{cases}$	3	$\begin{cases} 2\sqrt{3}\sin x-8y=-1 \\ \sqrt{3}\sin x-7y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$
4	$\begin{cases} \sin x\cdot\sin y=\dfrac{3}{4} \\ \cos x\cdot\cos y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$	4	$\begin{cases} \sin x\cdot\cos y=\dfrac{1}{4} \\ \cos x\cdot\sin y=\dfrac{3}{4} \end{cases}$
5	$\begin{cases} \sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{3}{4} \\ \cos 2x+2\cos y=1 \end{cases}$	5	$\begin{cases} \sin x+\cos y=1 \\ \sin^2 x-\cos^2 y=1 \end{cases}$
6	$\begin{cases} \sin x\cdot\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos(x+y)\cdot\cos(x-y)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$	6	$\begin{cases} \cos x\cdot\cos y=\dfrac{1}{2} \\ \sin(x+y)\cdot\sin(x-y)=\dfrac{3}{4} \end{cases}$
7	$\begin{cases} \sin^2 x+\sin y=1 \\ \cos^2 x+\cos y=1 \end{cases}$	7	$\begin{cases} \sin^2 x-\cos y=1 \\ \cos^2 x-\sin y=1 \end{cases}$
8	$\begin{cases} \sin x-\sin y=\dfrac{1}{\sin x} \\ \cos x-\cos y=\dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$	8	$\begin{cases} \sin x+\sin y=\dfrac{1}{\cos x} \\ \cos x+\cos y=\dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$

Самостоятельная работа 16

Вариант А

Вычислите:

1	$\cos 26^\circ + \cos 98^\circ + \cos 170^\circ + \cos 242^\circ + \cos 314^\circ$
2	$2\cos 80^\circ + \dfrac{1}{2\cos 40^\circ}$
3	$\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 9)$
4	$\cos(2\operatorname{arctg} 2) - \sin(4\operatorname{arcctg} 3)$

Что больше?

5	$a = \sin 40^\circ + \sin 51^\circ$ или $b = \sin 48^\circ + \sin 52^\circ$

Найдите основной период:

6	$y = 4^{\cos\frac{x}{4}} + 3^{\sin\frac{x}{3}}$

Решите уравнения:

7	$16\sin\left(\dfrac{\pi x}{3} + \dfrac{\pi}{2}\right) = 9\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{3} + 5\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{3}$, если $12 \leqslant x \leqslant 18$
8	$\arcsin\dfrac{3x}{5} + \arcsin\dfrac{4x}{5} = \arcsin x$

Найдите целые решения и их число:

9	$\arccos\dfrac{x}{3} > \arcsin\dfrac{x}{3}$

Решите неравенство:

10	$\left(\cos\pi x + \dfrac{1}{2}\right)\sqrt{\cos\pi x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}} \geqslant 0$, если $0 \leqslant x \leqslant 2$

Вариант Б

Вычислите:

1	$\dfrac{6\sqrt{3}\sin 100^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 110^\circ + \sin 60^\circ}$
2	$\cos 100^\circ + \sin 70^\circ + \cos 140^\circ$
3	$\arcsin(\sin 28)$
4	$\sin\left(2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{15}{17}\right)$

Что больше?

5	$a = \sin(\cos 26^\circ)$ или $b = \cos(\sin 26^\circ)$

Найдите основной период:

6	$y = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\mathrm{tg}\,\frac{x}{4}} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\cos\frac{x}{3}}}$

Решите уравнения:

7	$16\cos\left(\dfrac{\pi x}{4} - \dfrac{\pi}{2}\right) = 9\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\pi x}{4} + 5\,\mathrm{tg}\,\dfrac{11x}{4}$, если $17 \leqslant x \leqslant 26$
8	$\arcsin\dfrac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1-x} = \arcsin\dfrac{1}{3}$

Найдите целые решения и их число:

9	$\arccos\dfrac{x}{2} > \mathrm{arctg}\,x$

Решите неравенство:

10	$\left(\sin\pi x - \dfrac{1}{2}\right)\sqrt{\sin\pi x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}} \geqslant 0$, если $0{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}5$

Ответы к самостоятельным работам

Самостоятельная работа 1

	А		Б
1	$\frac{\pi}{2}k$	1	$\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$
2	$\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$	2	$-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$
3	$-\frac{\pi}{12}+\pi k$	3	$-\frac{\pi}{3}+\pi k$
4	$-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k$	4	$-\frac{2\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi k$
5	$\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{3}k$	5	$\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{3}k$
6	$\frac{3\pi}{8}+\pi k$	6	$\frac{5\pi}{8}+\pi k$
7	$\left[-\frac{\pi}{12}+\pi k; \frac{5\pi}{12}+\pi k\right]$	7	$\left[-\frac{\pi}{3}+\pi k; \frac{\pi}{6}+\pi k\right]$
8	$\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}k; \frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}k\right)$	8	$\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}k; -\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}k\right)$
9	$\left[\frac{5\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k; \frac{8\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k\right]$	9	$\left[\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}k; \frac{13\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}k\right]$
10	$\left[-\frac{5\pi}{8}+\pi k; -\frac{\pi}{8}+\pi k\right]$	10	$\left[-\frac{3\pi}{8}+\pi k; \frac{\pi}{8}+\pi k\right]$

Самостоятельная работа 2

	А		Б
1	$\pm\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6}+\pi k$	1	$-\dfrac{\pi}{12}\pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2\pi}{3}k$
2	$\dfrac{\pi}{12}+(-1)^k\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}k$	2	$\dfrac{\pi}{6}+(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}k$
3	$\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}k$	3	$-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}k$
4	$\dfrac{7\pi}{18}+\dfrac{2\pi}{3}k$	4	$\dfrac{\pi}{12}+(-1)^k\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}k$
5	$-\dfrac{\pi}{12}+(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi}{4}k$	5	$\dfrac{\pi}{12}\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}k$
6	$2\pi k;\quad \pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$	6	$-\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\quad (-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}n$
7	$-\dfrac{\pi}{4}+\pi k;$ $\operatorname{arctg}4+\pi n$	7	$-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}k;$ $-\dfrac{1}{3}\operatorname{arcctg}3+\dfrac{\pi}{3}n$
8	$\pm\dfrac{5\pi}{12};$ $\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{4}+\pi n$	8	$(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}k;$ $\dfrac{1}{2}(-1)^n\arcsin\dfrac{3}{4}+\dfrac{\pi}{2}n$
9	$\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k$	9	$\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\quad \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}n$
10	$-\dfrac{\pi}{4}+\pi k;$ $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;$ $\pi+2\pi m$	10	$\dfrac{\pi}{4}+\pi k$

Самостоятельная работа 3

	А		Б
1	$-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}k$	1	$\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}k$
2	$-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\pi}{3}k$	2	$\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}k$
3	$\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$	3	$2\pi k$
4	$(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}k;$ $(-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}n$	4	$\pm\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2\pi}{3}k;$ $\pm\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{2\pi}{3}n$
5	$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k$	5	$\dfrac{\pi}{2}k$
6	$-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}k;$ $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}+\dfrac{\pi}{3}n$	6	$-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}k;$ $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}+\dfrac{\pi}{3}n$
7	$-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}k$	7	$\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}k$
8	$\emptyset$	8	$\pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(\sqrt{5}-2\right)+\pi k$
9	$\forall x\neq\dfrac{\pi}{4}n$	9	$\forall x\neq\dfrac{\pi}{4}k$
10	$\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\quad \pi+2\pi n$	10	$\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\quad \dfrac{3\pi}{2}+2\pi n$

Самостоятельная работа 4

	А	Б
6	$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$
7	$-3\frac{3}{7}$	$-1\frac{7}{8}$
8	$4\frac{5}{14}$	$4\frac{5}{14}$
9	2,3	2,1
10	$1\frac{1}{137}$	$1\frac{152}{185}$

Самостоятельная работа 5

	А	Б
1	$\cos^2\alpha$	$\sin^2\alpha$
2	1	1
3	$\sin\alpha - \cos\alpha$	$\sin\alpha + \cos\alpha$
4	-1	1
5	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
6	1	1

Самостоятельная работа 6

	А	Б
1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$
2	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\sqrt{\frac{13}{3}}$	$\frac{1}{4}$ $-\frac{\sqrt{15}}{15}$
3	$\frac{\sqrt{2}}{3}$ $\frac{\sqrt{7}}{3}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{\sqrt{5}}{3}$
4	$-\frac{3}{5}$ $-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$ $-\frac{4}{5}$
5	$\frac{2}{7}$	-7
6	$-\frac{86}{189}$	$\frac{7}{18}$
7	$-\frac{3}{8}$	$\frac{8}{9}$
8	$\frac{11}{16}$	$\frac{13}{27}$
9	$\frac{23}{32}$	$\frac{49}{81}$
10	$\frac{37}{64}$	$\frac{33}{81}$

Самостоятельная работа 7

	А		Б
1	1	1	-1
2	1	2	1
3	1	3	-1
4	0	4	0
5	$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$	5	$\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$
6	$\operatorname{ctg}\alpha$	6	$-\operatorname{tg}\alpha$
7	-1	7	-1
8	1	8	1
9	1	9	1
10	$-\sin\alpha$	10	$-\cos\alpha$

Самостоятельная работа 8

	А	Б
1	$\operatorname{ctg}\left(\dfrac{2\alpha}{15}\right)$	$-\operatorname{tg}\left(\dfrac{7\alpha}{15}\right)$
2	$\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\alpha}{8}\right)$	$\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{5\alpha}{6}\right)$
3	1	$\dfrac{1}{4}$
4	0	1
5	4	0
6	0,75	1,5
7	$-0{,}5$	4
8	0	0,75
9	1	1
10	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Самостоятельная работа 9

	А	Б
1	$\operatorname{tg}3\alpha$	$\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$
2	1	1
3	4	$\dfrac{1}{4}$
4	$-\operatorname{ctg}^2\left(1{,}5+\dfrac{\pi}{4}\right)$	$-\operatorname{ctg}1{,}5$
5	$-1{,}75$	1
6	-2	4,5
7	2	-18
8	2	11
9	$\dfrac{1}{2}$	-9
10	3	5

Самостоятельная работа 10

	А		Б
1	$\frac{\pi}{2}+\pi k;\quad \operatorname{arctg}1{,}5+\pi n$	1	$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$
2	$(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{6}-2}{2}+\pi k$	2	$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\frac{\pi}{2}k$
3	$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$	3	$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$
4	$\pi+2\pi k$	4	$\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}k$
5	$\frac{\pi}{4}+\pi k$	5	$-\frac{\pi}{4}+\pi k;\quad -\operatorname{arctg}3+\pi n$
6	$2\pi k;\quad \frac{\pi}{2}+2\pi n$	6	$\frac{\pi}{8}k$
7	$\frac{\pi}{2}+\pi k;\quad \pm\frac{\pi}{4}+\pi n$	7	$\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k$
8	$(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}k$	8	$\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pi+2\pi n;\ \frac{2\pi}{5}m$
9	$\frac{\pi}{2}+\pi k$	9	$\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k;\quad \frac{3\pi}{20}+\frac{\pi}{5}n$
10	$\pm\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}k$	10	$\frac{\pi}{4}+\pi k$

Самостоятельная работа 11

	А		Б
1	$\frac{\pi}{2}k;\quad -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\frac{\pi}{2}n$	1	πk
2	πk	2	$\frac{\pi}{2}+\pi k$
3	$\frac{\pi}{2}k;\quad \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$	3	$\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$
4	$\frac{\pi}{2}+2\pi k;\quad 2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+2\pi n$	4	πk
5	$\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}n$	5	$\frac{3\pi}{32}+\frac{\pi}{4}k;\quad \frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{3}n$
6	$\frac{\pi}{2}+2\pi k;\quad 2\pi n$	6	$\pm\arccos\frac{9-\sqrt{73}}{2}+\pi n$
7	$\frac{\pi}{4}k;\quad \pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k$	7	$\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k;\quad -\frac{\pi}{12}+\pi n$
8	$-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k;$ $-\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}2+\frac{\pi}{2}n$	8	$\frac{19}{36}\pi+\pi k$
9	$-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k;$ $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}n$	9	$\frac{\pi}{3}k$, где $k \not\vdots\, 3$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$
10	$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$	10	$\frac{\pi}{2}k;\quad \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}n$

Самостоятельная работа 12

	А		Б
1	$\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}k$	1	$\frac{\pi}{4}+\pi k$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n$
2	$\frac{\pi}{2}+\pi k$	2	$\emptyset$
3	$\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}t$; $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}n$	3	$\frac{\pi}{2}k$
4	$\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$	4	$\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{8}k$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$
5	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$; πn; $(-1)^{t+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}t$	5	$\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}k$
6	$\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$; $\frac{\pi}{12}+\pi n$	6	$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$
7	$\frac{\pi}{2}k$; $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}n$	7	$\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$
8	$\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$	8	$\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k$
9	$\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$	9	$-\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}n$
10	$\frac{\pi}{4}+\pi k$	10	$\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$

Самостоятельная работа 13

	А		Б
1	$0{,}6\pi$	1	$0{,}6\pi$
2	$0{,}6\pi$	2	$\frac{4\pi}{5}$
3	$-0{,}2\pi$	3	$-\frac{3\pi}{7}$
4	$-0{,}2\pi$	4	$-0{,}3\pi$
5	$\frac{2}{5}\sqrt{5}$	5	$\frac{3}{5}$
6	$0{,}6$	6	$\frac{12}{13}$
7	$\frac{2}{3}$	7	$0{,}3\sqrt{5}$
8	$\frac{3}{4}$	8	$-\frac{4}{3}$
9	$2{,}4$	9	$\frac{15}{8}$
10	$\frac{1}{3}$	10	$\frac{12}{13}$

Самостоятельная работа 14

1	$\boxed{4}$
2	$\boxed{12}$
3	$\boxed{8}$
4	$\boxed{10}$
5	$\boxed{1}$
6	$\boxed{11}$
7	$\boxed{7}$
8	$\boxed{6}$
9	$\boxed{3}$
10	$\boxed{9}$
11	$\boxed{2}$
12	$\boxed{5}$

Самостоятельная работа 15

А

1	$\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; -\pi k\right)\middle\| k\in\mathbb{Z}\right\}$
2	$\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \pi n\right)\middle\| k,n\in\mathbb{Z}\right\}$
3	$\left\{\left(\pm\left(\pi-\arccos\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)+2\pi k; \frac{5}{32}\right)\middle\| k\in\mathbb{Z}\right\}$
4	$\left\{\left(\pm\frac{\pi}{3}+(n+k)\pi; \pm\frac{\pi}{3}+\pi(n-k)\right)\middle\| k,n\in\mathbb{Z}\right\}$
5	$\left\{\left(\pm\frac{\pi}{4}+\pi n; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\middle\| k,n\in\mathbb{Z}\right\}$
6	$\left\{\begin{array}{l}\left(\pi n+(-1)^n\frac{\pi}{6}; \pm\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)\middle\| k,n\in\mathbb{Z}\\ \left(\pi n+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}; \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)\end{array}\right\}$
7	$\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; 2\pi n\right); \left(\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi n\middle\| k,n\in\mathbb{Z}\right)\right\}$
8	$\left\{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n; -\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(4k-n)\right)\middle\| k,n\in\mathbb{Z}\right\}$

Б

1	$\left\{\left(\pi k; -\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \middle\vert\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
2	$\left\{\left((-1)^k\frac{\pi}{8} + (k+n)\frac{\pi}{2}; (-1)^k\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}(k-n)\right) \middle\vert\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}$
3	$\left\{\left((-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{6} + \pi k; -\frac{1}{4}\right) \middle\vert\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
4	$\left\{\left(\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(2k+n)\,;\right.\right.$ $\left.\left.\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+2}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(2k-n)\right) \middle\vert\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}$
5	$\left\{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \middle\vert\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}$
6	$\left\{\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k; 2\pi k\right); \left(2\pi n \pm \frac{2\pi}{3}; 2\pi k + \pi\right) \middle\vert\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}$
7	$\left\{(\pi n; (2k+1)\pi); \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \middle\vert\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}$
8	$\left\{\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + (n+2k)\pi\right) \middle\vert\, k, n \in \mathbb{Z}\right\}$

Самостоятельная работа 16

	А		Б
1	0	1	3
2	1	2	0
3	$3{,}5\pi - 9$	3	$9\pi - 28$
4	0,36	4	0,48
5	$a > b$	5	$a < b$
6	24π	6	12π
7	12,5; 14,5	7	$17\frac{1}{3}$; $22\frac{2}{3}$; $25\frac{1}{3}$
8	-1; 0; 1	8	$\frac{2}{3}$
9	$-3; -2; -1; 0; 1; 2$ (шесть решений)	9	$-2; -1; 0; 1$ (четыре решения)
10	$\left\{1\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right\}$; $\left[0; \frac{2}{3}\right]$; $\left[1\frac{1}{3}; 2\right]$	10	$\left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right] \cup \left[2\frac{1}{3}; 2{,}5\right]$

Тригонометрические формулы

1. Алгебраические соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

1.1 $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

1.2 $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$

1.3 $\sin\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$

1.4 $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

1.5 $\cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$

1.6 $\cos\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$

1.7 $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$

1.8 $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$

1.9 $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$

1.10 $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$

1.11 $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$

1.12 $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

2. Решение простейших уравнений

2.1 $\cos x = m \Rightarrow x = \pm\arccos m + 2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}$

2.2 $\sin x = m \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin m + \pi k \mid k\in\mathbb{Z}$

2.3 $\operatorname{tg} x = m \Rightarrow x = \operatorname{arctg} m + \pi k \mid k\in\mathbb{Z}$

2.4 $\operatorname{ctg} x = m \Rightarrow x = \operatorname{arcctg} m + \pi k \mid k\in\mathbb{Z}$

3. Формулы приведения

3.1 $\cos(\alpha+90^\circ) = -\sin\alpha$ $\quad \cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$

3.2 $\cos(\alpha-90^\circ) = \sin\alpha$ $\quad \cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$

3.3 $\sin(\alpha+90^\circ) = \cos\alpha$ $\quad \sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$

3.4 $\sin(\alpha-90^\circ) = -\cos\alpha$ $\quad \sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$

3.5 $\cos(90^\circ-\alpha) = \sin\alpha$ $\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$

3.6 $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ $\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

3.7 $\operatorname{ctg}(\alpha + 90^\circ) = -\operatorname{tg}\alpha$ $\quad \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\alpha$

3.8 $\operatorname{ctg}(\alpha - 90^\circ) = -\operatorname{tg}\alpha$ $\quad \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\alpha$

3.9 $\operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ) = -\operatorname{ctg}\alpha$ $\quad \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$

3.10 $\operatorname{tg}(\alpha - 90^\circ) = -\operatorname{ctg}\alpha$ $\quad \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$

3.11 $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ $\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$

3.12 $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ $\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$

3.13 $\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos\alpha$ $\quad \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$

3.14 $\cos(\alpha - 180^\circ) = -\cos\alpha$ $\quad \cos(\alpha - \pi) = -\cos\alpha$

3.15 $\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin\alpha$ $\quad \sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$

3.16 $\sin(\alpha - 180^\circ) = -\sin\alpha$ $\quad \sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha$

3.17 $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

3.18 $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ $\quad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

3.19 $\operatorname{ctg}(\alpha + 180^\circ) = \operatorname{ctg}\alpha$ $\quad \operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}\alpha$

3.20 $\operatorname{ctg}(\alpha - 180^\circ) = \operatorname{ctg}\alpha$ $\quad \operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \operatorname{ctg}\alpha$

3.21 $\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ) = \operatorname{tg}\alpha$ $\quad \operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha$

3.22 $\operatorname{tg}(\alpha - 180^\circ) = \operatorname{tg}\alpha$ $\quad \operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \operatorname{tg}\alpha$

3.23 $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ $\quad \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

3.24 $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ $\quad \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

3.25 $\cos(\alpha + 270^\circ) = \sin\alpha$ $\quad \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\alpha$

3.26 $\cos(\alpha - 270^\circ) = -\sin\alpha$ $\quad \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$

3.27 $\sin(\alpha + 270^\circ) = -\cos\alpha$ $\quad \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$

3.28 $\sin(\alpha - 270^\circ) = \cos\alpha$ $\quad \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\alpha$

3.29 $\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$ $\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$

3.30 $\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$

3.31 $\operatorname{ctg}(\alpha + 270^\circ) = -\operatorname{tg}\alpha$ $\quad \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\alpha$

3.32 $\operatorname{ctg}(\alpha - 270^\circ) = -\operatorname{tg}\alpha$ $\quad \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\alpha$

3.33 $\operatorname{tg}(\alpha + 270^\circ) = -\operatorname{ctg}\alpha$ $\quad \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$

3.34 $\operatorname{tg}(\alpha - 270^\circ) = -\operatorname{tg}\alpha$ $\quad \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\alpha$

3.35 $\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ $\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$

3.36 $\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ $\quad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$

4. Теоремы сложения

4.1 $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

4.2 $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$

4.3 $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

4.4 $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

4.5
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \qquad \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi t \end{cases} \quad | k, n, t \in \mathbb{Z}$$

4.6
$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \qquad \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi t \end{cases} \quad | k, n, t \in \mathbb{Z}$$

5. *Функции двойного и половинного угла*

5.1 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

5.2 $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

5.3 $\sin 2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha} \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$

5.4 $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha} \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$

5.5 $\mathrm{tg}\,2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha} \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}$

5.6 $\mathrm{ctg}\,2\alpha = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha} \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}$

5.7 $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

5.8 $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

5.9 $\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

5.10 $\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

6. *Функции тройного угла*

6.1 $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \sin^3\alpha = \dfrac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$

6.2 $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \qquad \cos^3\alpha = \dfrac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$

6.3 $\mathrm{tg}\,3\alpha = \dfrac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\,\alpha}{1-3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha} \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z}$

6.4 $\mathrm{ctg}\,3\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^3\,\alpha - 3\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{3\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha - 1} \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z}$

7. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и наоборот

7.1 $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

7.2 $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

7.3 $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

7.4 $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

7.5 $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ при $\begin{cases}\cos\alpha\neq 0\\ \cos\beta\neq 0\end{cases}$

$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$ при $\begin{cases}\sin\alpha\neq 0\\ \sin\beta\neq 0\end{cases}$

7.6 $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ при $\begin{cases}\cos\alpha\neq 0\\ \cos\beta\neq 0\end{cases}$

$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$ при $\begin{cases}\sin\alpha\neq 0\\ \sin\beta\neq 0\end{cases}$

7.7 $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$

7.8 $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$

7.9 $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$

7.10 $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$

7.11 $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$

7.12 $A\sin\alpha + B\cos\alpha =$

$$= \begin{cases} \sqrt{A^2+B^2}\cdot\sin\left(\alpha+\operatorname{arctg}\frac{A}{B}\right) & \text{если } B>0\\ -\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sin\left(\alpha+\operatorname{arctg}\frac{A}{B}\right) & \text{если } B<0\\ \sqrt{A^2+B^2}\cdot\cos\left(\alpha-\operatorname{arctg}\frac{B}{A}\right) & \text{если } A>0\\ -\sqrt{A^2+B^2}\cdot\cos\left(\alpha-\operatorname{arctg}\frac{B}{A}\right) & \text{если } A<0 \end{cases}.$$

8. Свойства arc-функций

8.1 $\arccos(-m) = \pi - \arccos m \qquad \arccos m \in [0; \pi]$

8.2 $\arcsin(-m) = -\arcsin m \qquad \arcsin m \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

8.3 $\operatorname{arctg}(-m) = -\operatorname{arctg} m \qquad \operatorname{arctg} m \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

8.4 $\operatorname{arcctg}(-m) = \pi - \operatorname{arcctg} m \qquad \operatorname{arcctg} m \in (0; \pi)$

8.5 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

8.6 $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$

8.7 $$\arcsin x = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\arccos\sqrt{1-x^2}, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

8.8 $$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

8.9 $$\arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, & -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

8.10 $$\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

8.11 $$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geqslant 0 \\ -\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

8.12 $$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geqslant 0 \\ \pi - \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

8.13 $$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x} - \pi, & x < 0 \end{cases}$$

9. Тригонометрические функции от arc-функций

9.1	$\sin(\arcsin x) = x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
9.2	$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
9.3	$\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$-\infty < x < \infty$
9.4	$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$-\infty < x < \infty$
9.5	$\cos(\arccos x) = x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
9.6	$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
9.7	$\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$-\infty < x < \infty$
9.8	$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$-\infty < x < \infty$
9.9	$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$	$-\infty < x < \infty$
9.10	$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{1}{x}$	$\forall x \neq 0$
9.11	$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
9.12	$\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$-1 \leqslant x < 0;$ $0 < x \leqslant 1$
9.13	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$	$-\infty < x < \infty$
9.14	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{x}$	$\forall x \neq 0$
9.15	$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$-1 \leqslant x < 0;$ $0 < x \leqslant 1$
9.16	$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$

Содержание

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович
ТРИГОНОМЕТРИЯ

Научный редактор серии *А.В. Семенов*
Художник *Е.И. Герасимчук*
Компьютерный набор *К. В. Шевяков, И. В. Малинин*
Компьютерный набор и верстка *С. С. Афонин*
Компьютерная графика *А. С. Широкий*
Корректоры *Е.Г. Никитина, И.Б. Смирнов*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»
Тел.: (812) 943-8076; e-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО
119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.
Тел.: (495) 241-7285; e-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru.

Подписано в печать 10.02.2013. Формат 60x90/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Печ. л. 47. Тираж 1000 экз. (По требованию)
Заказ № Пет-015.

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Отпечатано с диапозитивов, предоставленных издательством «Петроглиф», в типографии Издательского дома КДУ.
119234, Москва, а/я 587. Тел./факс (495) 638-57-34;
e-mail: kdu@kdu.ru; www.kdu.ru.

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики.

По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасные самоучители, которые позволят ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к экзаменам.

Естественная логика построения материала «от простого к сложному» позволит учителю использовать эти книги для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив.

Серия «МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ»

1. Дроби.
2. Корни.
3. Уравнения.
4. Дробно-рациональные неравенства.
5. Системы уравнений.
6. Иррациональные уравнения и неравенства.
7. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии.
8. Логарифмы.
9. Тригонометрия.
10. Построение графиков функций элементарными методами.
11. Уравнения и неравенства с параметрами.
12. Задачи с параметрами на экзаменах.
13. Введение в математический анализ.
14. Комплексные числа.
15. Комбинаторика. Статистика. Вероятность.
16. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 1. Планиметрия.
17. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 2. Стереометрия. Часть 3. Векторы.

ISBN 978-5-906226-15-0

9 785906 226150